Intégrales de Borwein et Borwein

Prérequis

— lien entre exponentielle et fonctions trigonométriques ;

— développement limité de l'exponentielle ;

— intégration de base ;

— $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ (peut être admis).

L'objectif de cette note est cette petite curiosité mathématique : on sait montrer, de plusieurs manières différentes, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

En fait, cette formule se généralise en un certain sens, puisqu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \frac{\sin\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \frac{\sin\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}} \frac{\sin\left(\frac{x}{7}\right)}{\frac{x}{7}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

et ainsi de suite... Oups, non. En effet, c'est râpé si on va jusqu'à 15 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \frac{\sin\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}} \frac{\sin\left(\frac{x}{7}\right)}{\frac{x}{7}} \cdots \frac{\sin\left(\frac{x}{13}\right)}{\frac{x}{13}} \frac{\sin\left(\frac{x}{15}\right)}{\frac{x}{15}} \mathrm{d}x = \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000}\pi.$$

Même si la différence avec $\frac{\pi}{2}$ est infime (de l'ordre de 10^{-11}), elle est non nulle. En suivant les pas de Borwein et Borwein (dans *Some Remarkable Properties of Sinc and Related Integrals*), je vais démontrer la validité de l'égalité à $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à 13.

On commence par un petit lemme élémentaire :

Lemme 1. *Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \{-1,1\}^n$, on note :*

$$b_\gamma = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{2k+1}, \quad \textit{et : } \varepsilon_\gamma = \prod_{k=1}^{n} \gamma_k.$$

Alors :

$$\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \sum_{\gamma \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma b_\gamma^r = \begin{cases} 0 & \textit{pour tout } 1 \leqslant r \leqslant n-1, \\ 2^n n! \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

et :

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{x}{2k+1}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\gamma \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma \cos\left(b_\gamma x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right).$$

Bien que ce lemme soit assez creux mathématiquement (ce n'est qu'une façon savante de développer un produit), il n'est pas très joli, à cause des expressions peu parlantes de b_γ et ε_γ (qui prennent leur sens *a fortiori*). Néanmoins, on reconnaît là un début de linéarisation de la fonction à intégrer.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{C}$. On peut observer que :

$$\exp(t) \prod_{k=1}^{n} \left(\exp\left(\frac{t}{2k+1}\right) - \exp\left(-\frac{t}{2k+1}\right)\right) = \sum_{\gamma \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma \exp\left(b_\gamma t\right).$$

On le remarque en développant ce produit simplement (en se rappelant la formule $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$ pour tous a et b complexes), chaque terme qui en sort correspondant à un vecteur $\gamma \in \{-1,1\}^n$: sa k^{e} coordonnée est 1 si le k^{e} élément d'un produit obtenu dans le développement est $\exp\left(\frac{t}{2k+1}\right)$, et -1 sinon.

Déduisons-en l'identité (1). Si $r \geqslant 1$ est un entier, le coefficient de t^r dans le membre de droite est, connaissant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\frac{1}{r!}\sum_{\gamma\in\{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma b_\gamma^r,$$

tandis qu'à gauche, ce coefficient vaut zéro tant que $r \leqslant n-1$; ceci découle du fait que :

$$\exp\left(\frac{t}{2k+1}\right) - \exp\left(-\frac{t}{2k+1}\right) = \frac{2t}{2k+1} + etc.,$$

donc la plus petite puissance de t du membre de gauche est au moins t^n. En revanche, si r égale n, alors le coefficient de t^r dans le membre de gauche est $2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$, d'où la première égalité du lemme. Cette formule vaut également pour r nul, pourvu qu'on pose $b_\gamma^0 = 1$ même si $b_\gamma = 0$.

On reconnaît vite une analogie entre les deux formules du lemme, une fois écrit le sinus sous la forme : $\sin(x) = \dfrac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\prod_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{x}{2k+1}\right) = \frac{1}{(2i)^{n+1}}(\exp(ix)-\exp(-ix))\prod_{k=1}^{n}\left(\exp\left(\frac{ix}{2k+1}\right) - \exp\left(-\frac{ix}{2k+1}\right)\right).$$

et, comme tout à l'heure, ceci égale :

$$\frac{1}{(2i)^{n+1}}\sum_{\gamma\in\{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma \cdot (\exp(ib_\gamma x) - (-1)^n \exp(-ib_\gamma x)) = \frac{1}{2^n}\sum_{\gamma\in\{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma \cdot \cos\left(b_\gamma x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right),$$

en vertu des formules $(-1)^{n+1} = \exp(i\pi(n+1))$ et $i^{n+1} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}(n+1)\right)$, qui permettent de faire apparaître une sympathique somme d'exponentielles qui donne le cosinus.

On peut ainsi prouver le résultat désiré (après réarrangement mineur), qui reste valable si on remplace les $\dfrac{1}{2k+1}$ par des réels a_k quelconques, et l'hypothèse d'inégalité par $a_0 > \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|$. □

Proposition 2. *On a l'égalité :*

$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{x}{2k+1}\right)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^n n!}\sum_{\gamma\in\{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma b_\gamma^n \,\mathrm{signe}\,(b_\gamma),$$

avec en plus, tant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} < 1$, *l'égalité :*

$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{x}{2k+1}\right)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}.$$

Démonstration. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $C_n(x) = \displaystyle\sum_{\gamma\in\{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma \cdot \cos\left(b_\gamma x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right)$. D'après le lemme, on a :

$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{x}{2k+1}\right)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}\int_0^{+\infty} x^{-n-1} C_n(x)\mathrm{d}x.$$

Comme C_n est évidemment une fonction continue, bornée sur $\mathbb{R}_+$ (c'est une somme finie de cosinus), avec un zéro d'ordre $n+1$ en $x=0$ (grâce au lemme, puisque cette fonction égale un produit de $n+1$ sinus), on peut intégrer par parties le membre de droite de l'égalité ci-dessus n fois sans se soucier de la convergence des crochets et des intégrales en 0 et $+\infty$, et obtenir :

$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{x}{2k+1}\right)}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} \int_0^{+\infty} \sum_{\gamma \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma b_\gamma^n \sin\left(b_\gamma x\right) \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

J'utilise ici le fait que la dérivée n^{e} de $x \mapsto \cos(x)$ soit $x \mapsto \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, ce qu'on vérifie sans peine à l'aide des formules de trigonométrie basiques ; l'intégration par parties nous fait intégrer le facteur polynomial $x \mapsto x^{-n-1}$, et ce n fois. Ensuite :

$$\frac{1}{2^n} \int_0^{+\infty} \sum_{\gamma \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma b_\gamma^n \sin\left(b_\gamma x\right) \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^n n!} \sum_{\gamma \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma b_\gamma^n \int_0^{+\infty} \sin\left(b_\gamma x\right) \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^n n!} \sum_{\gamma \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma b_\gamma^n \operatorname{signe}\left(b_\gamma\right),$$

où la dernière égalité provient du calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x) \frac{\mathrm{d}x}{x}$, intégrale qui vaut $\dfrac{\pi}{2}$ et dont le calcul se retrouve dans plusieurs ouvrages d'analyse de référence.

L'hypothèse sur la somme des $\dfrac{1}{2k+1}$ permet d'assurer que b_γ est positif ou nul pour tout vecteur γ, et alors : $\operatorname{signe}\left(b_\gamma\right) = 1$. Le lemme permet de calculer la somme $\displaystyle\sum_{\gamma \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma b_\gamma^n$, et fournit le $\displaystyle\frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$. □

Ainsi, comme $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{13} < 1$, l'égalité subsiste jusqu'à cette étape. Il est naturel de se demander ce qu'il se passe si la somme excède 1, et c'est l'objet de la proposition suivante. Là encore, on peut remplacer les $\frac{1}{2k+1}$ par des a_k réels positifs, pourvu qu'on rajoute la condition $2a_k \geqslant a_n > 0$ pour tout k entre 0 et $n-1$, et cette fois la somme doit excéder a_0 :

Proposition 3. *Soit n le premier entier tel que la somme des $\frac{1}{2k+1}$, pour k allant de 1 à n, dépasse 1. Alors :*

$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{x}{2k+1}\right)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{\left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k+1} - 1\right)^n}{2^{n-1} n!} \right).$$

Démonstration. Soit $\gamma_0 = (-1, -1, \ldots, -1) \in \{-1,1\}^n$. Alors, $b_{\gamma_0} = 1 - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n+1} < 0$, tandis que $b_\gamma \geqslant 0$ pour tout autre $\gamma \in \{-1,1\}^n$. De plus, $\varepsilon_{\gamma_0} = (-1)^n$. La proposition précédente s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{x}{2k+1}\right)}{x} \mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^n n!} \sum_{\gamma \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma b_\gamma^n \operatorname{signe}\left(b_\gamma\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^n n!} \left(\sum_{\gamma \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_\gamma b_\gamma^n + \varepsilon_{\gamma_0} b_{\gamma_0}^n \left(\operatorname{signe}\left(b_{\gamma_0}\right) - 1\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{2\left(-b_{\gamma_0}\right)^n}{2^n n!} \right) \end{aligned}$$

grâce à la proposition précédente. Le résultat annoncé est prouvé. □