Suites réelles ou complexes

D-W

4 juillet 2010

Table des matières

Introduction

Tout le monde a une idée assez précise de ce qu'est une suite d'éléments ; il s'agit simplement de classer des éléments les uns après les autres, ≪ à la suite ≫. Les entiers 1, 2, 3, etc., forment une suite, les carrés 1, 4, 9, etc., également, ou encore 1, -1, 1, -1, etc., où on alterne le signe de 1.

Leur simplicité dans le concept permet des applications innombrables dans tous les domaines des mathématiques, par exemple quand on réitère une opération un certain nombre de fois (la suite répertorie alors l'avancement de l'opération à chaque étape) ; ainsi est-il important de développer une théorie sur les suites. À ce stade, je parlerai uniquement des suites à valeurs réelles ou complexes.

Ce cours ne sert pas à grand chose à lui seul, il sert à compléter des connaissances qui seront utilisées ailleurs. Il englobe tout ce qui est vraiment utile pour un niveau de licence, il peut paraître long mais constitue une base solide qui n'aura pas besoin d'être réalimentée.

1 Ce que vous devez savoir

1.1 Notations, Vocabulaire

J'introduis un peu de formalisme pour la suite, et fais des rappels de ce qui a normalement été vu au lycée. Pour ce qui est des notations, une suite est généralement notée $(u_n)_{n\geq 0}$ si on commence à l'étape 0, mais on peut aussi commencer à une autre étape, auquel cas on note $(u_n)_{n\geq 1}$, ou $(u_n)_{n\geq N}$, etc... u_n est ≪ le terme général ≫, un nombre pour tout n pour lequel la suite est définie. Alors, une suite fait correspondre à chaque entier un nombre. La suite des carrés se note donc $(u_n)_{n\geq 0} = (n^2)_{n\geq 0}$.

$\forall$ veut dire ≪ pour tout ≫, $\exists$ veut dire ≪ il existe ≫.

$\phi^n(u_0)$ désigne $\phi \circ \phi \circ \cdots \circ \phi(u_0)$ composée n fois, et de même pour le reste du cours. J'écrirai $\phi(u_0)^n$ le nombre $\phi(u_0)$ élevé à la puissance n.

Une suite complexe $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée si $(|u_n|)_{n\geq 0}$ (qui est une suite réelle) est bornée.

1.2 Résultats classiques

Je m'intéresse ici à quelques suites de référence, dont le terme à une étape donnée dépend du terme à l'étape précédente (c'est-à-dire définie par récurrence). Elles ne devraient pas être l'objet d'une étude approfondie, puisqu'elles sont a priori déjà vues. La démonstration des résultats se fait par récurrence, méthode adaptée puisque les suites sont justement définies par récurrence.

Proposition 1 *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par u_0 un complexe et $u_{n+1} = u_n + a$, alors $u_n = u_0 + n \cdot a$. Une telle suite est dite arithmétique.*

Heuristique : à une certaine étape, en réitérant :

$$u_n = u_{n-1} + a = u_{n-2} + \underbrace{a + a}_{=2a} = \cdots = u_0 + \underbrace{(a + a + \cdots + a)}_{=n\cdot a}$$

Proposition 2 *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par u_0 un complexe et $u_{n+1} = a \cdot u_n$, alors $u_n = a^n \cdot u_0$. Une telle suite est dite géométrique.*

On raisonne de la même manière pour ce résultat. Ces deux propositions sont l'occasion d'aborder un type de suite moins classique, souvent vue à titre d'exercice, qui combine les suites arithmétiques et géométriques (elles sont donc appelées arithmético-géométriques). Le résultat en lui-même n'est pas à retenir, seulement la méthode.

Proposition 3 *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par u_0 un complexe et $u_{n+1} = a\cdot u_n + b$ $(a \neq 1)$, alors $u_n = \frac{1-a^n}{1-a}b + a^n u_0$.*

Pour $b = 0$, on retrouve bien la formule donnée pour une suite géométrique.

METHODE : ceci est courant en mathématiques, il est souvent beaucoup plus facile de résoudre les équations dites ≪ linéaires ≫, c'est-à-dire en quelque sorte celles où, en considérant la somme de deux solutions, on obtient encore une solution de la même équation ; remarquer la ressemblance entre $y = a \cdot x$ (fonctions linéaires) et $u_{n+1} = a \cdot u_n$ (suites), $z' = a \cdot z$ (similitudes), $y' = a \cdot y$ (équations différentielles)... Mais dès qu'on ajoute quelque chose (on bascule dans le cas affine), ça se complique !

L'idée est alors de se ramener au cas linéaire en supprimant ce qui a été ajouté, le b ici. Mais je ne peux pas soustraire b sans raison dans l'équation. Alors, voici comment procéder : je considère une autre suite vérifiant l'équation, soit donc $v_{n+1} = a \cdot v_n + b$. Ainsi,

$$\begin{cases} u_{n+1} = a \cdot u_n + b \\ v_{n+1} = a \cdot v_n + b \end{cases} \text{ implique } u_{n+1} - v_{n+1} = a \cdot (u_n - v_n)$$

en soustrayant les deux équations. Alors, $(u_n - v_n)_{n \geq 0}$ vérifie la relation de récurrence d'une suite géométrique, donc $u_n - v_n = a^n(u_0 - v_0)$, si bien que $u_n = v_n + a^n(u_0 - v_0)$.

Ceci vaut pour toute solution $(v_n)_{n \geq 0}$ trouvée, donc on peut prendre la plus simple possible qui marche, à savoir une suite constante. Si $v_n = \omega$ pour tout n, alors $\omega = a \cdot \omega + b$ est vérifié pour (on résout) $\omega = \frac{b}{1-a}$ (ah, c'est pour ça que nos profs nous faisaient introduire cet ω sans qu'on sache pourquoi !). Bref, $u_n = \frac{b}{1-a} + a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)$, qu'on peut réecrire sous la forme ci-dessus en factorisant.

Il est intéressant de voir que cette méthode se généralise à bien d'autres situations. Par exemple, je vous propose de trouver l'expression d'une solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$, d'une similitude donnée par $z' = az + b$, d'une équation fonctionnelle $f = Tf + g$ d'inconnue f, où $Tf(x) = \frac{f(bx)}{b^a}$ pour tout x (a et b sont des réels non nuls). Pour ce dernier exemple, on trouve une somme infinie dont l'existence n'est pas à prouver dans le cadre de ce cours.

Sans utiliser de méthode, on trouve $u_n = a \cdot u_{n-1} + b = a(a \cdot u_{n-2} + b) + b = a^2 u_{n-2} + ab + b = \underbrace{a^2(a \cdot u_{n-3} + b) + ab + b}_{a^3 u_{n-3} + a^2 b + ab + b} = \cdots = a^n u_0 + b(a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1)$ (ce résultat n'a pas l'avantage de s'appliquer dans d'autres situations). Cette expression est également vraie, car :

Proposition 4 *Si $a \neq 1$, alors $1 + a + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ (rappel : $a^0 = 1$). Si $a = 1$, c'est l'évidence même.*

Heuristique : L'idée est que si $u_n = 1 + a + \cdots + a^n$, on peut réussir à définir $(u_n)_{n \geq 0}$ par récurrence : $u_n = 1 + a(1 + a + \cdots + a^{n-1}) = 1 + a \cdot u_{n-1}$. On se retrouve dans le cas précédent avec $b = 1$. On peut aussi se passer des suites arithmético-géométriques (peu populaires) en remarquant que u_n est aussi égal à $u_{n-1} + a^n$. Alors, $1 + a \cdot u_{n-1} = u_{n-1} + a^n$, donc $u_{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$. Il existe bien d'autres façons de voir ce résultat, qui est *parmi les plus importants à retenir de la classe de Terminale* !

Bref, il est intéressant dès que possible d'exprimer une suite à l'aide d'une relation de récurrence, dépendant uniquement de l'étape précédente dans le meilleur des cas. Ceci permet, grace aux trois premières propositions, d'exprimer simplement u_n. Mais elles ne s'appliquent que pour a et b constants. Prenons l'exemple de $u_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$. On a $u_n = u_{n-1} + n$, et ici on ne peut pas utiliser les résultats précédents, puisque n n'est pas constant, à l'inverse des b présents avant. Si on essaye, on obtient des expressions vite démenties pour des valeurs particulières de n. On arrive tout de même à trouver une belle expression de u_n :

Proposition 5 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Le membre de droite est bien un entier, vu que soit n, soit $(n+1)$ est pair.

Preuve : je n'ai pour l'instant pas de méthode générale à proposer pour aborder cette suite. Si on sait sur quel résultat on doit tomber, on peut raisonner par récurrence, vu qu'on sait définir la suite par récurrence.

Une preuve amusante de ce résultat est connue historiquement parce que Gauss avait ainsi impressionné son professeur de mathématiques en calculant $1+2+\cdots+100$ en quelques secondes. Il s'agit de remarquer que

$$2u_n = (1+2+3+\cdots+n)+(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1) = (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1) = n(n+1)$$

On peut le voir géométriquement, en construisant des triangles à l'aide de carrés, comme à la maternelle, vous voyez le genre. $1+2+3+\cdots+n$ représente le nombre de carrés utilisés pour fabriquer un triangle de hauteur n (d'ailleurs, les valeurs de la suite u_n sont appelées les nombres triangulaires). En emboitant deux tels triangles, on obtient un rectangle, dont le nombre de carrés est $n(n+1)$.

J'estime qu'on a présenté ici assez de résultats classiques. Les autres résultats classiques sur les suites (calculer $u_{n+1} - u_n$ pour connaitre les variations, limites de sommes, produits, inverses de suites) me semblent indignes de rappel. Hormis ceci, concernant la convergence ou divergence d'une suite (rappel : qu'une suite diverge ne veut pas dire qu'elle a une limite infinie, ceci veut dire qu'elle ne converge pas, donc peut ne pas avoir de limite du tout, comme $((-1)^n)_{n\geq 0}$) :

Proposition 6 *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante majorée, alors elle converge.*

Ou plus généralement : si une suite est monotone et bornée, alors elle converge. Plus généralement, une suite croissante converge ou tend vers $+\infty$.

2 Théorèmes de convergence

Comme cela a été dit précédemment, les suites apparaissent très naturellement dans beaucoup de domaines : par exemple, on peut construire une suite en réitérant une opération qu'on représente ici par une fonction ϕ ; alors, $u_{n+1} = \phi(u_n) = \phi^n(u_0)$ pour tout n. Ou encore, on peut définir une suite dès que l'on dispose d'un nombre infini de points, en les ordonnant arbitrairement, espérant ainsi exhiber une quelconque règle gouvernant ces points. Enfin, et la liste des applications est encore longue, on sait (?) qu'on peut par exemple approcher des réels par une suite de nombres rationnels. Par ce genre d'astuces, on peut espérer qu'une propriété vérifiée par une classe n°1 de nombres peut être transportée à une classe n°2 de nombres en approchant la classe n°2 par la classe n°1 grâce à une suite.

Alors, ces quelques exemples peuvent motiver la question de la limite d'une suite, élément essentiel de la compréhension du comportement d'une suite. Je présente d'abord un résultat qui permet de conclure qu'une suite réelle converge sans même avoir d'idée sur la nature de la limite ; c'est un résultat d'existence uniquement, mais ça ne se sous-estime pas, souvent c'est la seule chose qu'on cherche ! Ensuite, je donne un résultat qui fait la paire, puisqu'il permet de bien exploiter les suites pour avoir l'existence de solutions à certains problèmes, et les approcher, ceci étant suivi d'un résultat qui permet d'avoir des résultats probants même quand ça ne converge pas. Pour éviter de naviguer dans le flou, je donne des résultats plus classiques qui complètent l'étude de la convergence des suites, et des exemples de suites.

2.1 Suites de Cauchy

Si on ne connait pas la limite (finie) d'une suite, on se rend bien compte qu'on peut tout de même se douter qu'elle existe dès que l'écart entre deux termes, aussi éloignés qu'on veut, devient de plus en plus petit. Pour les suites réelles ou complexes, l'intuition ne nous trompe pas : si l'écart diminue de plus en plus entre des termes, alors la suite se rapproche d'une certaine valeur qui sera la limite. Je formalise ceci :

Définition 1 *On appelle suite de Cauchy une suite d'éléments tels que :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad ; \quad \forall n > N \quad \forall p > 0 \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$$

Sens de la définition ? On peut toujours se débrouiller pour avoir n et m assez grands (ici on note $m = n + p$), disons supérieurs à un certain N (il est là pour définir le « assez grand »), de sorte que l'écart entre le terme u_n et le terme u_m soit plus petit qu'un nombre arbitrairement petit (le ε). En d'autres termes, tous les termes ne s'écartent pas trop les uns des autres à partir d'un certain rang. À comparer avec :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad ; \quad \forall n > N \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

qui veut dire qu'on pourra toujours trouver n assez grand de sorte que l'écart entre les u_n et le nombre noté l soit assez petit. Ceci est la traduction du fait que u_n a l comme limite.

DANGER : Le fait qu'une suite soit de Cauchy *NE se traduit PAS* par : $u_{n+p} - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini pour tout p. Ceci s'écrirait formellement $\forall p > 0 \quad \forall \varepsilon \ldots$ (ici, N dépend de p, alors que pour une suite de Cauchy ce n'est pas le cas). Un contre-exemple facile à retenir est $(u_n)_{n \geq 1} = (\ln(n))_{n \geq 1}$. On a en effet $u_{n+p} - u_n = \ln\left(1 + \frac{p}{n}\right) \to 0$ quand $n \to \infty$. Or $(\ln(n))_{n \geq 1}$ ne converge pas, n'est même pas borné. En fait, en prenant un écart « petit », deux termes consécutifs, ça tend effectivement vers 0, mais si on considère $\ln(2n) - \ln(n) = \ln(2)$, la différence ne tend plus du tout vers 0, et cette différence mesure « à quel point » la suite ne converge pas. Pour montrer qu'une suite est de Cauchy, il y a deux solutions pratiques :

- Montrer que la définition est vérifiée, à la main.
- Montrer que pour tout p, $|u_{n+p} - u_n| \leq \alpha_n$, avec $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite indépendante de p qui tend vers 0.

Pour les suites réelles et complexes, ce résultat est primordial :

Théorème 1 *Si une suite réelle ou complexe est de Cauchy, alors elle est convergente.*

Heuristique : ce résultat découle du fait qu'une suite bornée peut devenir convergente, pourvu qu'on lui enlève des points (éventuellement une infinité) ; on dit d'une telle suite qu'elle a une *valeur d'adhérence* (ne vous inquiétez pas pour la définition précise, ça arrive plus tard). Et une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence ne peut que s'approcher de cette valeur d'adhérence, qui est donc candidate à la limite. Il suffit donc de montrer qu'elle est bornée (ce qui se pressent). Or pour $\varepsilon = 1$ (par exemple), on a pour N assez grand et tout p : $|u_{N+p} - u_N| \leq 1$, donc $|u_{N+p}| \leq 1 + |u_N|$. Donc la suite est bornée par le plus grand des termes pris parmi les N premiers et $1 + |u_N|$.

Alors, comme dit en introduction, on peut prouver l'existence de limites d'une suite sans même avoir la moindre idée de la limite potentielle, et c'est là la puissance des suites de Cauchy. On peut aussi partir d'une suite convergente, et en tirer des conclusions en utilisant le fait qu'elle est de Cauchy (car ça marche aussi dans ce sens). Je donne des exemples dès maintenant, mais ces suites serviront aussi pour le théorème suivant.

Exemple, une autre * démonstration du théorème des segments emboités : je veux montrer que si je considère une suite de segments emboités (c'est-à-dire qu'ils sont inclus les uns dans les autres), dont la longueur tend vers 0 à l'infini, alors il existe un point présent dans tous ces segments à la fois.

L'idée qui vient donc à la base est de prendre un point qui est dans le premier segment que j'appelle S_1, un second qui est dans le second, noté S_2 (donc il est aussi dans S_1, puisqu'ils sont inclus les uns dans les autres), et ainsi de suite. S'il n'y avait qu'un nombre fini de segments, ce procédé montrerait superficiellement que le résultat est vrai. Le problème est qu'ainsi on ne s'arrête jamais. On aimerait aboutir à une sorte de $\ll S_\infty \gg$, après avoir réitéré l'opération à chaque étape n dans le segment S_n, donc une infinité de fois. C'est là que les suites de Cauchy s'imposent, pour démontrer un résultat d'existence limite, même si ce qu'on exhibe n'est pas une sorte de $\ll S_\infty \gg$ comme promis. Si j'appelle $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que u_n est dans S_n, donc également S_{n-1}, etc., S_1, il serait intéressant qu'elle soit de Cauchy, car dans ce cas elle a une limite l. Alors, $u_{n+p} \in S_n$ pour tout p donne, quand $p \to \infty : l \in S_n$ †. Ceci valant pour tout n, l est dans tous les segments, ce qui est le point demandé. Et elle est effectivement de Cauchy, car l'écart entre deux termes quelconques est majoré par la taille du segment commun aux deux termes, qui tend vers 0 indépendamment de p.

L'idée selon laquelle on fait tendre p vers l'infini dans une situation quelconque après avoir exhibé la limite est courante, et fait partie des idées phares à retenir de ce cours. On reverra un tel usage par la suite.

2.2 Etudes de $u_{n+1} = f(u_n)$, théorèmes du point fixe

Pour l'instant on a étudié la convergence de suites simples, notamment de suites vérifiant $u_{n+1} = f(u_n) = f^2(u_{n-1}) = \cdots = f^n(u_0)$ pour tout n, où $f\ : x \mapsto a \cdot x + b$ est difficilement plus simple pour une première approche.

Mais que se passe-t-il si j'étudie des suites plus compliquées, par exemple une suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$, ou $u_{n+1} = 1 - u_n^2$? La première question est celle de la convergence.

Pour avoir une idée de la direction dans laquelle partir, remarquons que si f a une régularité raisonnable (comme continue), alors le fait que $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ tende vers l induit que $l = f(l)$ a priori. En d'autres termes, f a un *point fixe*. On a donc une piste pour déduire la convergence d'une telle suite : les points fixes de f... Pourvu que ça marche dans les deux sens. C'est le but de ce sous-paragraphe.

Mais d'abord, je dois élucider le passage de $u_n \to l$ à $f(u_n) \to f(l)$:

Proposition 7 *(Caractérisation séquentielle de la limite) Soit f définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$, et a dans I. Alors*

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \text{pour toute suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ qui tend vers } a,\ (f(u_n))_{n\geq 0} \text{ tend vers } f(a)$$

Comme cette proposition a un nom, vous vous doutez qu'elle a une certaine importance, même si on y pense rarement dans le sens $\Leftarrow$.

*. Je dis bien une *autre* démonstration, parce qu'il existe une preuve classique utilisant les suites adjacentes, et cruciale : en effet, pour montrer qu'une suite de Cauchy converge, on a besoin du théorème des segments emboités... Je ne peux donc pas, *a priori*, le démontrer en utilisant le fait qu'une suite de Cauchy converge !

†. Ceci marche car dans un segment, la limite d'une suite ne peut pas en sortir, ce qui n'est pas le cas dans un intervalle ouvert

Heuristique : pour $\Rightarrow$, si $u_n \to a$, on a alors $|u_n - a| \leq \alpha$ pour n assez grand. Alors, par définition de la continuité, en prenant le bon α, on trouve, pour ces mêmes n, que $|f(u_n) - f(a)| \leq \varepsilon$, ce qu'on voulait démontrer.

$\Leftarrow$ est, on s'en doute, plus compliqué. Le lecteur en exercice tentera de démontrer ce point par l'absurde ou par contraposée, après avoir vu la méthode des exemples 1 et 3 dans la partie ≪ Théorème de Bolzano-Weierstrass ≫ (même si cette proposition ne nécessite pas ce gros théorème).

Donc, si $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n et $u_n \to l$, on a effectivement $l = f(l)$. Mais c'est surtout les réciproques qui nous intéressent. La plus intéressante (à notre niveau du moins) est de loin celle-ci :

Théorème 2 *(Théorème du point fixe de Banach) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$. Si f est contractante**, *alors f admet un point fixe, et il est unique. De plus, si une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors elle a pour limite ce point fixe.*

Heuristique : l'introduction de cette partie a montré qu'on sait bien passer de la convergence de la suite à l'existence d'un point fixe. C'est ce qui se cache derrière tout ça. La seule méthode possible ici pour montrer qu'une suite définie par f est convergente est de montrer qu'elle est de Cauchy ; que f soit contractant fait l'affaire.

Preuve : soit une telle suite. Alors $|u_{n+p} - u_n| = |f(u_{n+p-1}) - f(u_{n-1})| \leq k|u_{n+p-1} - u_{n-1}|$. On réitère autant que possible, ce qui fournit $|u_{n+p} - u_n| \leq k^n |u_p - u_0|$.

Ceci n'est pas satisfaisant, car on a encore u_p. Par contre, si à la place de u_{n+p} on avait eu u_{n+1}, l'inégalité aurait fait apparaitre uniquement u_1 et u_0 : $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.

Alors, par l'inégalité triangulaire :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n|$$

$$\leq \underbrace{(k^{n+p} + k^{n+p-1} + \cdots + k^n)}_{=k^n(k^p + \cdots + 1)} |u_1 - u_0| = k^n \frac{1 - k^{p+1}}{1 - k} |u_1 - u_0|$$

Alors, $|u_{n+p} - u_n| \leq k^n \frac{1}{1-k} |u_1 - u_0|$, majoration indépendante de p qui tend vers 0 quand $n \to \infty$ †. Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy et converge vers une limite l.

Le fait que f soit contractante implique f continue (la définition de la continuité est vérifiée en prenant $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$), donc $f(l) = l$, d'où le résultat. L'unicité découle du fait que f soit contractante, appliqué à deux éventuels points fixes ‡. $\square$

Quelques remarques qui ont leur importance, surtout celle-ci : on a même une majoration de l'écart entre la suite et la limite, qui est proportionnel à k^n (décroissance rapide) ; si $p \to \infty$ (je vous avais dit que ce serait pratique de faire ça) dans l'inégalité de Cauchy ci-dessus, alors

$$|l - u_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |u_1 - u_0|$$

Parfois, f n'est pas contractante, mais itérée un certain nombre de fois, f^p l'est. Alors, il est formidable de savoir que sous telle condition, f vérifie les conclusions du théorème sans en vérifier l'hypothèse. Ceci est à démontrer à titre d'exercice (le point fixe de f^p est bien évidemment l'unique point fixe de f également). Ce n'est pas facile,

*. C'est-à-dire : il existe $k < 1$ tel que pour tous x, y, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$
†. Car $0 < k < 1$, c'est un des endroits où c'est décisif.
‡. Là aussi, en fait.

et nécessite la division euclidienne pour montrer la convergente d'une suite vers le point fixe.

L'énoncé peut être amélioré si I est un segment, mais la démonstration est plus difficile : on peut supposer $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, voire $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ (mais là, on perd l'unicité). On pourra aborder ça dans les exercices de topologie.

Le meilleur moyen d'obtenir l'inégalité de contraction est d'utiliser les accroissements finis (quand on les connait), pourvu que f' soit bornée.

Bien que ce théorème sera rarement utilisé en dehors des exercices de ce cours, il a une quantité incroyable d'applications, surtout dans le cadre des équations différentielles. J'attirerai l'attention sur ses applications par la suite.

Un autre théorème, plus modeste, qui ne garantit pas l'unicité du point fixe ni la convergence d'une suite vers ce point fixe, est à connaitre et à savoir démontrer :

Théorème 3 *Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe.*

Heuristique : un dessin permet de susciter l'évidence, en traçant $y = x$ et le graphe de f, lesquels se coupent en un point au moins. La démonstration nécessite le théorème des valeurs intermédiaires.

Ce théorème est également vrai si on remplace $[a, b]$ par un disque, une sphère, une hypersphère, mais la démonstration n'a plus rien à voir et est très difficile. On le connait sous le nom de théorème du point fixe de Brouwer.

Malgré l'existence des points fixes, on ne sait pas si une suite définie à l'aide de f converge vers ces points fixes ou non. Il suffit de prendre l'exemple d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $f : \begin{cases} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{cases}$ (convergence vers 0), $f : \begin{cases} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 1-x \end{cases}$ (ne converge pas vers 1/2, diverge), $f : \begin{cases} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ (ne converge pas vers 1, converge vers 0), et enfin $f : \begin{cases} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & a \cdot x(1-x) \end{cases}$ (peut converger vers 0 ou $\frac{a-1}{a}$, ça dépend de $a > 0$!)... Les exemples sont multiples. Il existe heureusement un résultat, dans le cas où la fonction est dérivable de dérivée continue, qui tranche la question. La démonstration fera l'objet d'un exercice du cours.

Proposition 8 *Si f dérivable de dérivée continue*[§] *admet un point fixe a, alors, en notant $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$:*

- *(Points attractifs) si $|f'(a)| < 1$, il existe un intervalle J contenant a tel que si u_0 est dans cet intervalle, $u_n \to a$ quand $n \to \infty$.*
- *(Points répulsifs) si $|f'(a)| > 1$, il existe un intervalle J contenant a tel que la suite finisse par sortir de J (donc $(u_n)_{n \geq 0}$ ne peut pas converger vers a). Sauf si $u_0 = a$.*
- *si $|f'(a)| = 1$, tout peut arriver.*

S'il existe un unique point fixe attractif, alors la suite converge vers ce point fixe peu importe où se trouve u_0 : l'intervalle J correspond à tout le domaine de définition.

Par contre, f peut ne pas être continûment dérivable (situation terriblement rare), ou bien on peut se retrouver dans le cas critique $|f'(a)| = 1$. Dans ce cas, une dernière chance pour s'en sortir, qui est une proposition moins salvatrice que tout ce qui précède :

§. On dit aussi : continûment dérivable, ou de classe $\mathcal{C}^1$

Proposition 9 *Si f est croissante sur $[a, b]$ et admet au moins un point fixe, alors une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone et converge vers un point fixe de f sur $[a, b]$.*

Si f est décroissante sur $[a, b]$, alors f a une unique point fixe dans $[a, b]$, et les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont monotones de sens contraires et convergent vers des points fixes de $f^2 = f \circ f$ dans $[a, b]$.

Heuristique : dans le cas croissant, ceci découle directement que si f est croissante et $u_n \leq u_{n+1}$, alors $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. On l'aura compris, ça se traite donc par récurrence, comme presque toutes les démonstrations qui concernent les suites récurrentes. C'est u_0 et u_1 qui déterminent le sens de variation de la suite. La suite étant monotone et bornée, elle converge, et ce vers un point fixe par passage à la limite (vu et revu).

Dans le cas décroissant, le fait que le point fixe soit unique se voit bien graphiquement, et permet de bien comprendre pourquoi ça ne marche pas avec f croissante. En gros, si $f(a) = a$, comme f diminue et que $x \mapsto x$ augmente, les deux graphes ne prennent plus la même direction et ne se croiseront plus. Formellement, c'est l'étude de $x \mapsto x - f(x)$ qui révèle ça. L'introduction des suites qui prennent un terme sur deux provient du fait que si f est décroissante, f^2 est croissante (le vérifier), donc la suite $(v_n)_{n\geq 0} = (u_{2n})_{n\geq 0}$ vérifie le premier cas avec $f \circ f$ au lieu de f. On a bien $v_{n+1} = f(u_{2n+1}) = f^2(u_{2n}) = f^2(v_n)$. De même pour la suite des termes impairs. Ce qui conclut l'heuristique !

Le dernier point est guère satisfaisant, et on aimerait ne pas avoir à utiliser ceci tant que possible. Heureusement, c'est rarement utile.

Ceci clôt (presque) l'étude des suites récurrentes d'ordre 1 (le nom donné aux suites dont on parle depuis tout à l'heure), pour le moment. So simple ? En fait, pas forcément. L'exemple de $u_{n+1} = \sin(u_n)$ nous montre que le cas critique se présente ($\sin(0) = 0$, et $\sin'(0) = \cos(0) = 1$). Dans ce cas, il faut réussir à montrer que la suite converge par d'autres moyens, et si elle converge alors on est certain que c'est vers un point fixe de sin (ici le point fixe est unique, c'est 0). En bref, voici THE méthode pour étudier une suite récurrence d'ordre 1 :

METHODE :

- Trouver un intervalle I stable, c'est-à-dire tel que $f(I)$ est inclus dans I. On peut alors écrire $f\ : I \to I$... Nécessaire pour que la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ soit bien définie. En effet, si u_{n+1} n'appartient plus à un domaine de définition de f, comment écrire $f(u_{n+1})$ et donner un sens à u_{n+2} ? Il peut y avoir plusieurs intervalles stables (prendre l'exemple de $f\ : x \to \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$), à étudier chacun de son côté.
- Chercher les points fixes de f, qui sont les seuls candidats possibles pour la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$, si limite il y a.
- Montrer, à l'aide des propositions ci-dessus (théorème du point fixe de Banach, autres propositions...), que la suite est convergente ou divergente. Si aucune de ces propositions n'est applicable, comme dans le cas de $u_{n+1} = \sin(u_n)$, on doit utiliser des méthodes plus classiques, comme par exemple le fait que la suite est monotone bornée, pour montrer que la suite converge... Pour déterminer le sens de variation, on peut avoir besoin de l'étude de $x \mapsto x - f(x)$, souvent peu efficace et facile à éviter. Remarquer que $f(l) = l$ et comparer $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)|$ peut être décisif.
- On s'occupe des intervalles non stables, en espérant que le second ou troisième terme d'une suite dont le terme initial est dans ces intervalles finisse dans un

intervalle stable. Alors, l'étude est la même.

Vous pouvez étudier les cas faciles (f contractante, valeur absolue de la dérivée inférieure à 1...) sur des exemples simples que vous créez ou dans les exercices. Je vous propose quelques exemples concrets pour éclairer la situation.

Exemple 1, $u_{n+1} = \sin(u_n)$: je suis servilement la méthode donnée.

- pour tout x, $\sin(x) \in [-1, 1]$. Un intervalle stable naturel de la fonction est donc $[-1, 1]$. Comme sin est impaire, je peux même me limiter à $[0, 1]$ en sachant que la situation est identique sur $[-1, 0]$. On a donc $\sin\ : [0, 1] \to [0, 1]$.
- $\sin(x) = x$ a pour unique solution $x = 0$. C'est donc l'unique point fixe de sin (l'existence aurait pu découler des cas ≪ faibles ≫ du théorème du point fixe de Banach, que j'ai cités mais n'ai pas démontrés).
- Le théorème du point fixe de Banach n'est pas applicable, et on est dans le cas critique $\sin'(0) = 1$, damn ! On doit donc s'en sortir autrement. L'étude de $x \mapsto x - \sin(x)$ révèle que $x \geq \sin(x)$ pour tout x ¶ sur [0,1], donc $u_n \geq \sin(u_n) = u_{n+1}$ et la suite décroît. Étant minorée par 0, elle converge vers le point fixe unique de sin, donc $u_n \to 0$.
- Si $u_0 > 0$ n'est pas dans [-1,1], u_1 est dans [-1,1], donc on obtient le même résultat.

Exemple 2, $u_{n+1} = 1 - (u_n)^2$:

- Si on fait un tableau de variations de $f\ : x \mapsto 1 - x^2$, on s'aperçoit que f est décroissante sur l'intervalle *stable* [0,1]. On a donc $f\ : [0, 1] \to [0, 1]$.
- $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = c$ (l'autre racine n'est pas dans [0,1]).
- $f'(x) = -2x$, et $|f'(c)| = -1 + \sqrt{5} > 1$. Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $u_0 = c$. Si on ne sait pas que $-1 + \sqrt{5} > 1$ ‖, on peut s'amuser à étudier f^2, puisque f est décroissante... D'ailleurs je vous invite à le faire. Vous comprendrez en quoi on espère se passer de cette étude tant que possible.
- Si u_0 n'est pas dans [0,1], ça se complique un peu ! On ne peut pas exclure l'autre point fixe de f, à savoir $d = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Je vous invite à étudier les cas selon la position de u_0 par rapport à d, 0 (le cas $u_0 > 1$ pouvant se ramener à un cas précédent). Si $u_0 < d$, on remarque que $f(x) < x$, ce qui donne le sens de monotonie de la suite. Si la suite converge, c'est vers un point fixe, et on remarque que dans ce cas, ce n'est pas possible. Si $u_0 = d$, il y a rien à dire, et si $d < u_0 < 0$, remarquer qu'on peut se ramener au premier cas (on peut aussi calculer la dérivée en d pour savoir s'il y a la moindre chance que la suite converge vers d).

Exemple 3, $u_{n+1} = u_n - \sin(u_n)$:

- $f\ : x \mapsto x - \sin(x)$ est stable sur $[0, 2\pi]$, et croissante. En fait, on pourrait prendre n'importe quel intervalle de définition ici, mais l'étude est similaire partout ailleurs.
- Les points fixes sont au nombre de trois, ils correspondent aux points où sin s'annule (0, π, 2π).
- $|f'(\pi)| = 2 > 1$, donc π est un point répulsif. $|f'(0)| = |f'(2\pi)| = 0 < 1$, donc 0 et 2π sont des points attractif ∗∗. On peut se demander vers quel point ça devrait

---

¶. Ceci découle en particulier de la concavité du sinus, voir le chapitre sur les fonctions convexes qui permet d'autres inégalités du même goût avec exp, ln...

‖. Ce qui se voit pourtant, vu que $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$

∗∗. quand la dérivée est nulle, on parle même de point super-attractif... Essayez avec une calculatrice pour voir, ça converge très vite !

converger alors. En étudiant le signe de $x \mapsto x - f(x) = \sin(x)$, on s'aperçoit que si u_0 est dans $[0, \pi[$, la suite décroît, donc sa limite doit être 0. Si u_0 est dans $[\pi, 2\pi[$, la suite croît et tend vers 2π.

2.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Il s'avère malheureusement que les suites ne sont pas toutes convergentes, loin de là. Mais parfois, en enlevant des termes d'une suite, on peut réussir à obtenir une suite qui est convergente, ce qui n'enlève rien à la justesse d'un raisonnement. Par exemple, dans l'exemple du théorème des segments emboités, si on avait enlevé des points à la suite pour la rendre convergente le raisonnement aurait encore fonctionné, Dieu merci on n'a pas eu à le faire. On va donner un nom à ces limites potentielles obtenues en enlevant des points de la suite.

Définition 2 *On appelle valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ une valeur qu'on peut approcher par des u_n pour n aussi grand que désiré. Formellement si l est une valeur d'adhérence :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N > 0 \quad \exists n > N \quad |u_n - l| \leq \varepsilon\,^*$$

La SEULE façon de décrire ce phénomène sera de dire, en pratique, qu'il existe $\varphi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \to l$ quand $n \to \infty$. $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est une *sous-suite* de $(u_n)_{n\geq 0}$, c'est-à-dire une suite pour laquelle on a gardé que les valeurs de n correspondant à celles données par $\varphi(n)$ (φ est appelé une extractrice). Par exemple, si $u_n = (-1)^n$, $\varphi(n) = 2n$ donne $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ pour tout n, et $\varphi(n) = 2n+1$ donne $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ pour tout n.

Il est clair que si une suite converge vers une limite l, il en est de même de toutes ses sous-suites. Alors, si une suite a deux valeurs d'adhérence ou plus, elle est divergente. C'est le cas par exemple de la suite donnée ci-dessus, qui a 1 et -1 comme valeurs d'adhérence.

Il est bon de remarquer qu'une extratrice tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, et $\varphi(n) > n$ pour tout n. Voici le résultat (fondamental) au sujet des valeurs d'adhérence :

Théorème 4 *(Bolzano-Weierstrass) Toute suite réelle bornée a au moins une valeur d'adhérence.*

Heuristique : cette démonstration mérite d'être faite proprement. L'idée est que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ concernée est à valeurs dans $[a, b]$, elle a nécessairement une infinité de valeurs soit dans $[a, (a+b)/2]$, soit dans $[(a+b)/2, b]$, ou dans les deux éventuellement. Alors, on peut supprimer tous les points de celui qui a un nombre fini de points le cas échéant, sinon on garde la première moitié de segment (par exemple). Et on réitère le raisonnement sur ce morceau restant de segment, et ainsi de suite. Au bout du procédé (infini), la suite est coincée dans un étau minuscule qui contient une valeur d'adhérence.

Quelques personnes bien réveillées, ou qui ont réussi à avoir du recul sur le cours, ont dû se dire ≪ pour passer de la répétition du procédé qu'on ne peut faire qu'à la main au résultat à l'infini, on doit exhiber une suite de Cauchy ≫, et ces gens-là ont raison. Ça marcherait. Mais on a déjà établi un résultat au sujet des segments qui s'emboitent en exemple, et on l'utilisera directement.

$*$. Remarquez la différence et ressemblance avec la notion de convergence vers l.

Preuve : on va formaliser tout ça pour conclure, et expliquer en quoi ce théorème est la quintessence de l'épique.

Soit $I_1 = \{n \quad | \quad a \leq u_n \leq \frac{a+b}{2}\}$ (l'ensemble des indices pour lesquels u_n est dans la première moitié du segment) et $J_1 = \{n \quad | \quad \frac{a+b}{2} \leq u_n \leq b\}$ (même principe). Comme $I_1 \cup J_1 = \mathbb{N}$ et qu'il y a une infinité d'entiers, l'un des deux est infini. Si I_1 est infini, on le prend, sinon on opte pour J_1 (on note K_1 le choix). On note alors a_1 et b_1 les extrêmités du segment choisi, et on note $I_2 = \{n \quad | \quad a_1 \leq u_n \leq \frac{a_1+b_1}{2}\}$, $J_1 = \{n \quad | \quad \frac{a_1+b_1}{2} \leq u_n \leq b_1\}$, on répète le procédé (l'union a encore une infinité d'éléments).

Bref, supposons avoir construit pour tout n des I_n, J_n comme précédemment, en ayant choisi chaque fois un des deux, en le baptisant K_n. Les K_n sont emboités, et la longueur du segment est à chaque fois divisée par 2, donc tend vers 0. Par le théorème des segments emboités (Exemple 3 Chapitre 2.1), il existe un élément γ qui soit commun à tous ces segments (en d'autres termes, puisqu'il faut tout de même habituer au formalisme : $\gamma \in \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$)

Alors, en notant $\varphi(1)$ un élément quelconque de K_1, $\varphi(2)$ un élément supérieur à $\varphi(1)$ de K_2 (il en existe, car K_2 a une infinité d'entiers et est donc non borné), et de manière générale $\varphi(n)$ un élément supérieur à $\varphi(n-1)$ dans K_n, on construit une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ fort intéressante. En effet, d'après notre esquisse préliminaire, cette sous-suite va sûrement converger vers γ. Et c'est bien le cas, puisque $|u_{\varphi(n)} - \gamma| \leq$ longueur$(K_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc γ est une valeur d'adhérence. $\square$

Ce raisonnement s'étend au cas des suites complexes via une petite parade ; si une suite complexe est bornée, sa partie réelle et sa partie imaginaire également. Elles ont donc toutes les deux une valeur d'adhérence. En composant les extractrices correctement (attention, ce n'est pas si simple !), on peut en déduire que la suite complexe a également une valeur d'adhérence.

A partir de maintenant doit donc commencer une chasse aux suites bornées. En effet, la différence entre une suite bornée et une suite convergente est infime, une suite bornée converge « presque », en ce sens qu'en gardant seulement des termes intéressants on obtient une suite convergente, ce qui permet d'utiliser les mêmes raisonnements qu'avec une suite convergente. Il est vital que ce soit la première ou deuxième chose qui vienne à l'esprit dans un problème qui fasse intervenir des suites ; et si le problème ne fait pas intervenir des suites, il faut faire en sorte que si.

Exemple 1, théorème de Heine : la notion de continuité uniforme, qui était historiquement la première notion de continuité étudiée, est propre aux fonctions qui ne se permettent pas des écarts trop forts ; la définition de la continuité en un point a pour une fonction f est :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad ; \quad |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

En d'autres termes, $x \to a$ implique $f(x) \to f(a)$ (ce qui n'est pas le cas de la fonction partie entière en 1, par valeurs inférieures, par exemple). Le α dépend ici de a, et ce n'est pas le cas pour la continuité uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad ; \forall x, y \quad |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

La continuité uniforme a de l'intérêt, par exemple, pour gérer les différences $|f(x) - f(y)|$ dans les cas où on ne sait rien du tout sur f, en se débrouillant pour prendre x et y proches. On va montrer que si f a comme intervalle de départ un SEGMENT, alors f continue implique f uniformément continue (énorme !).

METHODE : Ce genre de résultats est vraiment très très difficile à montrer ainsi ; je parle des résultats du style

$$\forall a \quad \exists b \quad \ldots \quad f \text{ vérifie cette inégalité}$$

Le mieux est de raisonner par l'absurde en supposant que le résultat auquel on veut aboutir est faux. La proposition devient alors

$$\exists a \quad \forall b \quad \ldots \quad f \text{ ne vérifie pas toujours cette inégalité}$$

Alors, puisque f ne vérifie pas cette inégalité en certains points pour chaque b choisi, on choisit en particulier (faire un choix est souvent ce qui bloque un élève, malheureusement) des b dépendants de n, qu'on note donc b_n, pour lesquels des points x_n (voire davantage) vont mettre le résultat sur f en défaut. À présent on peut travailler avec la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ et essayer de la conduire à une contradiction. Ceci passe par un bon choix de b_n, qu'on ne fait pas toujours du premier coup.

Ici, on suppose (raisonnement par l'absurde) donc que f continue vérifie :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad ; \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists x, y \quad ; \quad |x - y| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

En particulier, pour $\alpha = 1$ il existe des x_1, y_1 qui mettent en défaut l'uniforme continuité, pour $\alpha = 1/2$ il existe des x_2, y_2 qui compromettent tout, etc., de manière générale on construit $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ de sorte que :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n, y_n \quad ; \quad |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

Comme $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée par le segment qui sert d'intervalle de départ de f, il existe une sous-suite convergente par le théorème de Bolzano-Weierstrass : $x_{\varphi(n)} \to l$ quand $n \to \infty$. Comme $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\phi(n)} \to 0$, on en déduit que $y_{\varphi(n)} \to l$ également. Mais alors, la continuité de f assure que $f(x_{\varphi(n)}) \to f(l)$ quand $n \to \infty$, de même pour $f(y_{\varphi(n)})$, ce qui est totalement impossible car $\underbrace{|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})|}_{\to 0} > \varepsilon$ pour tout n !

Par l'absurde, on a montré le résultat. Le lecteur en exercice montrera de même que pour une application f continue sur $[0, 1]$, pour ε *fixé*, on peut trouver un réel α tel que pour tous x, y dans $[0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \alpha(x - y)^2$, inégalité beaucoup moins utile † et qui nécessite un peu plus d'astuce, ici à titre d'exercice, pour voir si la méthode est saisie.

Exemple 2, solutions d'une équation différentielle : On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre suivant :

$$y'' + \alpha \cdot y' + \beta \cdot y = 0$$

où α et β sont des *fonctions* définies sur $[a, b]$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass va nous permettre de montrer, à l'aide du théorème de Rolle (voir le chapitre sur les fonctions dérivables), que toute solution non nulle de cette équation s'annule un nombre fini de fois sur $[a, b]$ (ce n'est pas toujours le cas : regarder l'équation différentielle $x^3 \cdot y'' + y = 0$, dont $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution). Il faut aussi savoir que comme

†. Pour être honnête, elle a un intérêt non négligeable, c'est de permettre la démonstration du théorème de Stone-Weierstrass : approximation uniforme par des polynomes d'une fonction sur un segment.

pour les équations linéaires du premier ordre vues en terminale, il y a unicité d'une solution à cette équation sous peu de conditions : il existe une unique solution qui vérife $y(a) = b$ et $y'(a) = c$.

Ce qu'on veut montrer revient à dire que l'unique solution à s'annuler une infinité de fois est la fonction nulle (qui est bien solution). Or dans le cadre de cette équation, cette fonction est entièrement caractérisée par le fait qu'elle et sa dérivée prennent la valeur 0 peu importe le point. Montrons donc que si une fonction s'annule une infinité de fois, elle et sa dérivée s'annulent simultanément en un point.

<u>METHODE :</u> Si j'ai affaire à une infinité de points, je peux les indexer (pas forcément tous, ce n'est pas toujours possible) pour en faire une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et alors faire appel à toute la théorie développée dans ce chapitre. Il est important de savoir faire appel aux théories mathématiques dès que possible, au lieu de se promener avec une information ≪ une infinité de zéros ≫ a priori inutilisable.

J'appelle donc $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de points où la solution s'annule, et je ne perds rien à les ranger dans l'ordre croissant. Alors, comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée car à valeurs dans $[a, b]$, il existe une sous-suite convergente (par commodité je l'appelle encore $(u_n)_{n\geq 0}$, mais il s'agit bien d'une sous-suite) qui a l comme limite, par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Par continuité, $f(u_n) \to f(l)$ quand $n \to \infty$. Cependant, $f(u_n) = 0$ pour tout n, donc $f(l) = 0$ par unicité de la limite. l semble donc être un bon point candidat pour lequel f et f' doivent prendre la valeur 0. Pour réussir à faire le lien avec f', une seule solution si on a vu les théorèmes sur la dérivabilité : le théorème de Rolle. En effet, entre chaque u_n et u_{n+1} il existe v_n tel que $f'(v_n) = 0$ par ce théorème. On a alors construit une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ qui, par théorème des gendarmes, converge vers l, et par continuité : $f'(v_n) \to 0$, et $f'(l) = 0$ encore une fois. Comme $f(l) = f'(l) = 0$, $f = 0$ par unicité de la solution, d'où le résultat.

Exemple 3, défaut de convergence d'une suite bornée :

Il a été montré ci-dessus qu'une suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence, donc converge presque. Je donne ici ce qui sépare une suite bornée d'une suite qui est réellement convergente. Ceci est mesuré par le nombre de valeurs d'adhérence. En effet, une suite bornée qui a une *unique* valeur d'adhérence converge.

<u>METHODE :</u> j'établis un raisonnement analogue à celui de l'exemple 1. En effet, si je raisonne par l'absurde et suppose qu'une telle suite diverge (dur de montrer directement que la suite tend bien vers sa valeur d'adhérence l, et on a ici aucune information possible sur les différences $u_{n+p} - u_n$), je peux m'intéresser à des termes particuliers qui mettent en défaut le résultat, et si je considère la sous-suite constituée uniquement de ces termes particuliers, je peux espérer aboutir à une contradiction.

Comme elle ne converge pas vers l, on écrit le contraire de ≪ $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l ≫, à savoir :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad ; \quad \forall N \quad \exists n \geq N \text{ et } |u_n - l| > \varepsilon$$

Je vais alors trouver une sous-suite constituée d'éléments vérifiant cette inégalité et qui, par Bolzano-Weierstrass, aura une valeur d'adhérence l', différente de l. Pour $N = 0$, il existe un entier $n \geq N$ tel que $|u_n - l| > \varepsilon$. Je pose $\varphi(0) = n$.

Pour $N = \varphi(0)+1$ [‡], il existe de même $n \geq N$ tel que $|u_n - l| > \varepsilon$. Je pose $\varphi(1) = n$.

Je continue ce procédé pour toutes les valeurs de φ, et la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ [§] étant bornée au même titre que $(u_n)_{n\geq 0}$, elle admet par le théorème de Bolzano-Weierstrass une valeur d'adhérence l'. $l' \neq l$, car $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ vérifie $|u_{\varphi(n)} - l| > \varepsilon$ pour

‡. Je fais ce choix pour avoir φ strictement croissante, il s'agit alors bien une extractrice.

§. Le n ici écrit n'a rien à voir avec le n qui apparait juste au dessus, soyons d'accord tout n, donc par passage à la limite $|l' - l| \geq \varepsilon > 0$. Or j'ai supposé qu'il y en avait qu'une seule, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Le but de la manoeuvre, à savoir créer une sous-suite constituée uniquement de points qui vérifient $|u_n - l| > \varepsilon$, permet le passage à la limite qui induit une contradiction. Ceci n'aurait pas été possible avec la suite de départ, comme on peut s'en convaincre en essayant.

Ces trois exemples font partie intégrante du cours et DOIVENT être travaillés, notamment sur le plan des méthodes qui sont à chaque fois riches d'applications transversales et révélatrices de la puissance du concept de suite, de la caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction, du théorème de Bolzano-Weierstrass... Le théorème de Heine refera son apparition dans d'autres chapitres.

3 Espace détente et résumé

Pour respirer un peu après toute cette théorie, on se lance dans des calculs pratiques. Vous l'avez bien mérité, pour être arrivé jusqu'ici !

3.1 Suites récurrentes

Pour l'instant, seule le calcul explicite des suites récurrentes définies par $u_{n+1} + a \cdot u_n = 0$ a été fait (en gros). Que se passe-t-il maintenant si on prend une suite définie par les deux termes précédents, par exemple $u_{n+2} + a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n = 0$, voire définie par les trois termes précédents, $u_{n+3} + a \cdot u_{n+2} + b \cdot u_{n+1} + c \cdot u_n = 0$?

Toutes ces suites suivent un schéma de résolution globalement identique que je vais présenter pour le cas $u_{n+2} + a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n = 0$. Les autres cas ne sont pas au programme, mais je donne une piste pour les comprendre.

Je présente tout ça en deux étapes :

- Pour toutes les suites qui vérifient $u_{n+1} + a \cdot u_n = 0$, la seule différence est le terme initial, u_0. On se doute que ce n'est pas pareil pour les suites qui vérifient $u_{n+2} + a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n = 0$, ne serait-ce que parce que u_2 dépend de u_0 et de u_1. *Il s'agit donc de constater qu'une suite est entièrement caractérisée par ses deux premiers éléments.*
- On cherchera des suites simples, « évidentes » qui vérifient la relation d'ordre 2, comme on dit. Alors, si pour a et b absolument quelconques on arrive à construire $u_n = f_{a,b}(n)$ avec $u_0 = a$ et $u_1 = b$, où $f_{a,b}$ est connue, le fait que u_n soit caractérisée par ses deux premiers termes assure qu'*une suite QUELCONQUE $(v_n)_{n\geq 0}$ vérifiera $v_n = f_{v_0,v_1}(n)$.*

Je promets, je vous l'offre. Voici la première étape :

Lemme 1 *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2, et $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$, alors les deux suites sont égales.*

Ceci se traite par récurrence, logique, puisqu'encore une fois les suites sont définies par récurrence.

Pour la seconde étape, je cherche donc $(u_n)_{n\geq 0}$ sous une forme simple. En m'inspirant du cas de la récurrence d'ordre 1, je vois que les solutions sont de la forme a^n, en gros. Je cherche donc des suites $(r^n)_{n\geq 0}$ qui conviennent. Si une telle suite est récurrente d'ordre 2, alors $r^{n+2} + a \cdot r^{n+1} + b \cdot r^n = 0$, d'où en simplifiant par r^n : $r^2 + a \cdot r + b = 0$.

Dans le cas $b \neq 0$ *, les r convenant se trouvent à l'aide d'une résolution classique d'une équation du second degré.

- Si $\Delta = a^2 - 4 \cdot b \neq 0$, il y a deux racines (éventuellement complexes),que je note r_1 et r_2, et alors $({r_1}^n)_{n\geq 0}$ et $({r_2}^n)_{n\geq 0}$ conviennent. Cependant, on voit bien qu'en prenant une seule de ces suites, on ne peut pas choisir deux premiers termes quelconques. L'idée est alors de voir que $(\lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n)_{n\geq 0}$ vérifie la même relation de récurrence, et pour λ et μ bien choisis la suite prend des valeurs a puis b quelconques pour $n = 0$ et $n = 1$ (le vérifier !)
  Alors, *toute* suite vérifiant la relation de récurrence s'écrit $u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n$ avec λ et μ solutions de $\lambda + \mu = u_0$, $\lambda r_1 + \mu r_2 = u_1$.
- Si $\Delta = 0$, ça se complique ! On trouve une unique racine r_0, qui ne suffit pas pour donner les deux conditions initiales. Mais en gardant à l'esprit tous les résultats précédents, on sent que u_n (terme général d'une suite vérifiant la relation de récurrence) est proportionnel à ${r_0}^n$. Pour étudier en quoi ça diffère précisément de ${r_0}^n$, on étudie une suite définie par $v_n = \frac{u_n}{{r_0}^n}$. On essaye de remplacer u_n par v_n dans la relation de récurrence d'ordre 2, on obtient :

  $$u_{n+2} + a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n = 0 \Leftrightarrow {r_0}^2 v_{n+2} + a r_0 v_{n+1} + b v_n = 0$$

  Or si $\Delta = a^2 - 4b = 0$, alors $b = \frac{a^2}{4}$, et surtout $r_0 = \frac{-a}{2}$ d'où en simplifiant :

  $$v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0$$

  A présent, il faut remarquer que ceci revient à écrire $v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n$, donc $(v_{n+1} - v_n)_{n\geq 0}$ est une suite constante égale à α, disons, si bien que $v_{n+1} = v_n + \alpha$. $(v_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite arithmétique, $v_n = \beta \cdot n + \alpha$. Bref, $u_n = (\beta \cdot n + \alpha){r_0}^n$ (les β et α jouent les mêmes roles que λ et μ avant, à savoir permettre de choisir u_1 et u_0 à loisir).

Résumons donc comment on détermine l'expression d'une suite vérifiant $u_{n+2} + a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n = 0$.

METHODE :

- On résout $r^2 + ar + b = 0$.
- Si $\Delta = 0$, une solution est de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$, où r est la solution double de l'équation.
- Si $\Delta \neq 0$, une solution est de la forme $u_n = \alpha {r_1}^n + \beta {r_2}^n$, où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation.
- Si on a donné une condition sur u_0 et u_1, on a deux équations à deux inconnues à résoudre. Par exemple, dans le cas $\Delta = 0$, on doit résoudre $\alpha = u_0$ et $(\alpha + \beta)r = u_1$.

Remarquez que si on a $\Delta < 0$, les suites solutions semblent complexes, alors qu'a priori la relation de récurrence ne fait intervenir que des nombres réels. Comment exhiber clairement l'aspect réel ? En fait, les deux racines d'une équation polynomiale à coefficients réels du second degré de discriminant négatif (je vais y arriver) sont complexes *conjuguées*, si bien qu'on peut les noter $r\exp(i\theta)$ et $r\exp(-i\theta)$.

$r^{n+2}\exp((n+2)i\theta) + ar^{n+1}\exp((n+1)i\theta) + br^n\exp(ni\theta) = 0$ donne, en prenant la partie réelle puis imaginaire, $r^{n+2}\cos((n+2)\theta) + ar^{n+1}\cos((n+1)\theta) + br^n\cos(ni\theta) = 0$ et $r^{n+2}\sin((n+2)\theta) + ar^{n+1}\sin((n+1)\theta) + br^n\sin(ni\theta) = 0$. Alors, au lieu de générer les solutions avec les deux racines complexes, on peut très bien écrire les solutions sous la forme $u_n = (\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))r^n$.

*. le seul qu'on traite, car si $b = 0$ on a en fait une suite récurrence d'odre 1

Exemple 1 : Soit une suite définie par $u_{n+2} = \frac{u_n+u_{n+1}}{2}$ (moyenne des deux termes précédents). Les solutions de $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ sont $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$. Donc les solutions sont de la forme $u_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Exemple 2, nombre d'or : Soit une suite de Fibonacci définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$ sont $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ (nombre d'or) et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Donc la suite s'écrit $u_n = \alpha\varphi^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Si on veut par exemple $u_0 = u_1 = 1$, alors on a $\alpha + \beta = 1$ et $\underbrace{(\alpha+\beta)}_{=1} + \sqrt{5}(\alpha - \beta) = 2$, donc $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} + 1$ et $\beta = 1 - \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

On remarque que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \varphi$ quand $n \to \infty$, rapport qu'on retrouve souvent dans la littérature sur le nombre d'or. Vous pouvez vous amuser à trouver d'autres exemples, dans tous les cas possibles !

Pour les suites récurrentes d'ordre supérieur, l'idée est la même, seul le cas où il y a des racines multiples pose éventuellement problème. Par exemple, si on considère une suite définie par $u_{n+3}+u_{n+2}+u_{n+1}+u_n = 0$, on cherche les solutions de $x^3+x^2+x+1 = 0$... Or on a vu en début de chapitre que $x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^4-1}{x-1}$ (1 est clairement non solution de l'équation), donc les racines sont exactement les racines quatrièmes de l'unité à l'exception de 1, à savoir -1, i et $-i$. Les solutions sont donc de la forme $u_n = \alpha(-1)^n + \beta i^n + \gamma(-i)^n$. Affaire à suivre dans la réduction d'endomorphismes (hein, quoi ?).

3.2 Résumé, méthodes

- Prenez conscience de l'importance des suites de Cauchy pour prouver des existences de limites pour lesquelles on a aucune piste, ou pour passer des itérations finies à l'infini (lemme des segments emboités, voire le théorème du point fixe où on passe de $f^n(u_0)$ à « $f^\infty(u_0)$ » le point fixe). Ces suites feront un *come back* spectaculaire dans les chapitres sur les séries, les suites de fonctions, la topologie.
- La méthode indiquée pour étudier la convergence des suites dans le chapitre 2 est à suivre au pied de la lettre, absolument. Elle n'a presque aucune faille !
- Une suite qui est bornée converge presque, guettez tout ce qui est borné ! Si une fonction est définie sur un segment et met en jeu une infinité de points, ça peut être l'occasion par exemple ! *Never underestimate Bolzano and Weierstrass...*
- Il est important d'indexer autant que possible ce qui n'est pas une suite *a priori*, afin de faire ressurgir les théorèmes qui invoquent des suites (théorème de Bolzano-Weierstrass, continuité des fonctions). Peut être présent absolument partout.
- Les suites récurrentes étudiées ici ne font pas appel à des outils trop compliqués, seule la méthode finale est à vraiment retenir, et on la retient en la pratiquant.

Les résultats les plus riches sont le théorème de Bolzano-Weierstrass, le théorème du point fixe de Banach, la convergence des suites de Cauchy réelles ou complexes, et la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. Le reste est bien évidemment à savoir, souvent prioritaire, mais ne témoigne pas de la même richesse mathématique.

Si vous êtes encore sceptiques, ne vous inquiétez pas, les suites cachent encore leurs atouts majeurs, à bientôt en topologie...