Partition d'un carré en triangles de même aire

Bruno Winckler

Séminaire TNT, Bordeaux

23 octobre 2012

Plan

1. Histoire du problème
   - Origine du problème
   - Cas pair
   - Cas impair

Plan

Plan

The question

Soit m un entier naturel non nul ; est-il possible de partager un carré en m triangles de même aire ?

The question

Soit m un entier naturel non nul ; est-il possible de partager un carré en m triangles de même aire ?

- L. Euler (1707–1783) :

The question

Soit m un entier naturel non nul ; est-il possible de partager un carré en m triangles de même aire ?

- L. Euler (1707–1783) : il n'en avait rien à faire.

The question

Soit m un entier naturel non nul ; est-il possible de partager un carré en m triangles de même aire ?

- L. Euler (1707–1783) : il n'en avait rien à faire.
- P. Erdős (1913–1996) :

The question

Soit m un entier naturel non nul ; est-il possible de partager un carré en m triangles de même aire ?

- L. Euler (1707–1783) : il n'en avait rien à faire.
- P. Erdős (1913–1996) : pareil.

The question

Soit m un entier naturel non nul ; est-il possible de partager un carré en m triangles de même aire ?

- L. Euler (1707–1783) : il n'en avait rien à faire.
- P. Erdős (1913–1996) : pareil.
- F. Richman et J. Thomas : la question est posée dans le *American Mathematical Monthly* n° 74 (1967), avec m impair.

Plan

- B. Winckler (1988–) : et si m est pair, alors ?

- B. Winckler (1988–) : et si m est pair, alors ?

Théorème (Winckler, 12/10/2012)

Il est possible de partager le carré en m triangles de même aire pour $m \in \{2, 4, 8\}$. J'n'ai pas vérifié mais le reste doit être triv' triv'.

- B. Winckler (1988–) : et si m est pair, alors ?

Théorème (Winckler, 12/10/2012)

Il est possible de partager le carré en m triangles de même aire pour $m \in \{2, 4, 8\}$. J'n'ai pas vérifié mais le reste doit être triv' triv'.

Théorème (Winckler, 17/10/2012)

Le théorème précédent s'étend au cas $m = 6$.

- B. Winckler (1988–) : et si m est pair, alors ?

Théorème (Winckler, 12/10/2012)

Il est possible de partager le carré en m triangles de même aire pour $m \in \{2, 4, 8\}$. J'n'ai pas vérifié mais le reste doit être triv' triv'.

Théorème (Winckler, 17/10/2012)

Le théorème précédent s'étend au cas $m = 6$.

Premières difficultés pour $m = 10$.

Figure : Les cas $m = 2$, $m = 4$ et $m = 6$

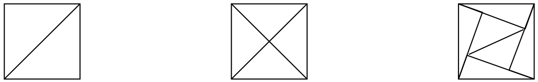
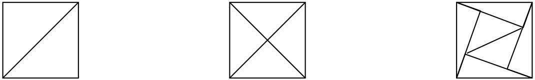


FIGURE : Les cas $m = 2$, $m = 4$ et $m = 6$

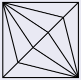


Correspondance de Winckler à Le Fourn, 17/10/2012, 14h37

Cher collègue,
Meſ dernièreſ réflecſionſ en géométrie euclidienne m'ont mené à me quémander ſ'il eſt raiſonnable de trianguler un quarré en toute quotité paire ; quelqueſ eſſaiſ vite infructueucſ indiquoyent que c'eſt certainement le caſ, mais la méthode que je tente de généraliſer ſemble ſouffrir d'un défaut. J'ai quelqu'eſpoir qu'en pourſuivant un procédé de partage en égale raison, le quarré ſoy ſomme de partieſ triangulaireſ de même aire. Amitiéſ.

Correspondance de Le Fourn à Winckler, 17/10/2012, 14h39

Tu es mignon. Voici la solution dans le cas général ^^. A+



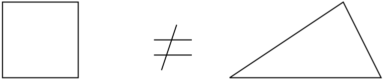
Plan

- F. Richman et J. Thomas : la question est posée dans le *American Mathematical Monthly* n° 74 (1967), avec m impair.

- F. Richman et J. Thomas : la question est posée dans le *American Mathematical Monthly* n° 74 (1967), avec m impair.
- J. Thomas, 1968 : une telle partition est impossible pour m impair, si les coordonnées des sommets des triangles sont des rationnels (argument combinatoire).

- F. Richman et J. Thomas : la question est posée dans le *American Mathematical Monthly* n° 74 (1967), avec m impair.
- J. Thomas, 1968 : une telle partition est impossible pour m impair, si les coordonnées des sommets des triangles sont des rationnels (argument combinatoire).
- P. Monsky, 1970 : une telle partition est *toujours* impossible pour m impair.

- F. Richman et J. Thomas : la question est posée dans le *American Mathematical Monthly* n° 74 (1967), avec m impair.
- J. Thomas, 1968 : une telle partition est impossible pour m impair, si les coordonnées des sommets des triangles sont des rationnels (argument combinatoire).
- P. Monsky, 1970 : une telle partition est *toujours* impossible pour m impair.
- B. Winckler, 2012 : démonstration alternative plus simple et élégante dans le cas où $m = 1$:



Plan

Lemme de Sperner

Supposons qu'on ait partitionné un carré en triangles, dont les sommets sont partagés en des ensembles disjoints $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors,

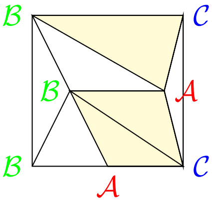
$$\text{card}\,\{\text{segments sur la frontière labellisés } \mathcal{AB}\} \equiv \{\text{triangles } \mathcal{ABC}\} \mod 2.$$

Lemme de Sperner

Supposons qu'on ait partitionné un carré en triangles, dont les sommets sont partagés en des ensembles disjoints $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors,

$$\mathrm{card}\ \{\text{segments sur la frontière labellisés } \mathcal{AB}\} \equiv \{\text{triangles } \mathcal{ABC}\} \mod 2.$$

FIGURE : Exemple.



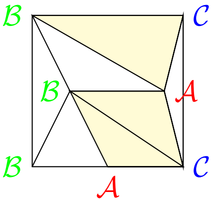
Lemme de Sperner

Supposons qu'on ait partitionné un carré en triangles, dont les sommets sont partagés en des ensembles disjoints $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors,

$$\text{card}\ \{\text{segments sur la frontière labellisés } \mathcal{AB}\} \equiv \{\text{triangles } \mathcal{ABC}\}$$

mod 2.

Figure : Exemple.



Preuve. Voir au tableau. □

Plan

1. Histoire du problème
   - Origine du problème
   - Cas pair
   - Cas impair
2. Preuve dans le cas impair
   - Étape combinatoire
   - Résolution d'un cas particulier
   - Cas général

Résolution (cas particulier)

Soit m un entier impair. Il est impossible de partitionner un carré, disons $[0, 1]^2$, en m triangles de même aire dont les sommets ont des coordonnées rationnelles.

Résolution (cas particulier)

Soit m un entier impair. Il est impossible de partitionner un carré, disons $[0,1]^2$, en m triangles de même aire dont les sommets ont des coordonnées rationnelles.

Preuve. Voir au tableau. $\square$

Plan

1. Histoire du problème
   - Origine du problème
   - Cas pair
   - Cas impair

2. Preuve dans le cas impair
   - Étape combinatoire
   - Résolution d'un cas particulier
   - Cas général

Problème : étendre la valuation 2-adique à tous les réels ?

Prolongement de la valeur absolue

On a un isomorphisme de corps entre $\bar{\mathbb{Q}}_2$ et $\mathbb{C}$; la valeur absolue ultramétrique $|\cdot|_2$ en induit donc une autre $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}$, et on a encore $|2| < 1$.

Prolongement de la valeur absolue

On a un isomorphisme de corps entre $\bar{\mathbb{Q}}_2$ et $\mathbb{C}$; la valeur absolue ultramétrique $|\cdot|_2$ en induit donc une autre $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}$, et on a encore $|2| < 1$.

Exemple. On a $|\pi|_2 = \frac{37}{11}$ (contredisez-moi si vous le pouvez).

Prolongement de la valeur absolue

On a un isomorphisme de corps entre $\bar{\mathbb{Q}}_2$ et $\mathbb{C}$; la valeur absolue ultramétrique $|\cdot|_2$ en induit donc une autre $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}$, et on a encore $|2| < 1$.

Exemple. On a $|\pi|_2 = \frac{37}{11}$ (contredisez-moi si vous le pouvez).

Corollaire

Soit m un entier impair. Il est impossible de partitionner un carré en m triangles de même aire.

Preuve. Il suffit d'étendre la valeur absolue diadique de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ et de reproduire la preuve du cas particulier démontré précédemment. $\square$

Références :

- P. Monsky, *On dividing a square into triangles*, The American Mathematical Monthly, Vol. 77, n° 2 (Fév. 1970), pp. 161–164.
- S. Lang, *Algebra*.