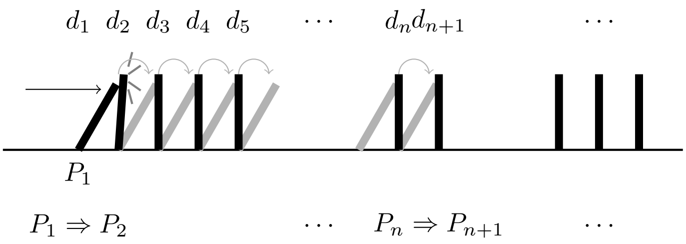
Rebondir MISMI, TD hors-série : Raisonnement par récurrence.

Imaginons cette situation : j'ai dressé une suite de dominos debout.

1. Je fais tomber le premier domino.
2. Tout domino qui tombe entraine le domino suivant dans sa chute.

Alors, vous êtes tentés d'affirmer que tous les dominos vont tomber, n'est-ce pas ? Parce que le premier domino fait tomber le deuxième, donc le deuxième domino fait tomber le troisième domino, le troisième domino fait tomber le quatrième domino, et ainsi de suite.

Figure 1 – Illustration du raisonnement par récurrence.



D'abord, on remarque qu'on a une espèce de raisonnement à la « et ainsi de suite » : si une propriété donnée se transmet à son « successeur » en un certain sens (on parlera d'*hérédité*), et si la propriété se vérifie une première fois, alors elle se vérifie tout le temps, une infinité de fois, chaque fois étant assignée à un certain entier n : le n-ième domino par exemple. C'est le principe du raisonnement par récurrence :

Proposition 1 (Principe de récurrence) *Soit P_n une proposition pour tout n entier naturel. Si on a P_0, et que pour tout n entier naturel, la justesse de P_n entraine celle de P_{n+1}, alors on a P_n pour tout n.*

Voici plusieurs cas où raisonner par récurrence peut être utile :

– quand on travaille avec une fonction, ou une suite, ou n'importe quel objet mathématique dont la construction lie une étape n à une étape $n-1$ (par exemple, pour une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$) ;
– en particulier, les entiers naturels, la multiplication, l'élévation à une certaine puissance, *etc.*, sont des opérations définies par récurrence (on a $(n+1)x = nx + x$, $x^{n+1} = x^n \cdot x$, *etc.*), donc une formule à démontrer faisant intervenir multiplications ou puissances peut se démontrer par récurrence (exemple : $\exp(nx) = \exp(x)^n$).

Exercice 1. Démontrer la proposition ci-dessus.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = qu_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = aq^n$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = q + u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = a + qn$.

Exercice 4. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1+2\cdots+n$ la somme des entiers naturels de 1 à n. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6.

En fait, il existe une formule pour trouver S_n sans calculer. Montrer par récurrence que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

En remplaçant i par i^2 dans la définition de S_n (qui devient alors la somme des carrés des entiers naturels de 1 à n), montrer par récurrence que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Même question en remplaçant i par i^3 : trouver $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On a montré ainsi que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2,$$

si on se rappelle que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Ce genre d'identités arrive rarement, c'est même exceptionnel !

Exercice 5. Trouver la faille dans le raisonnement par récurrence suivant :

> Je veux montrer par récurrence que $3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7 pour tout n entier naturel : c'est ce qu'on appelle la proposition P_n. Remarquons que :
>
> $$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1} &= 9 \cdot 3^{2n+4} - 2 \cdot 2^n \\ &= (7+2) \cdot 3^{2n+4} - 2 \cdot 2^n \\ &= 2(3^{2n+4} - 2^n) + 7 \cdot 3^{2n+4}. \end{aligned}$$
>
> Alors, si P_n est vraie, $3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7, et $7 \cdot 3^{2n+4}$ l'étant également, alors le tout est un multiple de 7 et P_{n+1} est vraie aussi, donc la justesse de P_n entraine celle de P_{n+1}. Par récurrence, on a montré le résultat voulu.

Exercice 6. Trouver la faille dans le raisonnement par récurrence suivant :

> **Théorème 1** *Les chevaux sont tous de la même couleur.*
>
> *Preuve.* Montrons par récurrence la propositon P_n : « n chevaux sont toujours de la même couleur. » Pour $n = 1$, c'est évident qu'un cheval est de sa même couleur.
>
> Supposons que n chevaux soient toujours de la même couleur, et considérons $n+1$ chevaux. D'après l'hypothèse de récurrence, les n premiers chevaux sont de la même couleur, et les n derniers aussi. Les $n+1$ chevaux sont donc de la même couleur, donc la justesse de P_n entraine celle de P_{n+1}. Par récurrence, n chevaux quelconques sont toujours de la même couleur, et donc tous les chevaux sont de la même couleur.

Exercice 7. Je définis une suite d'ensembles ainsi :

$$A_0 = \emptyset$$

$$A_1 = \{A_0\} = \{\emptyset\}$$

$$A_2 = \{A_0, A_1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$A_3 = \{A_0, A_1, A_2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$
$$A_4 = \{A_0, A_1, A_2, A_3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

Et plus généralement : $A_n = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$. Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$, le symbole « $\emptyset$ » apparait 2^{n-1} fois dans A_n.

Exercice 8. Soit $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels entre 1 et n. Si n est un entier naturel, on note $n!$ le nombres d'applications f de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ telles que $f(a) \neq f(b)$ pour tous $a \neq b$; on dit qu'une telle application est *injective.*

Montrer que $n! = n \cdot (n-1)!$, et en déduire que $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

Exercice 9. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul :

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}.$$

Exercice 10. Soient k et n deux entiers naturels, avec $0 \leq k \leq n$ (ce n'est pas indispensable, mais c'est plus facile en le supposant). On note C_n^k le nombre de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ qui ont exactement k éléments. Par exemple, dans $[\![1,3]\!]$ il y a exactement trois ensembles à deux éléments, à savoir $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ et $\{2,3\}$, donc $C_3^2 = 3$.

Montrer que si $n \geq k \geq 1$, alors $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, et en déduire par récurrence que

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Exercice 11. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante, et soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que si $u_1 > u_0$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante, et si $u_1 < u_0$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. *Cet exercice est concrètement très utile pour étudier le sens de variations d'une suite, parce qu'il n'est pas toujours facile d'étudier les variations d'une suite, alors que pour une fonction si : on peut dériver !*

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n + 6}$ et $u_0 = 0$. Montrer par récurrence que $u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 13. Montrer par récurrence que 6 divise $7^n - 1$ pour tout entier n non nul.

Exercice 14. Montrer par récurrence que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel non nul, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.