Rebondir MISMI, corrigé du TD hors-série.

Exercice 1. Raisonnons par l'absurde en supposant que malgré la justesse de $\mathcal{P}_0$ et le fait que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle $\mathcal{P}_{n+1}$, il existe tout de même des propositions $\mathcal{P}_n$ fausses pour certains n. Notons n_0 le premier entier tel que cela se produit ; en particulier, $n_0 \neq 0$, car on sait que $\mathcal{P}_0$ est vraie. Donc $n_0 \geq 1$.

Comme n_0 est supposé être le premier entier n tel que $\mathcal{P}_n$ est fausse, en particulier $\mathcal{P}_{n_0-1}$ est vraie. Mais alors, comme la justesse de $\mathcal{P}_{n_0-1}$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n_0}$, on en déduit que $\mathcal{P}_{n_0}$ est à la fois vraie et fausse, ce qui est absurde. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n.

Exercice 2. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « $u_n = aq^n$ ». Montrons par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ par définition, et $a \cdot q^0 = a$, donc $u_0 = aq^0$: on a bien $\mathcal{P}_0$.

Dorénavant, prouvons que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, en faisant le lien entre u_{n+1} et u_n : il est facile et donné par l'énoncé, car on a $u_{n+1} = qu_n$. De fait, si $u_n = aq^n$, alors $u_{n+1} = q \cdot aq^n = aq^{n+1}$, donc on a $\mathcal{P}_{n+1}$. On a bien montré que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, donc par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est toujours vraie, et $u_n = aq^n$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « $u_n = a + qn$ ». Montrons par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ par définition, et $a + q \cdot 0 = a$, donc $u_0 = a + q \cdot 0$: on a bien $\mathcal{P}_0$.

Dorénavant, prouvons que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, en faisant le lien entre u_{n+1} et u_n : il est facile et donné par l'énoncé, car on a $u_{n+1} = q+u_n$. De fait, si $u_n = a+qn$, alors $u_{n+1} = q+(a+qn) = a+q^{n+1}$, donc on a $\mathcal{P}_{n+1}$. On a bien montré que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, donc par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est toujours vraie, et $u_n = a + qn$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 4. On note $S_n = \sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + 2 \cdots + n$. On a $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, $S_4 = 10$, $S_5 = 15$ et $S_6 = 21$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ». Montrons par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

Pour S_0, c'est l'évidence même. Prouvons que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, et cherchons pour cela le lien entre S_{n+1} et S_n : on a $S_{n+1} = S_n+(n+1)$, donc, si $\mathcal{P}_n$ est vraie :

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2},$$

qui est bien de la forme annoncée par $\mathcal{P}_{n+1}$. On a bien montré que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, donc par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est toujours vraie, et $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geq 0$.

En remplaçant i par i^2 dans la définition de S_n (qui devient alors la somme des carrés des entiers naturels de 1 à n), on raisonne exactement de la même manière, en utilisant le fait que $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$. Le seul calcul à faire est le suivant :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) \\
&= (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+2)(2n+3)}{6},
\end{aligned}$$

car les racines de $2X^2 + 7X + 6$ se calculent et sont -2 et $-\frac{3}{2}$, si bien que $2X^2 + 7X + 6 = 2(X - (-2))(X - (-3/2))$.

De même en remplaçant i par i^3, car $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$; si vous procédez correctement, le seul calcul à faire sera :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) \\
&= (n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4} = (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 5. La proposition $\mathcal{P}_0$ n'est tout simplement pas vraie, donc ne peut pas enclencher toute la machinerie du principe de récurrence. En effet, pour $n = 0$,

$$3^{2\cdot 0+4} - 2^0 = 3^4 - 1 = \underbrace{(3^2-1)}_{=8}\underbrace{(3^2+1)}_{=10} = 2^4 \cdot 5$$

n'est pas divisible par 7.

Exercice 6. L'essence de ce raisonnement, quand on veut montrer que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, est qu'une fois établi que les n premiers chevaux et n derniers chevaux sont de la même couleur, on peut comparer les couleurs du premier et du dernier cheval grâce à l'intersection des n premiers et n derniers chevaux. Mais pour $n = 1$, cette intersection est vide, on ne peut pas comparer la couleur du premier et du deuxième (et dernier) cheval, et donc le raisonnement ne tient pas debout. La justesse de $\mathcal{P}_1$ n'entraîne pas celle de $\mathcal{P}_2$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « le symbole "$\emptyset$" apparait 2^{n-1} fois dans A_n ». Pour $n = 1$, on vérifie à la main qu'il apparaît effectivement une fois (donc 2^0 fois) dans A_1, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Pour raisonner par récurrence, on a besoin de faire le lien entre A_{n+1} et A_n : ici, on constate que $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$. Si $\mathcal{P}_n$ est supposée vraie, alors A_n contient 2^{n-1} le symbole de l'ensemble vide, et $\{A_n\}$ également, donc $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$ le contient $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ fois. On a $2^n = 2^{(n+1)-1}$, donc on reconnaît bien là $\mathcal{P}_{n+1}$. Par récurrence, le résultat désiré est démontré.

Exercice 8. Pour définir une application injective f de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, je choisis l'image par f de n (par exemple), ce qui donne n possibilités (à savoir les entiers entre 1 et n). Après, je peux choisir n'importe quelles images pour les éléments restants entre 1 et $n-1$, pourvu que leurs images par f soient distinctes entre elles et distinctes de $f(n)$. Cela revient donc à choisir une application injective de $[\![1, n-1]\!]$ dans $[\![1, n]\!] \setminus \{f(n)\}$, et il y a $(n-1)!$ possibilités, par définition de $(n-1)!$: il est clair qu'il y a autant d'applications injectives de $[\![1, n-1]\!]$ dans $[\![1, n-1]\!]$ que d'applications injectives de $[\![1, n-1]\!]$ dans

$[\![1,n]\!] \setminus \{f(n)\}$: la valeur de $f(n)$, que ce soit n ou non, ne joue pas un rôle privilégié dans le fait que $f(a) \neq f(b)$ pour tout $a \neq b$. Bref, il y a $n \cdot (n-1)!$ applications injectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Ceci fournit une relation de récurrence entre $n!$ et $(n-1)!$, donc on peut l'utiliser pour démontrer que $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ par récurrence : pour $n = 1$, il y a bien une seule application (qui est injective) de $\{1\}$ dans $\{1\}$, et si on suppose que $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$, alors

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1,$$

ce qui est exactement ce qu'on veut. Par récurrence, c'est vrai pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$ ». Pour $n = 1$, on a $2^0 = 1$, $1! = 1$ et $1^{1-1} = 1$, donc $2^0 \leq 1! \leq 1^{1-1}$, et on a bien $\mathcal{P}_1$. À présent, montrons que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$. Pour faire le lien entre le cas n et le cas $n+1$, remarquons d'abord que $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ et $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. Alors, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, on a :

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \leq n! \cdot 2 \leq n! \cdot (n+1) = (n+1)!,$$

ce qui donne la première inégalité de $\mathcal{P}_{n+1}$. Pour la seconde, remarquons d'abord que comme $n \leq n+1$, on a $n^{n-1} \leq (n+1)^{n-1}$ pour $n \geq 1$ (car $x \mapsto x^{n-1}$ est croissante). Alors, toujours en supposant $\mathcal{P}_n$ vraie, on a :

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \leq (n+1)n^{n-1} \leq (n+1) \cdot (n+1)^{n-1} = (n+1)^n = (n+1)^{(n+1)-1},$$

d'où la seconde inégalité de $\mathcal{P}_{n+1}$. On a bien montré que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, donc par le principe de récurrence, ces inégalités sont vraies pour tout n non nul.

Exercice 10. Pour dénombrer le nombre de sous-ensembles à k éléments de $[\![1,n]\!]$, on peut se demander comment on en construit un : on se demande d'abord si n (par exemple) appartient à cet ensemble. Alors,

- soit il appartient à l'ensemble à k éléments qu'on veut construire, et alors on doit encore choisir $k-1$ éléments dans $[\![1,n-1]\!]$: il y a alors C_{n-1}^{k-1} choix possibles pour compléter cet ensemble, par définition de C_{n-1}^{k-1} ;
- soit il n'appartient pas à l'ensemble à k éléments qu'on veut construire, et alors on doit choisir ses k éléments dans $[\![1,n-1]\!]$: il y a alors C_{n-1}^{k} choix possibles pour compléter cet ensemble.

Au total, ceci donne $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$ façons d'obtenir un ensemble à k éléments dans $[\![1,n]\!]$, donc $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ ». Pour $n = 1$, on a vite fait de calculer C_1^0 et C_1^1 (qui valent 1 dans chaque cas : il n'y a qu'un seul ensemble à 0 élément ou 1 élément dans $[\![1,1]\!] = \{1\}$). Comme $\frac{1!}{(1-0)!0!} = \frac{1!}{(1-1)!1!} = 1$ également, on a bien $\mathcal{P}_1$.

À présent, montrons que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$. C'est l'égalité montrée précédemment qui va faire le lien entre le cas n et le cas $n+1$: si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors pour tout $k \leq n+1$,

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k \overset{[\mathcal{P}_n]}{=} \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Mettons ces deux fractions au même dénominateur. Comme $(n-k)! = (n-(k-1))! \cdot (n-k)$ et $k! = k \cdot (k-1)!$, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par k et de la deuxième fraction par $n-k$. Alors,

$$\begin{aligned} C_{n+1}^k &= \frac{n! \cdot k + n! \cdot (n-(k-1))}{(n-k+1))!k!} = \frac{n!(\cancel{k} + n - \cancel{k} + 1)}{(n-k+1)!k!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{((n+1)-k)!k!} \\ &= \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!k!}. \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{n+1}$. On a bien montré que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, donc par le principe de récurrence, $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ pour tout $n \geq k \geq 1$.

Exercice 11. Montrons simplement le résultat annoncé pour $u_1 > u_0$, l'étude est strictement la même pour $u_1 < u_0$. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « $u_{n+1} > u_n$ ». Pour $n = 0$, on a évidemment $\mathcal{P}_0$ puisqu'on a justement supposé que $u_1 > u_0$. Pour montrer que $\mathcal{P}_n$ entraîne $\mathcal{P}_{n+1}$, le passage du cas n au cas $n+1$ est simple : il suffit d'évaluer f en u_n. Plus précisément, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors

$$u_{n+1} > u_n.$$

En appliquant f à cette inégalité, comme f est strictement croissante, on a

$$f(u_{n+1}) > f(u_n).$$

Mais $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$, puis le résultat par le principe de récurrence.

Exercice 12. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « $u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 0$ ». Comme $u_0 = 0 \leq 2$, on a bien évidemment $\mathcal{P}_0$.

Remarquons que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt[3]{x+6}$. Connaître les variations de f peut donc s'avérer bien utile pour étudier la suite $(u_n)_{n\geq 0}$: c'est une fonction croissante en tant que composée de $x \mapsto x+6$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ qui sont deux fonctions croissantes, et pour tout $x \leq 2$ on a $f(x) \leq f(2) = \sqrt[3]{8} = 2$. Alors, si on a $\mathcal{P}_n$, c'est-à-dire si $u_n \leq 2$, alors $f(u_n) \leq f(2) = 2$, or $u_{n+1} = f(u_n)$, donc on a $\mathcal{P}_{n+1}$. Par récurrence, on a l'inégalité désirée pour tout $n \geq 0$.

Exercice 13. La récurrence peut s'imposer si on trouve une relation entre $7^{n+1} - 1$ et $7^n - 1$. On la trouve en remarquant que :

$$7^{n+1} - 1 = 7^{n+1} - 7 + 7 - 1 = 7(7^n - 1) + 7 - 1 = 7(7^n - 1) + 6.$$

Alors, si 6 divise $7^n - 1$, comme 6 divise également 6, on en déduit que 6 divise $7(7^n - 1) + 6 = 7^{n+1} - 1$. Le lecteur en exercice rédigera le raisonnement par récurrence en détail.

Exercice 14. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « pour tout $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$ ». Pour $n = 1$, on a bien sûr $(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$. Ici, le fait que $x > -1$ n'intervient pas, on a $\mathcal{P}_1$.

À présent, montrons que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$: comme $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$, on peut faire le lien facilement entre le cas n et le cas $n+1$: si $\mathcal{P}_n$ est vraie, on a

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{>0} \overset{[\mathcal{P}_n]}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x.$$

Notons que si on avait eu $x < -1$, alors l'inégalité $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$ aurait été fausse : la multiplication par $x+1$ aurait changé le sens de l'inégalité $(1+x)^n \geq (1+nx)$. Mais on a bien montré ici que pour tout $x > -1$, si toutefois $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$. Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $n \geq 1$.