Idéaux de C($[0,1],\mathbb{R}$).

Bruno Winckler

J'expose quelques propriétés algébriques de l'anneau des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Je m'intéresse en fait essentiellement aux idéaux de cet anneau. Je note A cet anneau pour plus d'aisance.

Les idéaux de A les plus naturels à construire sont ceux de la forme $I_x = \{f \in A| \quad f(x) = 0\}$, pour x dans $[0,1]$. Il est facile de vérifier que c'est un idéal. En fait, c'est même un idéal maximal : en effet, l'application

$$\varphi_x \ : \begin{cases} A & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux, surjectif parce que les fonctions constantes permettent d'atteindre tous les réels, et de noyau I_x. Le théorème de factorisation des morphismes donne donc

$$A/I_x \simeq \varphi_x(A) = \mathbb{R},$$

et $\mathbb{R}$ étant un corps, l'idéal I_x est effectivement maximal, comme je l'annonçais.

En fait, tous les idéaux maximaux ont le bon goût d'être de cette forme : en effet, soit I un idéal maximal de A. Je vais montrer qu'il est forcément contenu dans un idéal de la forme I_x ; par maximalité de I, on aura alors $I = I_x$. Supposons que ce ne soit pas le cas : cela signifie qu'en tout point x de $[0,1]$, il existe une fonction $f_x \in I$ qui *ne* s'annule *pas* en x. Par continuité, chaque fonction f_x ne s'annule pas sur un voisinage de x que je note $\mathcal{O}_x$. On a alors :

$$[0,1] = \bigcup_{x\in[0,1]} \{x\} \subseteq \bigcup_{x\in[0,1]} \mathcal{O}_x,$$

et, comme $[0,1]$ est compact, on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini de $[0,1]$. Autrement dit, on peut écrire :

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{x_i}$$

pour certains x_i dans $[0,1]$. Alors, chaque $f_{x_i}^2$ est dans I (car I est un idéal et f_x est dans I), et la fonction $\sum_{i=1}^n f_{x_i}^2$ ne s'annule pas sur $[0,1]$: en effet, ceci n'est possible que si chaque f_{x_i} s'annule simultanément en un point, ce qui est impossible puisque tout point est contenu dans un voisinage $\mathcal{O}_{x_i}$ sur lequel f_{x_i} ne s'annule pas. Bref, la fonction ne s'annule pas, donc est inversible ; un idéal contenant un inversible égale l'anneau tout entier, donc $I = A$: absurde, donc I est contenu dans I_x pour un certain $x \in [0,1]$.

Si on remplace $[0,1]$ par n'importe quel compact de $\mathbb{R}$, l'argument tient debout. Par contre, si on remplace $[0,1]$ par $\mathbb{R}$, le résultat n'est plus vrai : l'ensemble des fonctions continues à support compact est contenu dans un idéal maximal (grâce au lemme de Zorn) différent des I_x, puisqu'en tout point je peux trouver une fonction continue à support compact qui ne s'annule pas.

Remarque. Comme on me l'a fait remarquer, l'ensemble des fonctions continues à support compact est un idéal qui n'est pas maximal : le lecteur en exercice s'amusera à le vérifier en raisonnant par l'absurde, par exemple.

On peut étudier de plus près les propriétés algébriques, voire arithmétiques de l'anneau des fonctions continues. Par exemple :

Proposition 1 *Il existe des idéaux de A qui ne sont pas principaux.*

Ce n'est de toute façon pas un anneau principal, puisqu'il n'est pas intègre : deux fonctions non nulles qui s'annulent sur des intervalles d'intérieur non vides et qui partitionnent $[0,1]$ sont de produit nul.

Preuve. En effet, les idéaux I_x ne sont pas principaux. Je le montre par exemple pour I_0, par l'absurde ; soit $g \in A$ tel que $I_0 = (g)$. Alors, comme $\sqrt{|g|}$ s'annule également en 0, $\sqrt{|g|} = fg$ pour une certaine fonction f de A, donc $g = f^2 g^2$, puis $g(1 - f^2 g) = 0$. Alors, la fonction g s'annule sur un voisinage de 0 (c'est un exercice intéressant : déterminer tous les diviseurs de 0 dans A) ; comme g engendre I_0, ceci voudrait dire que toutes les fonctions de I_0 s'annulent aussi sur un voisinage de 0, or ce n'est pas le cas, car $x \mapsto x$ s'annule en 0 uniquement. Dans tous les cas, on a une contradiction. □

Une autre façon de le prouver consiste à exhiber un idéal premier non nul qui ne soit pas un idéal maximal (chose qui ne se produit pas dans les anneaux principaux). On peut par exemple considérer Φ comme étant l'ensemble des idéaux qui contiennent aucun polynôme non nul. C'est un ensemble inductif non vide [*], donc il admet un élément maximal par le lemme de Zorn ; soit I_Φ cet idéal. Il n'est pas maximal, parce qu'il ne contient pas les $x \mapsto x - c$ pour tout $c \in [0,1]$, donc ne peut pas être égal à un des I_c. Par contre il est premier : si f et g sont deux fonctions de A telles que f et g ne sont pas dans I_Φ, alors fg non plus : en effet, raisonnons par l'absurde en supposant que c'est le cas. Par maximalité de I_Φ, on déduit que l'idéal engendré par I_Φ et f n'est pas dans Φ, donc contient un certain polynôme non nul : $p + fu$ est un polynôme non nul pour un certain $p \in I_\Phi$ et $u \in A$. De même, $p' + gv$ est un polynôme non nul pour $p' \in I_\Phi$ et $v \in A$. Alors,

$$(p + fu)(p' + gv) = pp' + fguv + fup' + gvp \in I_\phi \text{ (car } p, p', fg \in I_\Phi)$$

est un polynôme non nul : absurde.

∗. L'idéal engendré par $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $0 \mapsto 0$ est dedans, parce que toute fonction de cet idéal a une infinité de zéros et ne peut donc pas être un polynôme non nul.