Intersection arithmétique

Bruno Winckler

Rencontres Doctorales Lebesgue 2014, Rennes

12 octobre 2014

Plan

Plan

1. Intersection sur les surfaces
   - Exemples
   - Théorème de Bézout (géométrique)

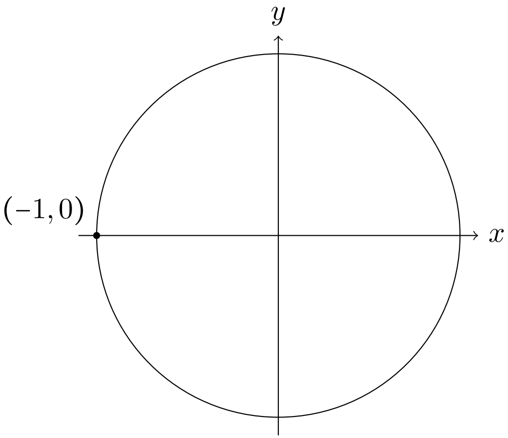
2. Intersection arithmétique
   - Les courbes elliptiques
   - Intersection arithmétique

Exemples élémentaires

Résoudre $x^2 + y^2 = 1$, $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

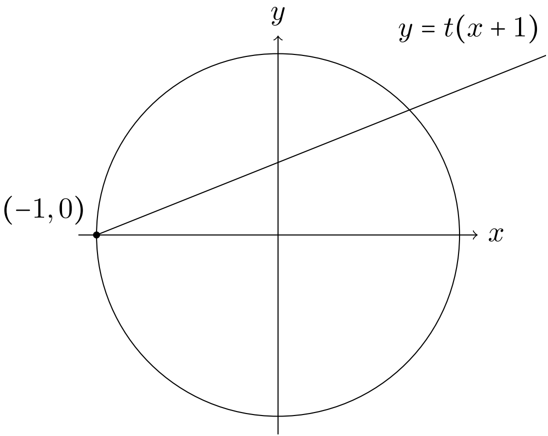
Exemples élémentaires

Résoudre $x^2 + y^2 = 1,\ (x, y) \in \mathbb{Q}^2$.



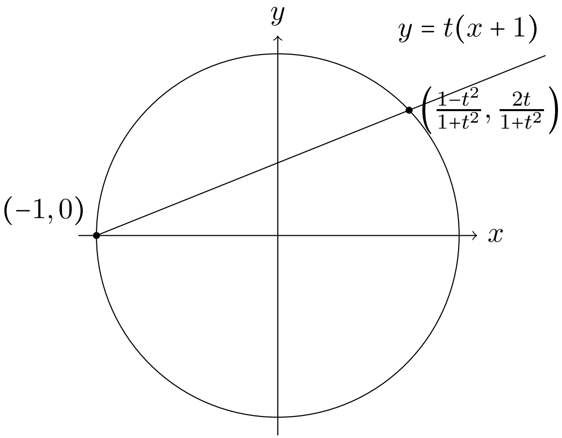
Exemples élémentaires

Résoudre $x^2 + y^2 = 1,\ (x, y) \in \mathbb{Q}^2$.



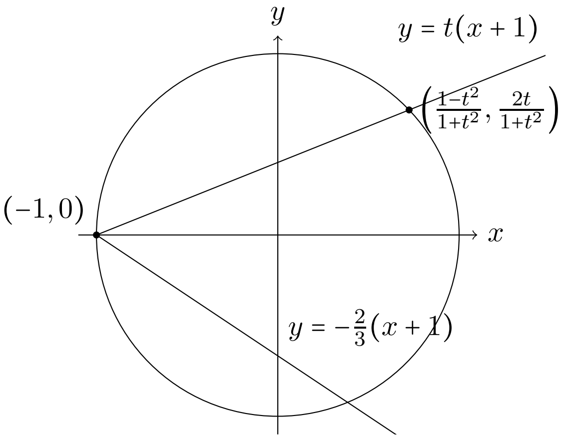
Exemples élémentaires

Résoudre $x^2 + y^2 = 1,\ (x,y) \in \mathbb{Q}^2$.



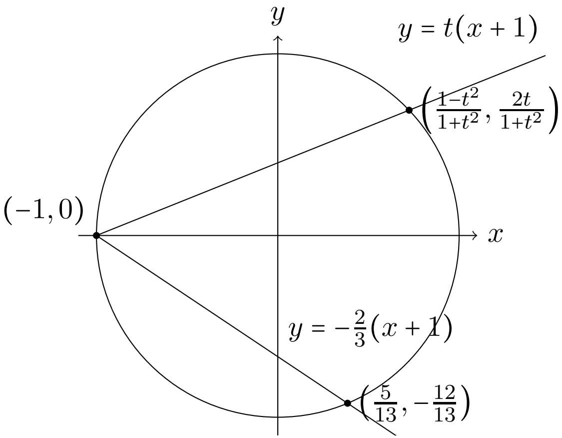
Exemples élémentaires

Résoudre $x^2 + y^2 = 1,\ (x, y) \in \mathbb{Q}^2$.



Exemples élémentaires

Résoudre $x^2 + y^2 = 1$, $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

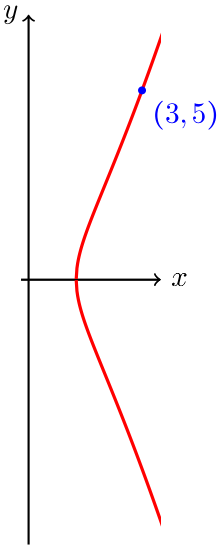


Exemples élémentaires

Résoudre $y^2 = x^3 - 2,\ (x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

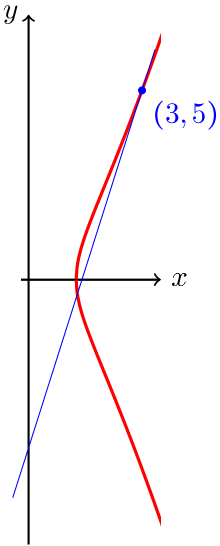
Exemples élémentaires

Résoudre $y^2 = x^3 - 2$, $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.



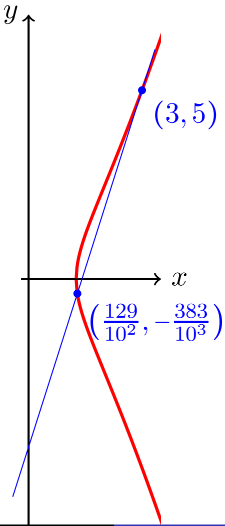
Exemples élémentaires

Résoudre $y^2 = x^3 - 2,\ (x, y) \in \mathbb{Q}^2$.



Exemples élémentaires

Résoudre $y^2 = x^3 - 2$, $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.



Exemples élémentaires

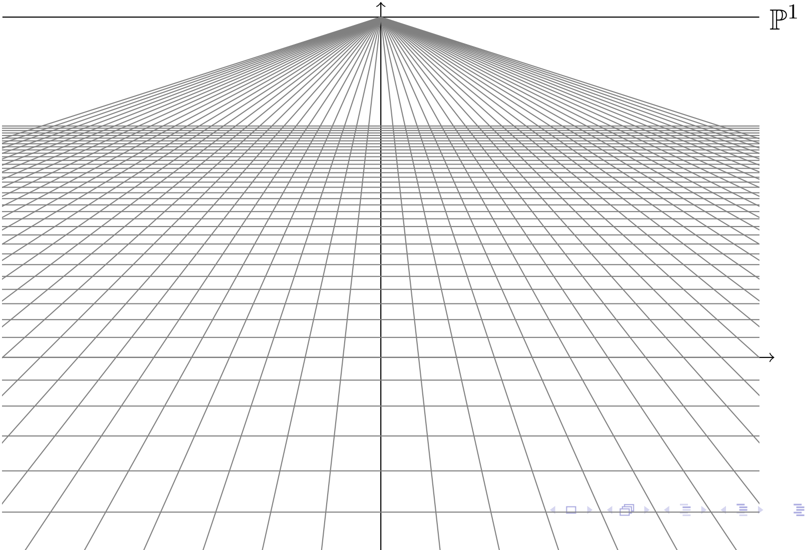
Résoudre $y^2 = x^3 - 2$, $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

Les solutions : $(3, \pm 5)$, $\left(\frac{129}{10^2}, \pm\frac{383}{10^3}\right)$, $\left(\frac{2340922881}{7660^2}, \pm\frac{113259286337292}{7660^3}\right)$, *etc.*

Plan

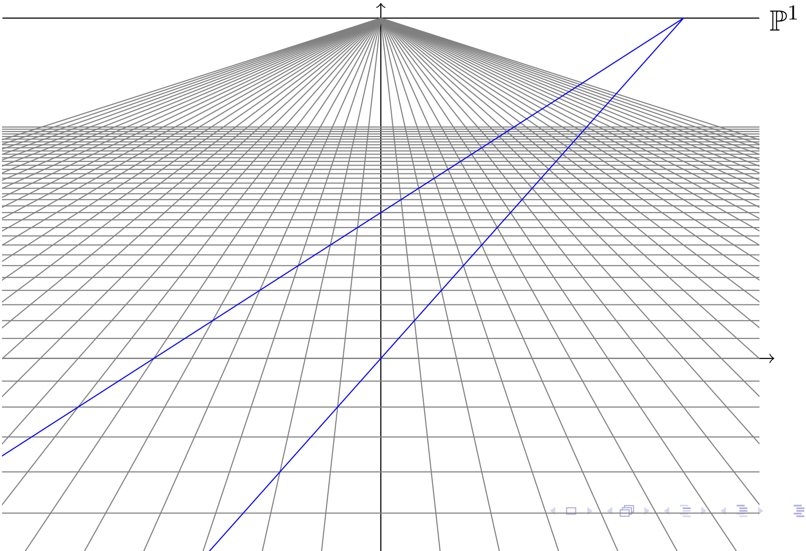
Plan projectif

Soit $\mathbb{P}^2$ le plan projectif (le plan affine + une droite à l'infini).



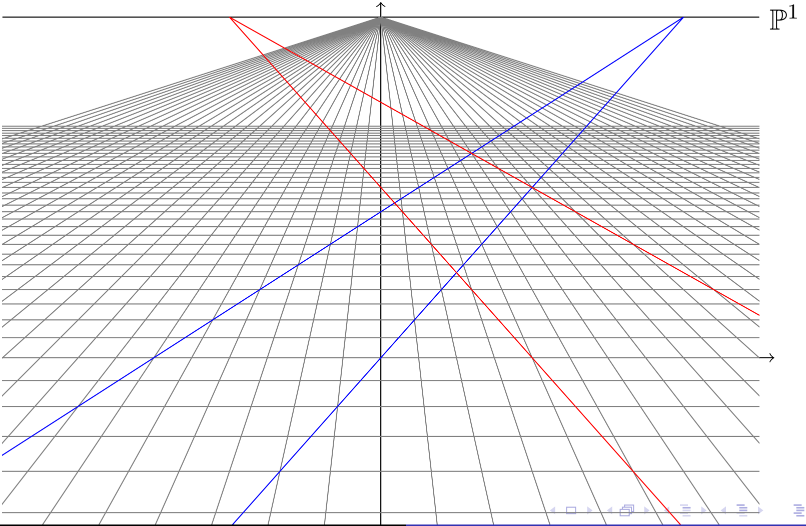
Plan projectif

Soit $\mathbb{P}^2$ le plan projectif (le plan affine + une droite à l'infini).



Plan projectif

Soit $\mathbb{P}^2$ le plan projectif (le plan affine + une droite à l'infini).



Intersection sur les surfaces

Si S est une surface projective, et Γ_1, Γ_2 deux courbes irréductibles sur S, *distinctes*, qui se coupent *transversalement*, on pose $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 := \mathrm{card}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. On étend la définition :

Intersection sur les surfaces

Si S est une surface projective, et Γ_1, Γ_2 deux courbes irréductibles sur S, *distinctes*, qui se coupent *transversalement*, on pose $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 := \mathrm{card}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. On étend la définition :

- à Γ_1 et Γ_2 *distinctes* qui *ne* se coupent *pas* transversalement, en déformant Γ_2 en Γ_3 pour se ramener au cas précédent, et en posant $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 := \Gamma_1 \cdot \Gamma_3$;

Intersection sur les surfaces

Si S est une surface projective, et Γ_1, Γ_2 deux courbes irréductibles sur S, *distinctes*, qui se coupent *transversalement*, on pose $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 := \mathrm{card}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. On étend la définition :

- à Γ_1 et Γ_2 *distinctes* qui *ne* se coupent *pas* transversalement, en déformant Γ_2 en Γ_3 pour se ramener au cas précédent, et en posant $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 := \Gamma_1 \cdot \Gamma_3$;
- à $\Gamma_1 = \Gamma_2$, en déformant Γ_1 en $\Gamma_3 \neq \Gamma_1$, et en posant $\Gamma_1^2 := \Gamma_1 \cdot \Gamma_1 := \Gamma_1 \cdot \Gamma_3$;

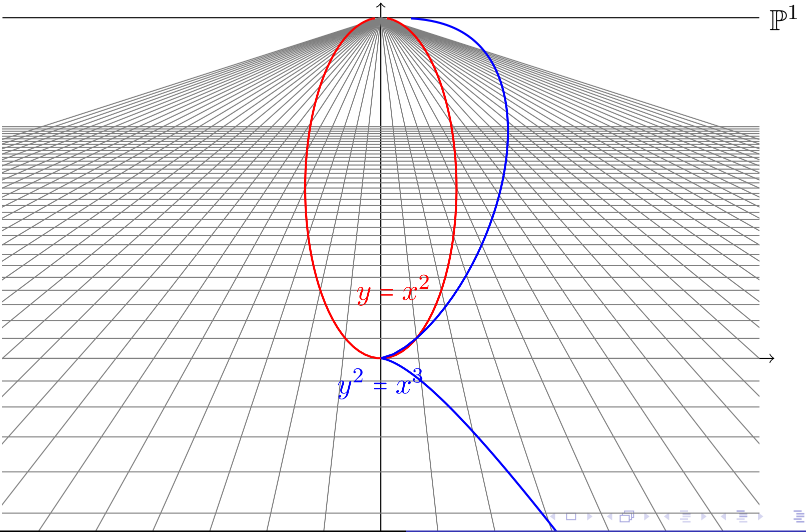
Intersection sur les surfaces

Si S est une surface projective, et Γ_1, Γ_2 deux courbes irréductibles sur S, *distinctes*, qui se coupent *transversalement*, on pose $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 := \mathrm{card}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. On étend la définition :

- à Γ_1 et Γ_2 *distinctes* qui *ne* se coupent *pas* transversalement, en déformant Γ_2 en Γ_3 pour se ramener au cas précédent, et en posant $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 := \Gamma_1 \cdot \Gamma_3$;
- à $\Gamma_1 = \Gamma_2$, en déformant Γ_1 en $\Gamma_3 \neq \Gamma_1$, et en posant $\Gamma_1^2 := \Gamma_1 \cdot \Gamma_1 := \Gamma_1 \cdot \Gamma_3$;
- à tout élément de $\mathrm{Div}(S)$ par $\mathbb{Z}$-linéarité.

Théorème de Bézout (géométrique)

Si Γ_1 et Γ_2 sont irréductibles, $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \deg(\Gamma_1)\deg(\Gamma_2)$.



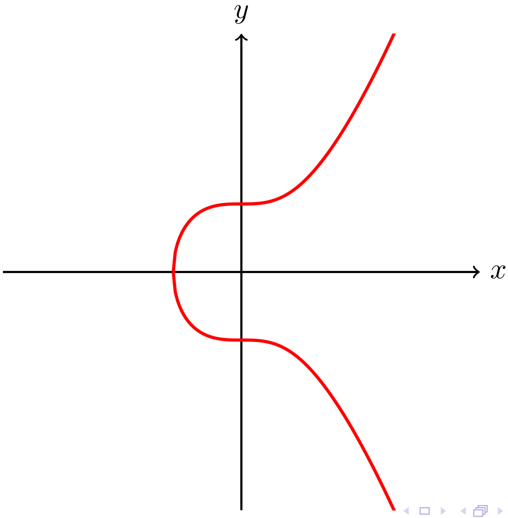
Plan

Résultats liminaires

Une courbe elliptique : $\{y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\}$, $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.

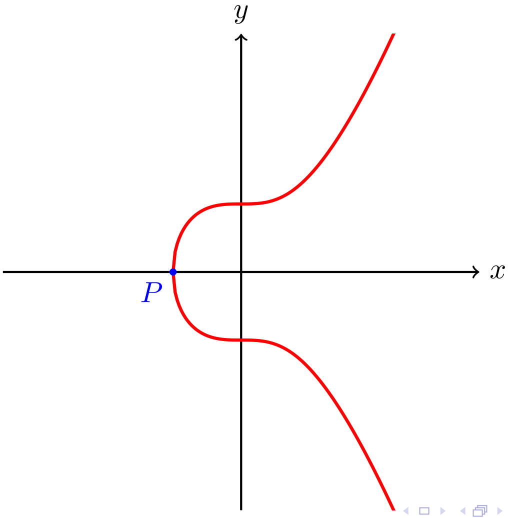
Résultats liminaires

Une courbe elliptique : $\{y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\}$, $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.



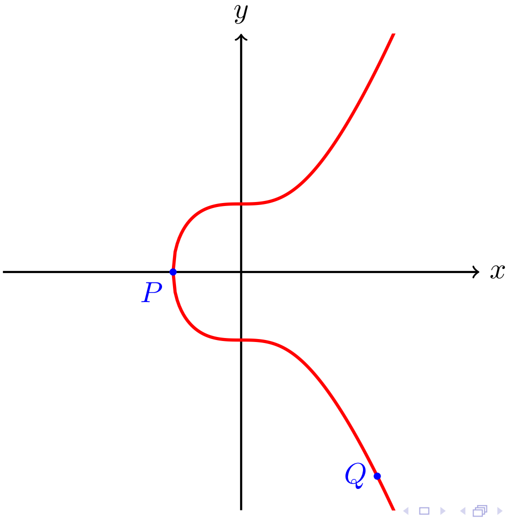
Résultats liminaires

Une courbe elliptique : $\{y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\}$, $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$.



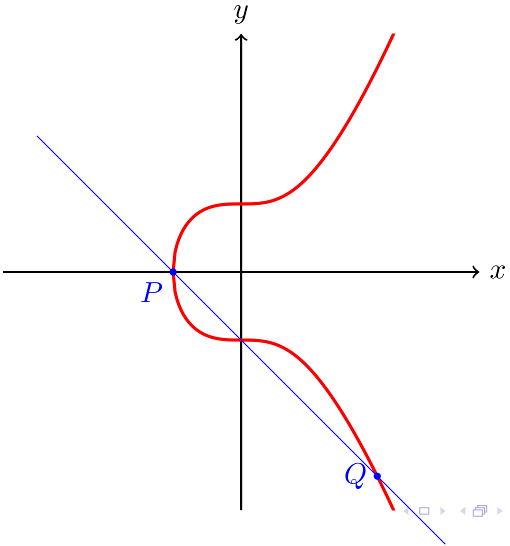
Résultats liminaires

Une courbe elliptique : $\{y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\}$, $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.



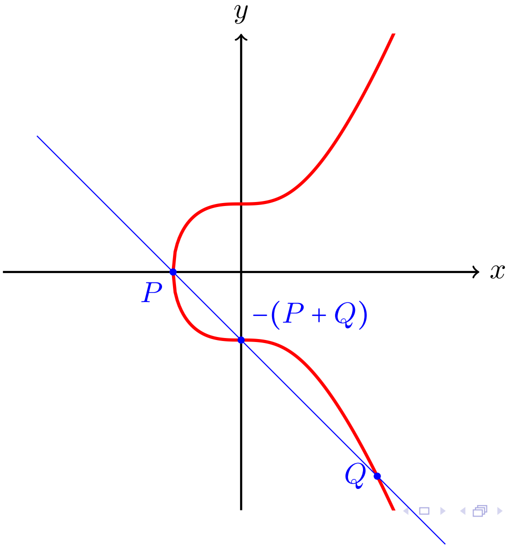
Résultats liminaires

Une courbe elliptique : $\{y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\}$, $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.



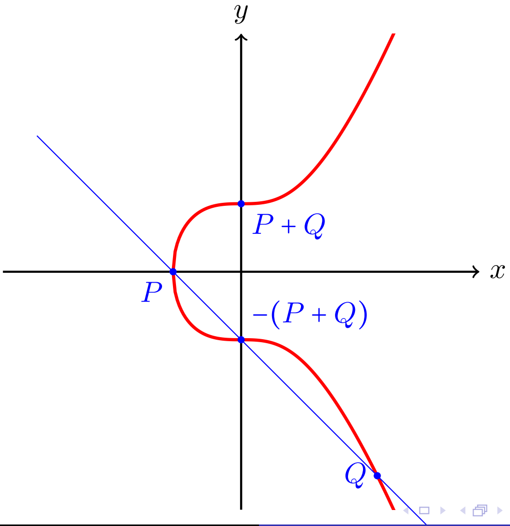
Résultats liminaires

Une courbe elliptique : $\{y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\}$, $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$.



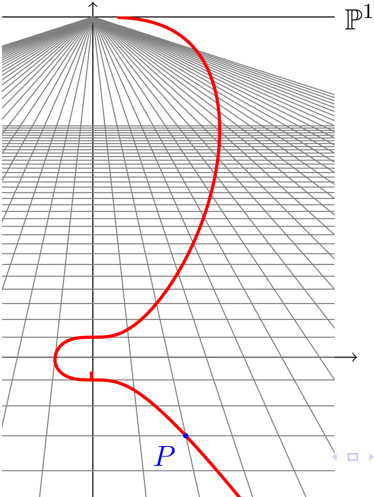
Résultats liminaires

Une courbe elliptique : $\{y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\}$, $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.



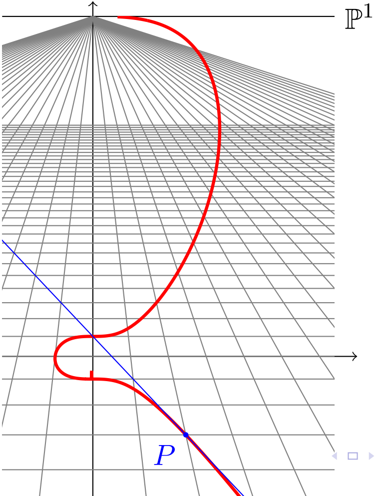
Point de torsion sur une courbe elliptique

FIGURE : Courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x^3 + 1$.



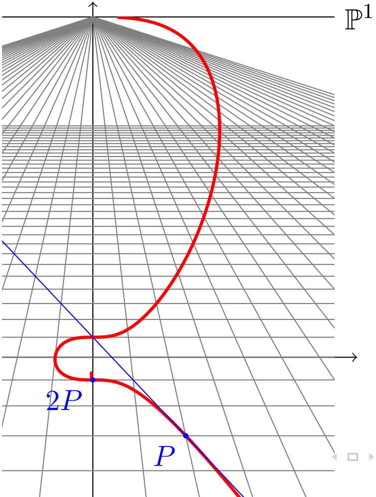
Point de torsion sur une courbe elliptique

Figure : Courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x^3 + 1$.



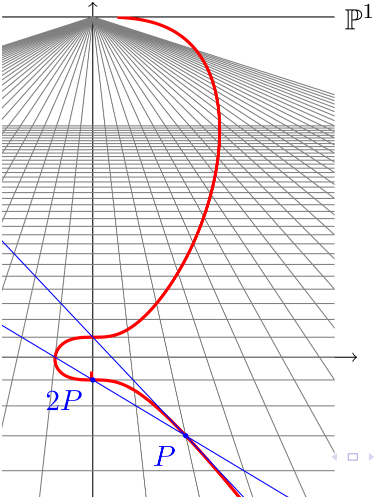
Point de torsion sur une courbe elliptique

FIGURE : Courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x^3 + 1$.



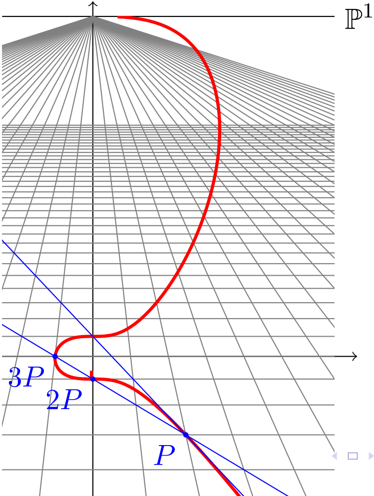
Point de torsion sur une courbe elliptique

FIGURE : Courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x^3 + 1$.



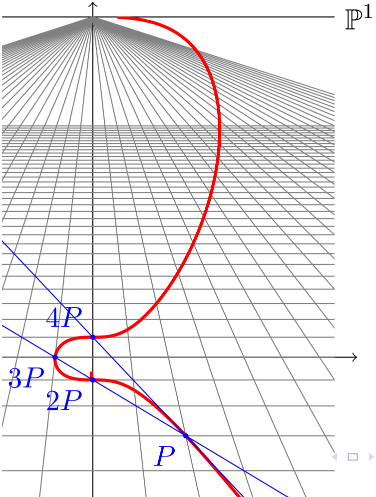
Point de torsion sur une courbe elliptique

FIGURE : Courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x^3 + 1$.



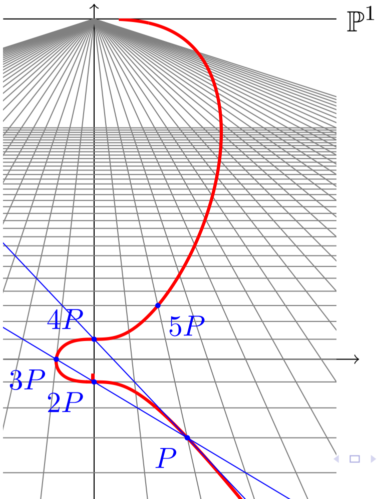
Point de torsion sur une courbe elliptique

FIGURE : Courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x^3 + 1$.



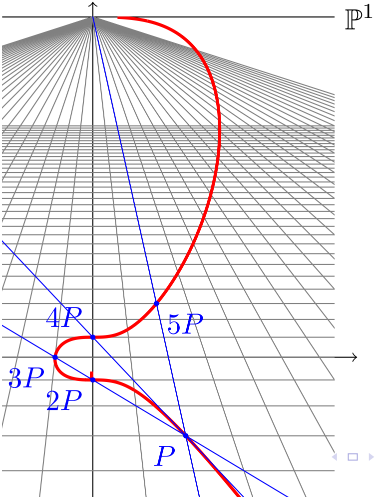
Point de torsion sur une courbe elliptique

FIGURE : Courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x^3 + 1$.



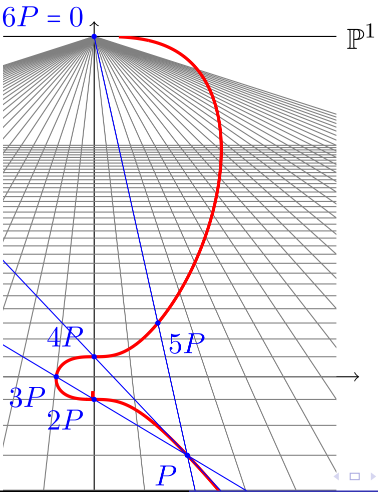
Point de torsion sur une courbe elliptique

FIGURE : Courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x^3 + 1$.



Point de torsion sur une courbe elliptique

FIGURE : Courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x^3 + 1$.



Hauteur sur une courbe elliptique

Si $P(x,y) \in E(\mathbb{Q})$, on note $h(P) = h(x)$, et :

$$\hat{h}(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{h([2^n]P)}{4^n}.$$

Hauteur sur une courbe elliptique

Si $P(x,y) \in E(\mathbb{Q})$, on note $h(P) = h(x)$, et :

$$\hat{h}(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{h([2^n]P)}{4^n}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent :

Hauteur sur une courbe elliptique

Si $P(x,y) \in E(\mathbb{Q})$, on note $h(P) = h(x)$, et :

$$\hat{h}(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{h([2^n]P)}{4^n}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent :

- $h(P) - \hat{h}(P) = O(1)$;

Hauteur sur une courbe elliptique

Si $P(x,y) \in E(\mathbb{Q})$, on note $h(P) = h(x)$, et :

$$\hat{h}(P) = \lim_{n \to \infty} \frac{h([2^n]P)}{4^n}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent :

- $h(P) - \hat{h}(P) = O(1)$;
- $\hat{h}(P+Q) + \hat{h}(P-Q) = 2(\hat{h}(P) + \hat{h}(Q))$;

Hauteur sur une courbe elliptique

Si $P(x, y) \in E(\mathbb{Q})$, on note $h(P) = h(x)$, et :

$$\hat{h}(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{h([2^n]P)}{4^n}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent :

- $h(P) - \hat{h}(P) = O(1)$;
- $\hat{h}(P+Q) + \hat{h}(P-Q) = 2(\hat{h}(P) + \hat{h}(Q))$;
- $\hat{h}([m]P) = m^2 \hat{h}(P)$;

Hauteur sur une courbe elliptique

Si $P(x,y) \in E(\mathbb{Q})$, on note $h(P) = h(x)$, et :

$$\hat{h}(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{h([2^n]P)}{4^n}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent :

- $h(P) - \hat{h}(P) = O(1)$;
- $\hat{h}(P+Q) + \hat{h}(P-Q) = 2(\hat{h}(P) + \hat{h}(Q))$;
- $\hat{h}([m]P) = m^2\hat{h}(P)$;
- quel que soit $c > 0$, $\{P \in E(\mathbb{Q}); \hat{h}(P) \leqslant c\}$ est fini.

En particulier, $\hat{h}(P) = 0 \Leftrightarrow P$ est de torsion.

Hauteur sur une courbe elliptique

Si $P(x,y) \in E(\mathbb{Q})$, on note $h(P) = h(x)$, et :

$$\hat{h}(P) = \lim_{n \to \infty} \frac{h([2^n]P)}{4^n}.$$

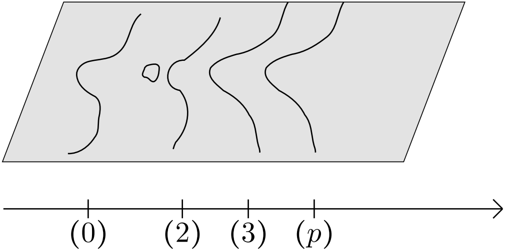
Cette fonction vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent :

- $h(P) - \hat{h}(P) = O(1)$;
- $\hat{h}(P+Q) + \hat{h}(P-Q) = 2(\hat{h}(P) + \hat{h}(Q))$;
- $\hat{h}([m]P) = m^2 \hat{h}(P)$;
- quel que soit $c > 0$, $\{P \in E(\mathbb{Q}); \hat{h}(P) \leqslant c\}$ est fini.

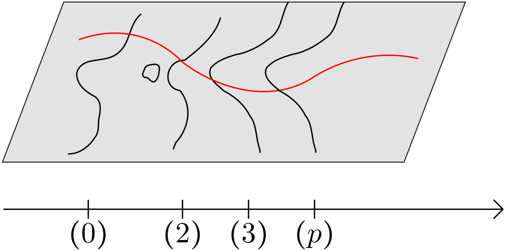
En particulier, $\hat{h}(P) = 0 \Leftrightarrow P$ est de torsion.Mieux, il existe $c_0 > 0$ tel que : $\hat{h}(P) \leqslant c_0 \Leftrightarrow P$ est de torsion.

Plan

Surface arithmétique



Surface arithmétique



Surface arithmétique « compactifiée »