Rebondir MISMI: notes de cours

Bruno Winckler

16 juin 2015

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions usuelles

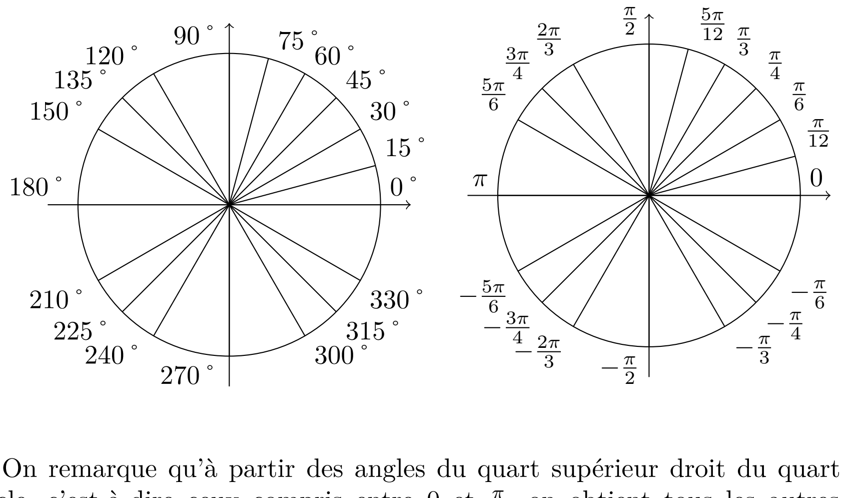
1.1 Fonctions circulaires

1.1.1 Définitions

Dans ce cours, tous les angles seront exprimés en *radians*. Rappelons que pour passer des radians aux degrés, il faut multiplier par l'angle en radians par $\frac{180}{\pi}$, de sorte qu'un angle de π radians vaut 180 degrés. Pour passer des degrés aux radians, il faut multiplier l'angle en degrés par $\frac{\pi}{180}$. Ainsi, un « tour complet » représente 2π radians, et on ne parlera plus de 360 degrés.

Comme, précisément, cela ne change rien d'ajouter ou d'enlever 2π radians à un angle, puisque cela revient à faire un tour complet, on peut ajouter ou enlever cette quantité à un angle sans le changer. Ceci permet, par exemple, de remplacer $\frac{4\pi}{3}$ par $\frac{-2\pi}{3}$, si cela nous arrange.

Figure 1.1 – Différents angles, en degrés et en radians.



On remarque qu'à partir des angles du quart supérieur droit du quart de cercle, c'est-à-dire ceux compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient tous les autres de la figure 1.1 assez facilement : par exemple, étant donné un angle $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, j'obtiens son « symétrique » (par rapport à l'origine O) dans le quart inférieur gauche en ajoutant π (ou $-\pi$), son « symétrique » (par rapport à l'axe des ordonnées) dans le quart supérieur gauche en changeant θ en $\pi-\theta$, et enfin son « symétrique » (par rapport à l'axe des abscisses) dans le quart inférieur droit en changeant θ en $-\theta$. C'est pour cette raison que je m'occuperai principalement des valeurs des fonctions circulaires pour les angles entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, les autres valeurs suivront aisément.

Remarque. On démontrera en exercice que les points ainsi obtenus sont bien les symétriques de M par rapport aux points et axes cités, dans le chapitre sur les nombres complexes (bien que leur usage ne soit pas absolument nécessaire).

On munit le plan euclidien traditionnel d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ *. Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit θ un nombre réel. On considère le point M sur le cercle unité tel qu'une mesure de l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ soit θ.

Définition 1.1 (Cosinus, Sinus) *On définit le cosinus de θ, noté $\cos(\theta)$, et le sinus de θ, noté $\sin(\theta)$, comme étant les coordonnées du point M : il est donc de coordonnées $(\cos(\theta),\sin(\theta))$.*

La figure 1.2 illustre cette définition. La définition de la tangente d'un angle est un peu plus subtile.

Définition 1.2 (Tangente) *La droite (OM) et la droite tangente au cercle en $x=1$ ne sont pas parallèles si $\theta\neq\pm\frac{\pi}{2}$, elles se coupent donc en un point T. On appelle tangente de θ, notée $\tan(\theta)$, la longueur du segment joignant le point $(0{,}1)$ et le point T. Par le théorème de Thalès, on a aussi*

$$\tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

1.1.2 Formules remarquables

On introduit généralement les fonctions cosinus, sinus et tangente comme fonctions d'un angle dans un triangle rectangle. On peut retrouver ces propriétés à l'aide des définitions données dans la section précédente.

Proposition 1.3 *Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors, si θ est un des deux angles non droits du triangle,*

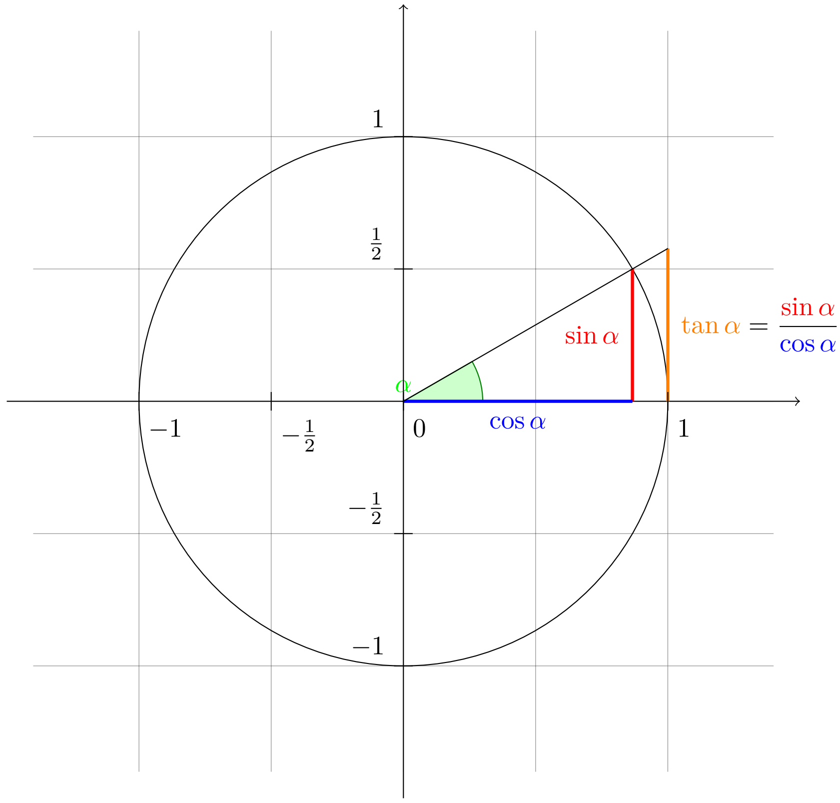
$$\cos(\theta)=\frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}},$$

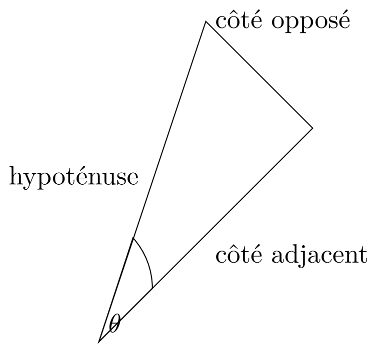
$$|\sin(\theta)|=\frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}},|\tan(\theta)|=\frac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}}$$

Un angle est toujours défini par deux segments (ou droites) sécantes (ou par deux vecteurs non colinéaires, plus précisément). Le « côté » adjacent d'un angle est alors le côté différent de l'hypoténuse, parmi les deux côtés définissant l'angle. Par exemple, $\cos(\widehat{ABC})=\frac{BA}{BC}$.

*. C'est-à-dire : on peut associer à tout point M du plan des coordonnées (x,y), ce qui revient à dire qu'on peut placer le point M sur le plan à partir de O, x et y grâce à la relation $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs de norme 1 et orthogonaux.

Figure 1.2 – Définitions de cos, sin et tan.





Preuve de la proposition. Pour fixer les idées, supposons qu'on calcule le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$; le raisonnement sera le même pour les autres angles et pour le sinus. Comme les triangles semblables ont les mêmes angles, on peut supposer que l'hypoténuse de ABC est de longueur 1, quitte à agrandir ou rétrécir le triangle (en divisant la longueur des côtés par la longueur BC). Quitte à translater et effectuer des rotations et symétries (ce qui ne change pas les angles), on peut même supposer que le côté adjacent à $\widehat{ABC}$, c'est-à-dire celui correspondant à AB, a une extrémité à l'origine et se prolonge sur l'axe des abscisses. Alors, par la définition du cosinus, le cosinus de $\widehat{ABC}$ n'est rien d'autre que la longueur du côté adjacent, qui est de longueur $\frac{BA}{BC}$ (puisqu'on a divisé la longueur de tous les côtés par BC en début de preuve). Pour le sinus, on procède de même, en étant un peu plus vigilant : en effet, les symétries éventuelles opérées reviennent à changer *l'orientation* de l'angle, et on voit d'après la définition de sinus que si on transforme un angle en son opposé, alors le sinus est lui aussi transformé en son opposé (donc devient négatif pour un angle originellement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$). $\square$

Cette proposition est précieuse pour déterminer la longueur d'un côté, connaissant un angle et la longueur de l'hypoténuse ou du côté adjacent. Des exemples seront donnés en exercice.

$\widehat{ABC}$

D'autres propriétés peuvent se déduire de notre définition. Le cosinus et le sinus d'un angle ne peuvent pas excéder le rayon du cercle trigonométrique. De ceci, on déduit que pour tout réel θ, on a

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin(\theta) \leq 1.$$

De plus, le triangle dont les sommets sont O, $M(\cos(\theta),0)$ et $N(\cos(\theta), \sin(\theta))$ est rectangle en M. Par le théorème de Pythagore, comme l'hypoténuse est de longueur le rayon du cercle, c'est-à-dire 1, on en déduit

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1.$$

1.1.3 Valeurs remarquables

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des valeurs spéciales à connaître.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Les valeurs de cosinus et sinus en 0 et $\frac{\pi}{2}$ se lisent automatiquement sur la figure 1.2.

En principe, la seule difficulté de mémorisation réside dans l'apprentissage des trois valeurs particulières $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Après, un peu de jugeote permet de retrouver les valeurs spéciales des cos et sin. Notons, déjà, que si on connait les valeurs spéciales de cos, alors on peut, en principe, retrouver les valeurs de spéciales de sin, puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$. De plus, une brève étude du cercle trigonométrique en figure 1.2 permet de constater que lorsque l'angle augmente entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, le cosinus de cet angle diminue, de 1 jusqu'à 0. Puisque le cosinus diminue, on sait d'emblée que

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

et comme on vérifie que

$$\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2},$$

on peut retrouver les valeurs présentes dans le tableau. Toutefois, cette approche ne démontre rien, et on peut calculer ces valeurs par des arguments géométriques, ce qu'on voit en ayant pour support les figures 1.3, 1.4 et 1.5.

Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Le triangle dont les sommets sont O, $M\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ et $N(0,1)$ est équilatéral : ses côtés ON et OM sont de longueur 1, donc le triangle est isocèle en O, et on a l'égalité des angles en N et M. Or, l'angle en O égale $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, et la somme des angles d'un triangle égale π, donc les angles N et M valent $\frac{\pi}{3}$, puis les trois angles du triangle sont égaux. La médiatrice de ON et la hauteur issue de N sont alors confondues, et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Par le théorème de Pythagore, on obtient la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Le triangle rectangle dont les sommets sont O, $M\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),0\right)$ et $N\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ est isocèle en M : en effet, la somme des angles dans un triangle est égale à π. L'angle en O vaut $\frac{\pi}{4}$, l'angle en M vaut $\frac{\pi}{2}$, donc l'angle en N vaut $\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Comme $\widehat{MON} = \widehat{MNO}$, on en déduit le fait qu'il soit isocèle. Alors, les côtés OM et NM sont égaux, et comme leurs longueurs respectives sont $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, on en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Maintenant, la relation $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$ donne lieu à l'égalité $2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, car $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ (ce qui est également la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$).

FIGURE 1.3 – Valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

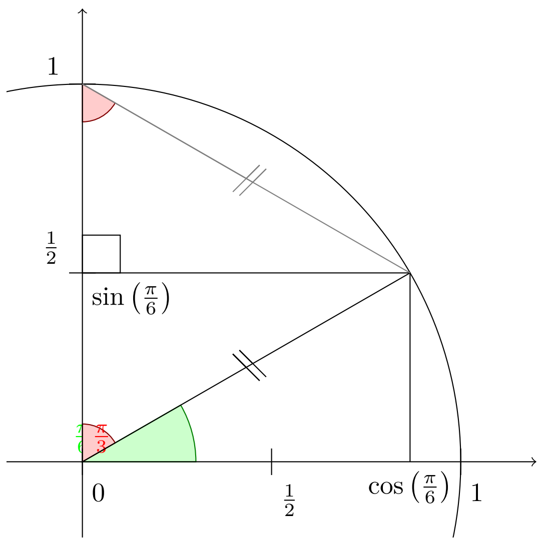
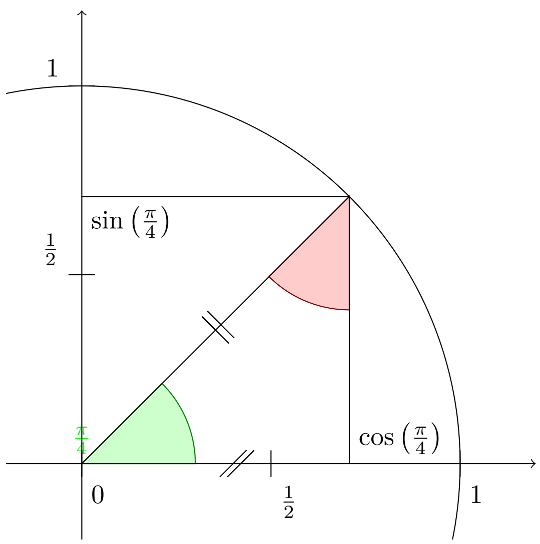


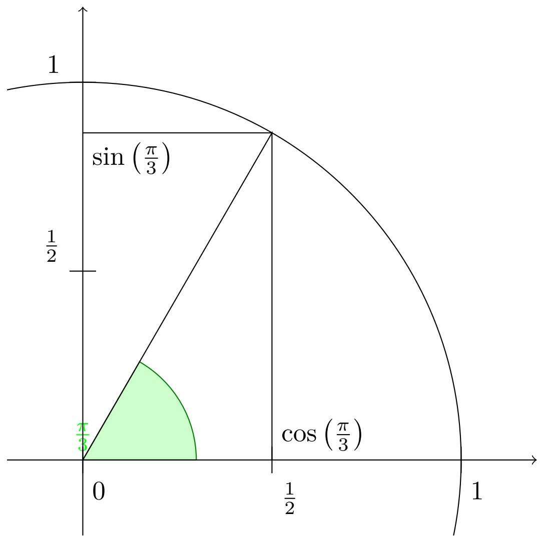
FIGURE 1.4 – Valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.



Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. C'est exactement le même raisonnement que pour le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, et je le laisse en exercice.

Rappelons ce qu'on a dit en remarque dans la section précédente : partant d'un angle θ et du point M de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, remplacer θ par

Figure 1.5 – Valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.



$-\theta$ revient à considérer le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées, dont les coordonnées sont alors $(\cos(\theta), -\sin(\theta))$. Mais, par définition, ce point a aussi pour coordonnées $(\cos(-\theta), \sin(\theta)$, ce dont on tire les relations :

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta), \text{ et } \sin(-\theta) = -\sin(\theta).$$

Changer θ en $\theta + \pi$ fournit le symétrique de M par rapport à O, qui a alors pour coordonnées les opposées de celles de M, à savoir $(-\cos(\theta), -\sin(\theta))$. Mais, par définition, le symétrique de M ayant été obtenu en considérant le point indexé par l'angle $\theta + \pi$ sur le cercle, il a aussi pour coordonnées $(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi))$. On en déduit :

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta), \text{ et } \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta).$$

Par le même raisonnement, on a

$$\cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta), \text{ et } \sin(\theta - \pi) = -\sin(\theta).$$

Par ailleurs, ajouter ou soustraire 2π à un angle donne le même point M sur le cercle, donc

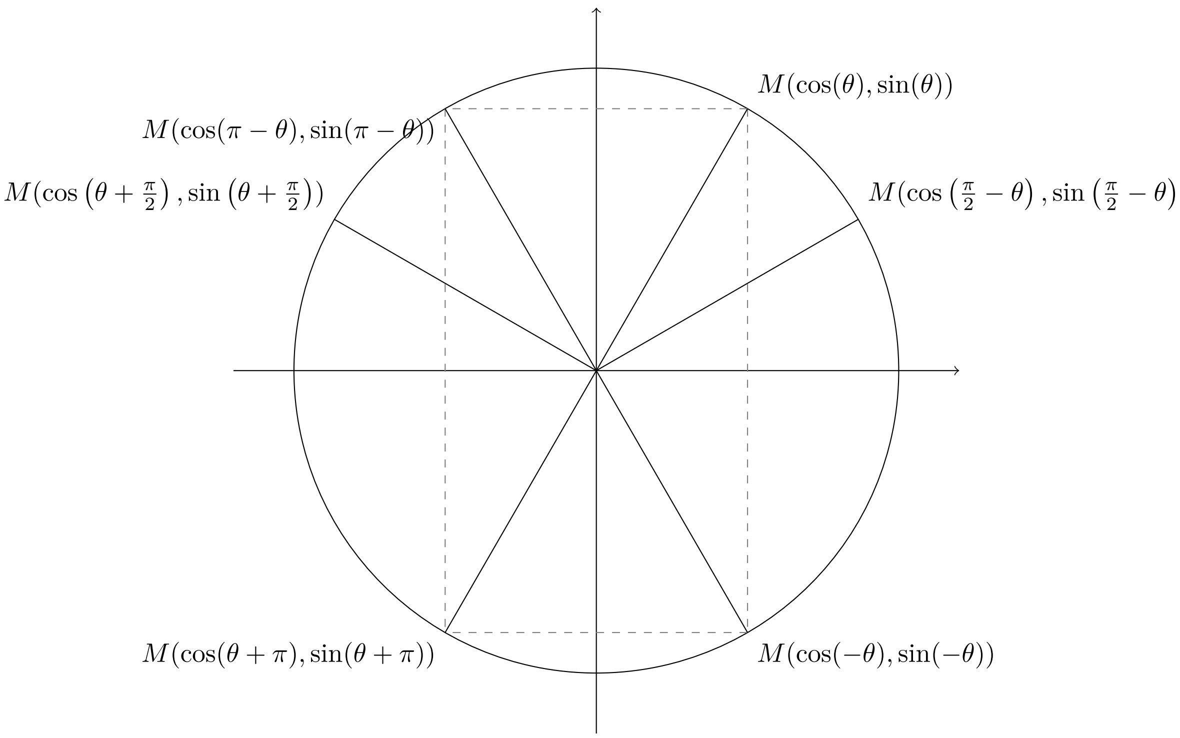
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta), \text{ et } \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta).$$

Changer θ en $\pi - \theta$ fournit le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, qui a la même ordonnée, mais l'abscisse opposée. De ceci, on déduit que

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta), \text{ et } \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta).$$

Enfin, la dernière transformation est plus subtile : quand on change θ en $\pi - \theta$, les triangles OMN et OPQ, dont les sommets ont pour coordonnées $M(\cos(\theta),0)$, $N(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $P\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$, $Q\left(0, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$

FIGURE 1.6 – Différentes transformations sur $M(\cos(\theta), \sin(\theta))$.



sont semblables, car l'un provient de l'autre grâce à une rotation et une symétrie. Le fait qu'ils soient semblables implique qu'ils sont proportionnels, donc

$$\frac{\cos(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1}{1} = 1,$$

et on en déduit les relations

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta), \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta).$$

Par ailleurs, grâce à la relation qu'on vient de démontrer, conjointement aux relations $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$, on obtient

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta), \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta).$$

J'espère que ces différentes transformations auront convaincu au moins d'une chose : faire un dessin pour retrouver les formules, en cas d'oubli !

Résumons :

Proposition 1.4 *Les fonctions cosinus et sinus vérifient, pour tout réel θ, les relations suivantes :*

1. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ *et* $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$;
2. $\cos(\theta \pm \pi) = -\cos(\theta)$ *et* $\sin(\theta \pm \pi) = -\sin(\theta)$;
3. $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ *et* $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$;
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$, *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$;
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$, *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$;
6. $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$, *et* $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$.

Bien entendu, ces relations en induisent d'autres sur la fonction tangente, par exemple : $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$.

Grâce au tableau de valeurs spéciales de la section précédente, muni de ces formules, on peut calculer énormément de cosinus et sinus : $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, *etc.* Vous pouvez remplir ce tableau exhaustivement :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0								
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1								

Les fonctions cosinus et sinus vérifient d'autres formules mirifiques qui seront démontrées dans le chapitre sur les nombres complexes.

1.1.4 Étude des fonctions $\cos$, $\sin$ et $\tan$

On peut démontrer que les fonctions cos et sin, en plus d'être définies sur $\mathbb{R}$, sont *continues* et même *dérivables* ; on reverra ces notions plus en détail plus tard, mais il est de bon ton de rappeler que le signe de la dérivée d'une fonction donne son sens de variation : si la dérivée est positive, alors la fonction est croissante, et inversement si la dérivée est négative. Une fonction atteint ses maximums et minimums locaux là où la dérivée s'annule.

De plus, ces deux fonctions sont bornées, puisqu'elles sont comprises entre -1 et 1. On a vu qu'elles sont périodiques de période 2π, puisqu'elles vérifient $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ pour tout réel x ; ceci permet de restreindre leur étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$. Ce choix n'a pas été fait au hasard. En effet, comme la fonction cos est paire ($\cos(-x) = \cos(x)$) et la fonction sin impaire ($\sin(-x) = -\sin(x)$), connaître ces fonctions pour les valeurs de x positives permet de reconstituer ces fonctions pour les valeurs de x négatives. Ainsi, on peut résumer l'étude de ces fonctions à l'intervalle $[0, \pi]$.

On montrera, lorsqu'on étudiera la dérivabilité des fonctions, qu'elles ont pour dérivée :

$$\cos'(x) = -\sin(x), \text{ et } \sin'(x) = \cos(x).$$

On a vu précédemment que lorsque l'angle x augmentait de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le cosinus diminuait, donc sa dérivée est forcément négative entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. C'est, peut-être, un bon moyen de se souvenir de la présence du signe moins dans la dérivée (à l'inverse, le sinus augmente sur ce même intervalle).

Observer les fonctions cosinus et sinus sur le cercle trigonométrique permet de voir que $\cos(x) \geq 0$ pour x entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, tandis que $\sin(x) \geq 0$ pour x entre 0 et π. On en déduit le signe des dérivées de cos et sin, puis leurs variations.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos'(x)$			$-$		
$\cos$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On en déduit leurs représentations graphiques, sur la figure 1.7.

On constate que les deux graphes sont translation l'un de l'autre. C'est normal, on a vu que $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$, donc les valeurs des deux fonctions diffèrent seulement de $\frac{\pi}{2}$!

La mesure des pentes pour les tangentes en 0 des graphes de cos et sin permettent de donner, au moins heuristiquement, les deux limites suivantes, qui seront démontrées dans le chapitre approprié en exercice :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0, \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Passons à la fonction tangente, dont on rappelle la définition : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Elle n'est pas bien définie pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$, et par périodicité de cos elle n'est pas définie pour tout x de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k un entier relatif. Ceci se traduit par des singularités criantes sur le graphe de la fonction tan.

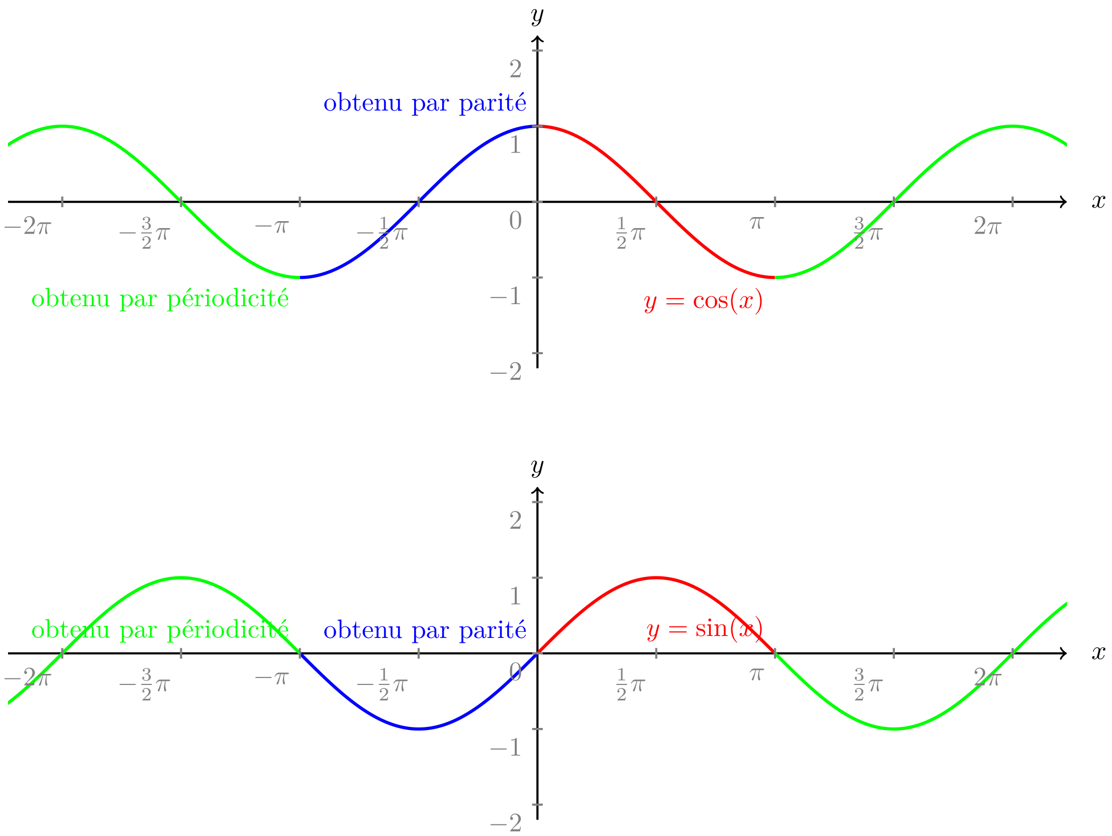
Comme $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$, la fonction tan est périodique de période π, et on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur π, disons $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Il est aisé de montrer qu'elle est une fonction impaire, on peut donc même restreindre son étude à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Le calcul de sa dérivée s'obtient à partir de la formule de dérivation de quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. Alors,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

Notons que partant de $\frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2}$, on peut aussi arriver à $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$. Dans tous les cas, on vient qu'il s'agit d'une dérivée strictement positive, donc la fonction tan est strictement croissante. Pour compléter le tableau de variation, on a besoin de calculer sa limite en $\frac{\pi}{2}$: comme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1, \text{ et } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+,$$

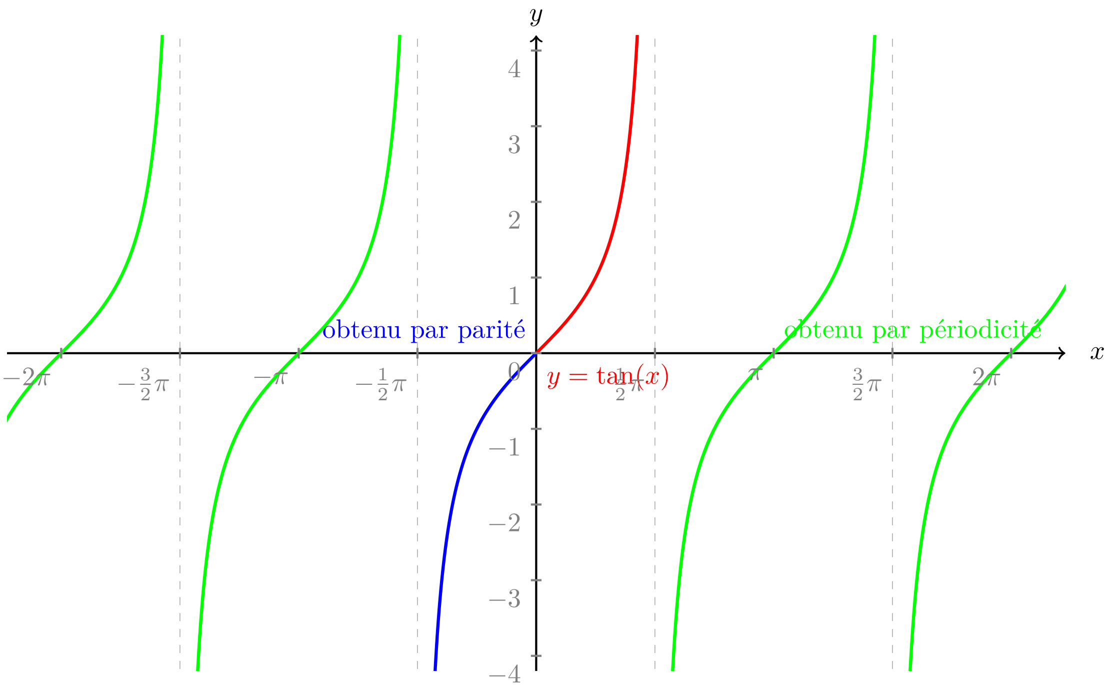
FIGURE 1.7 – Graphes de cos et sin.



on en déduit que $\lim\limits_{x \to \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$. On peut dorénavant écrire le tableau de variation, et dessiner le graphe qui va avec lui (en figure 1.8).

x	0	$+\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	$+$	
$\tan(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 1.8 – Graphe de tan.



1.2 Exponentielle et Logarithme

1.2.1 La fonction exponentielle

Derrière ce mot, assez couramment utilisé dans le langage courant pour décrire une augmentation rapide ou importante, se cache une des fonctions les plus importantes des mathématiques.

Définition 1.5 (Exponentielle) *Il existe une unique fonction f dérivable, définie sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$, et $f(0) = 1$. On appelle fonction exponentielle, notée* $\exp$ *ou* $x \mapsto e^x$*, la fonction vérifiant ces conditions. On note* $e = \exp(1) = e^1$.

L'existence provient du théorème profond suivant, qu'on admet puisqu'on n'a de toute façon pas les armes pour parler de dérivées plus en détails, du moins provisoirement.

Théorème 1.6 (Théorème de Cauchy) *Soient a, b et c trois réels. Il existe une unique fonction f dérivable, définie sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout x réel, $f'(x) = cf(x)$, et $f(a) = b$.*

De telles fonctions ont un intérêt pratique pour de nombreux problèmes qui lient une dérivée d'une fonction à sa fonction. Par exemple, si $f(t)$ désigne une population à un instant t, et que T désigne la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité, alors pour tout h on a

$$f(t+h) = f(t) + h \cdot T \cdot f(t),$$

ce qu'on peut réécrire

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = Tf(t).$$

Plus tard, on reconnaîtra dans le membre de gauche l'écriture de la dérivée de f quand h devient infiniment proche de zéro (on a donc $f'(t) = Tf(t)$). De tels équations liant dérivée et fonction sont monnaie courante dans la nature, mais sont souvent compliquées et combinent plusieurs fonctions. Par exemple, l'évolution de la température moyenne terrestre et du taux de carbone dans l'atmosphère peut se décrire par un tel système :

— il existe un cycle naturel de changements de températures causé par des variations périodiques de la Terre sur son orbite, l'inclinaison de son axe et la direction vers laquelle pointent ces axes ;
— la hausse des températures cause bien une hausse des niveaux de CO_2, après un délai de dizaines ou de centaines d'années, le temps que la nature réponde à ce changement de température, et inversement : une hausse de CO_2 implique une hausse de température.

On constate aussi, expérimentalement, qu'une trop grande quantité de carbone freine la croissance du taux de carbone. De même, si la température est trop élevée, la planète régule cette température et freine ses variations. Compte tenu de tout ceci, on obtient un système qui est, essentiellement, de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T'(t) & = & \sin(t) + 0{,}25C(t) - 0{,}01T(t)^2 \\ C'(t) & = & 0{,}1T(t) - 0{,}01C(t)^2, \end{array} \right.$$

le terme en $\sin(t)$ étant là pour tenir compte du cycle naturel périodique de variation de température ($C(t)$ et $T(t)$ désignent respectivement le taux de carbone et la température à un instant t). Comprendre ce système permettrait de comprendre quelles sont les conséquences d'une grande injection de carbone dans l'atmosphère (due notamment à l'activité humaine), et quelles sont les conséquences à terme pour la température $T(t)$. Mais ce système est bien compliqué, et avant d'en arriver là, il vaut mieux saisir l'essence de l'équation plus simple $f' = f$, et donc de l'exponentielle...

Comme la fonction exponentielle est entièrement caractérisée par l'équation $\exp' = \exp$ et la condition $\exp(0) = 1$, on peut en déduire, *a priori*, toutes ses propriétés. Dans l'optique de l'étude de la dynamique d'une population, par exemple, il serait de bon ton de connaître ses variations et ses limites. Elles sont bien connues, et découlent de la proposition suivante, extrêmement pratique.

Théorème 1.7 *La fonction* $\exp$ *vérifie, pour tous* x *et* y *réels, la relation* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *(qui peut aussi être écrite* $e^{x+y} = e^x e^y$*).*

Preuve. Les fonctions $x \mapsto \exp(x+y)$ et $x \mapsto \exp(x)\exp(y)$ sont toutes les deux dérivables, donc le quotient de ces deux fonctions également, de dérivée :

$$\frac{\exp'(x+y)\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)\exp'(x)\exp(y)}{(\exp(x)\exp(y))^2}$$

$$= \frac{\exp(x+y)\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)\exp(x)\exp(y)}{(\exp(x)\exp(y))^2} = 0.$$

Le quotient est donc constant, et il vaut 1 pour $x = 0$, donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. $\square$

Grâce à ceci, on déduit :

Proposition 1.8 *La fonction* exp *est strictement positive, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, et admet pour limites :*

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Preuve. Comme $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, on a en particulier $\exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x)$. Comme $\exp(x+(-x)) = \exp(0) = 1$, on en déduit que $\exp(x)\exp(-x) = 1$, donc exp ne s'annule jamais (sinon on pourrait avoir $0 = 1$). Ainsi, exp est soit toujours strictement positive, soit toujours strictement négative. Mais $\exp(0) = 1 > 0$, donc $\exp > 0$.

Comme $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout x réel, on en déduit que exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sa limite est finie ou $+\infty$. Or, si n est un entier positif, on a $\exp(n) = \exp(1)^n$. Le fait que exp soit strictement croissante entraine $\exp(1) > \exp(0) = 1$, donc $\exp(1)^n$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$, et exp n'est pas majorée et n'a pas une limite finie. Donc $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$. La limite en $-\infty$ en découle :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) \overset{[u=-x]}{=} \lim_{u\to+\infty} \exp(-u) = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{\exp(u)} = 0. \square$$

De la proposition 1.8, on déduit plusieurs propriétés mirifiques de l'exponentielle :

Proposition 1.9 *Pour tous x réel et n entier relatif, on a :*

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \quad \exp(nx) = \exp(x)^n.$$

Preuve. La première égalité découle de $\exp(x)\exp(-x) = 1$, égalité déjà rencontrée dans la preuve de la proposition précédente. La seconde se démontre d'abord si n est un entier naturel, par récurrence. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « Pour tout x réel, on a $\exp(nx) = \exp(x)^n$ ». Pour $n = 0$, on a bien $\exp(0 \cdot x) = \exp(0) = 1$, c'est bien la même chose que $\exp(x)^0$, donc on a $\mathcal{P}_0$.

À présent, supposons qu'on ait $\mathcal{P}_n$ pour un certain entier n. Alors,

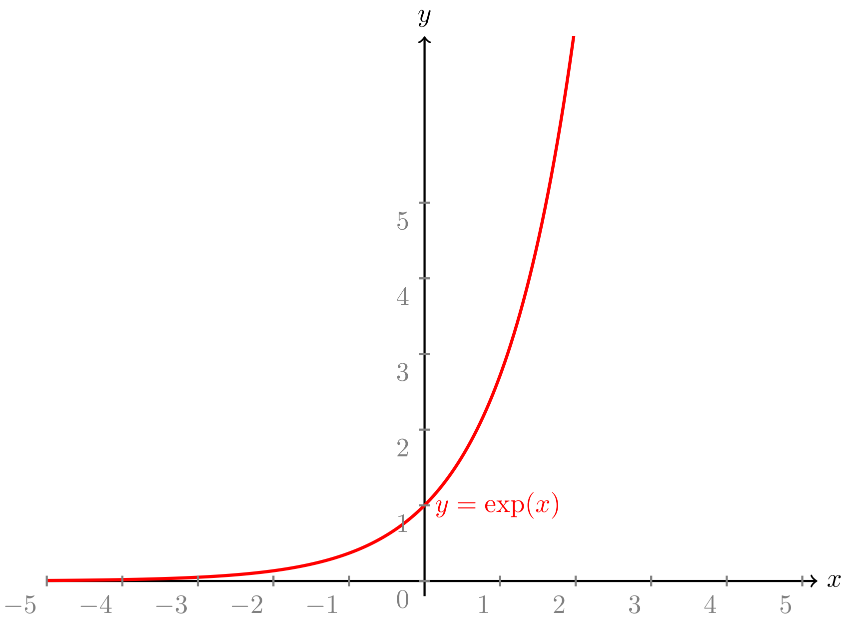
$$\exp((n+1)x) = \exp(nx+x) = \exp(nx)\exp(x) \overset{[\mathcal{P}_n]}{=} \exp(x)^n \exp(x) = \exp(x)^{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$. Par récurrence, on a donc le résultat pour tout entier n positif. Maintenant, si n est négatif, alors $-n$ est positif, donc $\exp(-nx) = \exp(x)^{-n}$. Alors,

$$\exp(nx) = \frac{1}{\exp(-nx)} = \frac{1}{\exp(x)^{-n}} = \exp(x)^n. \square$$

L'intérêt de cette fonction sera une évidence dans le chapitre sur les équations différentielles.

FIGURE 1.9 – Graphe de exp.



1.2.2 La fonction logarithme naturel

L'exponentielle est une fonction strictement croissante, définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $]0, +\infty[$. Comme c'est une fonction continue, elle prend donc toutes les valeurs possibles entre 0 et $+\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires qu'on redécouvrira au chapitre suivant. Mieux : elle ne prend chaque valeur qu'une seule fois, puisqu'elle est strictement croissante. Autrement dit, si y est un réel strictement positif, l'équation $e^x = y$ (d'inconnue x) a une seule solution.

Définition 1.10 (Logarithme) *Soit* $y > 0$. *On appelle* $\ln(y)$ *(ou* $\log(y)$*) l'unique solution de l'équation* $e^x = y$ *d'inconnue* x. *La fonction* $\ln$*, ainsi définie, est définie sur* $]0, +\infty[$.

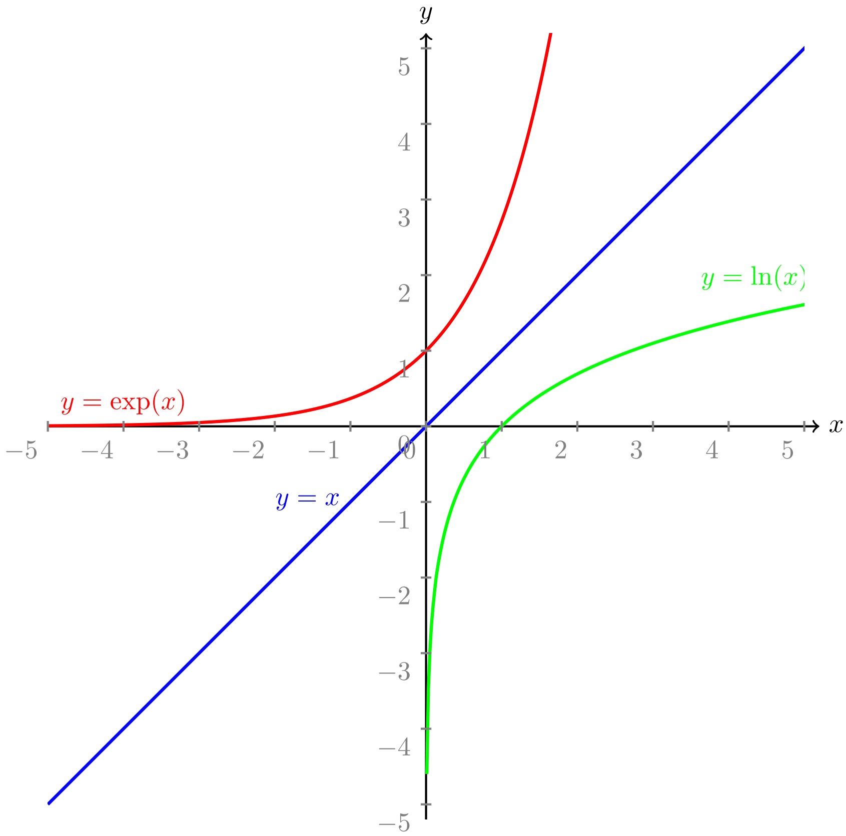
Le nom complet de cette fonction est, en fait, logarithme népérien, logarithme naturel ou logarithme hyperbolique, selon les usages.

Vue la définition, on a $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$, mais on a aussi $\ln(e^y) = y$ pour tout y réel : en effet, l'équation $e^x = e^y$ (d'inconnue x) a pour solution $x = y$, mais on a vu qu'on appelait aussi $\ln(e^y)$ l'unique solution à cette équation, donc $y = \ln(e^y)$. L'intérêt d'avoir $e^{\ln(x)} = x$ (pour tout $x > 0$) et $\ln(e^y) = y$ (pour tout y) servira dans les équations et les inéquations à résoudre.

J'ai mis en figure 1.10 les graphes des fonctions exp, $x \mapsto x$ et ln. On remarque que exp et ln ont des graphes symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On peut voir sur ce graphique que ln tend vers $-\infty$ en 0 (on remarque que c'est le contraire de l'exponentielle, qui tend vers 0 en $-\infty$), que $\ln(1) = 0$, puis que ln est strictement croissante. Prouver que $\ln(1) = 0$ est facile : en effet, la

FIGURE 1.10 – exp, $x \mapsto x$ et ln.



solution à l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$, donc $\ln(1) = 0$. Je vais bientôt prouver ce résultat d'une autre manière, grâce à une des propriétés les plus importantes du logarithme : elle transforme les produits en sommes. C'est, historiquement, pour cette raison qu'elle a été introduite, puisque cela permettait de faire des produits sur des grands nombres assez simplement, à l'aide de sommes.

Proposition 1.11 *Le logarithme vérifie, pour tous $a, b > 0$, la relation*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

C'est le contraire de l'exponentielle, il ne faut pas confondre ! Le logarithme transforme les produits en sommes, et ceci explique sa croissance visiblement lente : par exemple, $\ln(10^{5000})$ ne vaut « que » $\underbrace{\ln(10) + \cdots + \ln(10)}_{5000 \text{ fois}} = 5000 \ln(10) \simeq 11512{,}92546$.

C'est la seule formule à connaître sur le logarithme. Les autres formules que vous pourriez produire, du type $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)$ ou $\frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$, ne sont valables que dans votre imagination (et encore).

Preuve de la proposition. On sait que $\ln(ab)$ est la solution unique à l'équation $e^x = ab$, d'inconnue x. Si on montre que $\ln(a) + \ln(b)$ est aussi une solution de cette équation, alors on a forcément $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. Or :

$$\underbrace{e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)}}_{\text{l'exponentielle transforme les sommes en produits}} = ab,$$

car $e^{\ln(a)} = a$ et $e^{\ln(b)} = b$. Bref, j'ai bien prouvé que $\ln(a) + \ln(b)$ est solution de l'équation $e^x = ab$. $\square$

Voici comment on peut retrouver que $\ln(1) = 0$: comme $1 = 1 \times 1$, on a $\ln(1) = \ln(1 \times 1) = \ln(1) + \ln(1) = 2\ln(1)$. Donc, en soustrayant $\ln(1)$ de chaque côté, on trouve $0 = \ln(1)$.

Corollaire 1.12 *Soit $a > 0$. On a*

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a) \textit{ pour tout } n \textit{ entier, et } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a).$$

L'idée est que $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \cdots a}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n \text{ fois}} = n\ln(a)$. On va le démontrer par récurrence. La deuxième formule est bien pratique pour se débarrasser des fractions, au même titre que la formule $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ était bien pratique pour la même raison.

Preuve du corollaire. Si n est un entier naturel, on va le démontrer par récurrence. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « Pour tout $a > 0$, on a $\ln(a^n) = n\ln(a)$ ». Pour $n = 0$, on a bien $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$, c'est bien la même chose que $0 \cdot \ln(a)$, donc on a $\mathcal{P}_0$.

À présent, supposons qu'on ait $\mathcal{P}_n$ pour un certain entier n. Alors,

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a \cdot a^n) = \ln(a) + \ln(a^n) \overset{[\mathcal{P}_n]}{=} \ln(a) + n\ln(a) = (n+1)\ln(a).$$

Donc $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$. Par récurrence, on a donc le résultat pour tout entier n positif. Maintenant, comme $\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = \ln\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) = \ln(1) = 0$, on en déduit que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$, d'où la seconde formule du corollaire.

On peut désormais prouver que $\ln(a^n) = n$ même si n est un entier négatif ! En effet, si n est négatif (par exemple $n = -1$), alors $-n$ est positif, et on sait alors que $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$ pour tout réel $a > 0$. On a

$$\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n)\ln(a) = n\ln(a). \square$$

Grâce à ça, on peut aussi voir que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$. En effet,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

En fait, on prouvera qu'on a $\ln(a^x) = x\ln(a)$ pour *tout* réel x, mais il faudra d'abord définir ce que veut dire a^x... Et on le fera à l'aide combinée de l'exponentielle et du logarithme.

Quand on regarde la figure avec le graphe du logarithme, on voit qu'il est croissant, mais croît de moins en moins vite. Pour s'en rendre compte, on va calculer sa dérivée, qui est très intéressante :

Théorème 1.13 *La dérivée du logarithme est* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ *pour tout* $x > 0$.

Preuve du théorème. On a $e^{\ln(x)} = x$ pour tout x. Si je dérive cette égalité à gauche et à droite, j'obtiens 1 à droite (évidemment), et à gauche j'obtiens $e^{\ln(x)} \cdot \ln'(x)$. Donc $e^{\ln(x)} \cdot \ln'(x) = 1$. Or, $e^{\ln(x)} = x$, donc $x \cdot \ln'(x) = 1$, puis

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}. \square$$

En particulier, comme $\frac{1}{x}$ est strictement positif pour tout x positif, on en déduit que ln est une fonction strictement croissante. Mais comme $\frac{1}{x}$ devient de plus en plus petit, on se doute que ln croît de moins en moins vite.

On peut déduire de ces résultats les limites du logarithme en $+\infty$ et $-\infty$:

Proposition 1.14 *On a* $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Preuve de la proposition. Comme 2 est strictement plus grand que 1, on a $\ln(2) > \ln(1)$ (car ln est strictement croissante), donc $\ln(2) > 0$. De plus, $\ln(2^n) = n\ln(2)$, et comme $\lim_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty$ (si on avait eu $\ln(2) < 0$, la limite serait $-\infty$, c'est là que c'est important d'avoir $\ln(2) > 0$), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = +\infty.$$

La fonction ln est strictement croissante et, comme on vient de le voir, non majorée. Donc $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Pour prouver que $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, c'est plus facile : on pose $u = \frac{1}{x}$. Quand $x \to 0$, on a $u \to +\infty$. Alors :

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = \lim_{u\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to+\infty} -\ln(u) = -\infty,$$

puisqu'on vient de montrer que $\lim_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$. $\square$

Bref, résumons les résultats les plus importants, ainsi que ceux de l'exponentielle, dans un tableau :

	ln	exp
dérivée	$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	$\exp'(x) = \exp(x)$
identité	$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$	$e^{a+b} = e^a e^b$
limites	$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
valeur spéciale	$\ln(1) = 0, \ln(e) = 1$	$e^0 = 1$

Attention, on a vu que l'exponentielle était positive, mais ce n'est pas du tout le cas du logarithme ! Si $x < 1$, alors $\ln(x) < \ln(1)$ (car le logarithme est strictement croissant), donc $\ln(x) < 0$. C'est d'ailleurs nécessaire, puisqu'il tend vers $-\infty$ en 0. De la même manière, si $x > 1$, alors $\ln(x) > 0$.

1.2.3 Exponentielles et logarithmes en base a

Il existe d'autres exponentielles et d'autres logarithmes. On appelle exponentielle en base a (avec $a > 0$), et on note a^x, la fonction définie par $a^x = e^{x\ln(a)}$ pour tout x réel. Comme le logarithme est défini pour des valeurs positives, on comprend pourquoi on doit avoir $a > 0$. La notation est motivée par le fait que $a^n = (e^{\ln(a)})^n = e^{n\ln(a)}$ pour tout entier n relatif, et il est naturel d'étendre ceci à tout réel n. Ces fonctions vérifient exactement les mêmes propriétés que l'exponentielle, à une exception près : leur monotonie. En faisant le calcul directement avec $e^{x\ln(a)}$, et connaissant les propriétés de l'exponentielle, on peut déduire toutes les propriétés de ces fonctions.

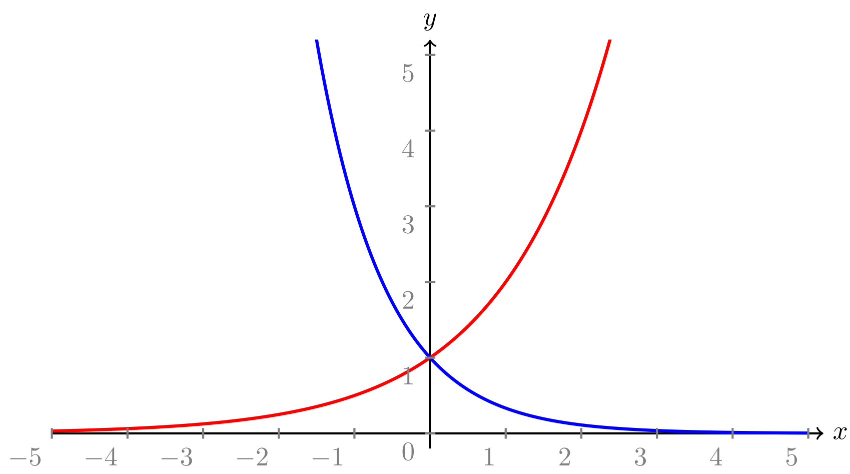
Proposition 1.15 *Soit $a > 0$. On a $a^{x+y} = a^x a^y$ pour tous x, y, et $a^0 = 1$.*

Preuve de la proposition. Exercice. □

Proposition 1.16 *Soit $a > 0$. La dérivée de $x \mapsto a^x$ est $\ln(a)a^x$. En particulier, $x \mapsto a^x$ est croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$.*

Preuve de la proposition. Exercice. □

FIGURE 1.11 – Graphes de $x \mapsto 2^x$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$: qui est qui ?



Proposition 1.17 *Soit $a > 0$. On a $a^{x+y} = a^x a^y$ pour tous x, y réels, et $a^0 = 1$.*

Preuve de la proposition. Exercice. □

Proposition 1.18 *Soit n un entier positif non nul. On a $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ (racine n-ième de a) pour $a > 0$. En particulier, $a^{1/2} = \sqrt{a}$.*

Preuve de la proposition. En effet, on a $(a^{1/n})^n = (e^{\frac{1}{n}\ln(a)})^n = e^{\frac{1}{n}\cdot n\ln(a)} = e^{\ln(a)} = a$. C'est donc bien une racine n-ième de a. □

On pouvait aussi le prouver ainsi : $\ln(x) = \ln((\sqrt[n]{x})^n) = n\ln(\sqrt[n]{x})$, donc, en prenant l'exponentielle, $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

De la même manière qu'on peut prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ grâce à la dérivée de l'exponentielle en 0, on peut prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$.

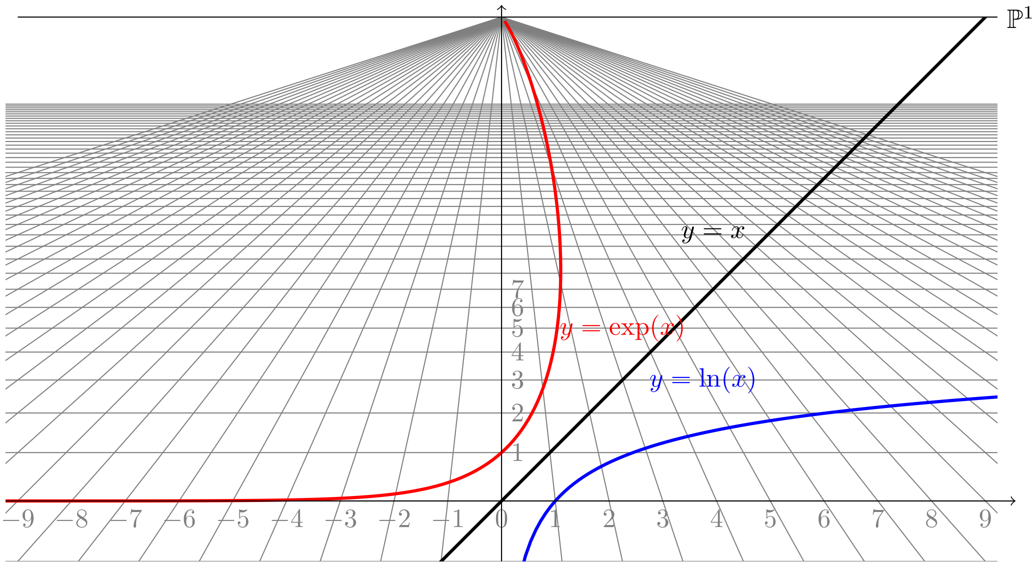
Enfin, on appelle logarithme en base a (où $a > 0$ et $a \neq 1$), et on note $\log_a$, la fonction définie par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ pour tout $x > 0$. Comme c'est simplement la fonction logarithme multipliée par la constante $\frac{1}{\ln(a)}$, il est très simple d'étudier cette fonction, la seule chose intéressante à ce sujet est :

Proposition 1.19 *On a, pour tout $a > 0$, $a \neq 1$, et tout $x > 0$: $\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x$.*

Preuve de la proposition. Soit $a > 0$, $a \neq 1$, et $x > 0$. On a $\log_a(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} = \frac{x\ln(a)}{\ln(a)} = x$. De même pour $a^{\log_a(x)} = x$. $\square$

On voit souvent le logarithme en base 10 en physique, pour simplifier les puissances de 10 : si $10^x = a$, alors $x = \log_{10}(a)$.

Figure 1.12 – L'exponentielle et le logarithme.



1.3 Exercices

1.3.1 Exercices sur les fonctions circulaires

Exercice 1. Soient x et y deux nombres réels. À quelle condition a-t-on $\cos(x) = \cos(y)$? Même question pour $\sin(x) = \sin(y)$.

Exercice 2. Sachant que $\pi/2 \leq x \leq \pi$ et que $\cos(x) = -\frac{1}{3}$, donner la valeur exacte de $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sans la calculatrice.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\cos(x) \leq \frac{1}{2} \qquad \sin(5x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan(2x) \leq 1$$

$$\cos(3x + \pi/2) = \sin(2x) \qquad \cos(x) = \sin(x) \qquad (\cos(x))^2 \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 4. À Syène, à midi le jour du solstice d'été, les rayons du Soleil atteignent le fond d'un puits profond de la ville. Au même moment, à Alexandrie, l'ombre d'un bâton de 1 mètre planté droit dans le sol est longue d'environ 13 cm. La distance à dos de chameau pour aller de Syène à Alexandrie est d'environ 788 km.

En déduire une approximation de la circonférence, et donc du diamètre, de la Terre avec les hypothèses que les rayons du Soleil arrivant jusqu'à la Terre sont tous parallèles et que la Terre est parfaitement ronde.

Exercice 5. L'objectif de cet exercice est de démontrer que si θ est différent de $\pm\pi$ (modulo 2π), alors

$$\cos(\theta) = \frac{1 - (\tan(\theta/2))^2}{1 + (\tan(\theta/2))^2}, \text{ et } \sin(\theta) = \frac{2\tan(\theta/2)}{1 + (\tan(\theta/2))^2}.$$

Tout d'abord, on considère la droite d'équation $y = t(x+1)$; vérifier qu'elle passe par le point de coordonnées $(-1{,}0)$. Montrer qu'elle coupe le cercle trigonométrique en un autre point de coordonnées $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$. Justifier que tous les points du cercle trigonométrique s'écrivent sous cette forme.

À présent soit $M(\cos(\theta), \sin(\theta))$ un point du cercle trigonométrique. D'après ce qui précède, il existe un réel t tel que $\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$. Il s'agit de montrer que $t = \tan(\theta/2)$. Pour cela, on montrera d'abord, à l'aide d'arguments géométriques, que $\tan(\theta/2) = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$, puis que $t = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = \frac{1}{3}$ et $AC = 1$. Peut-on calculer BC ? Et les cosinus et sinus de l'angle $\widehat{BCA}$? Et $\widehat{BAC}$? À l'aide de la fonction arcsin ou $\sin^{-1}$ sur la calculatrice, en déduire une valeur approchée des angles de ce triangle (en degrés).

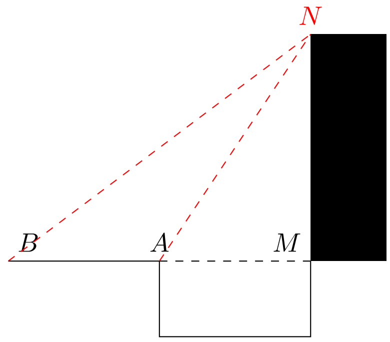
Exercice 7. Une tour est entourée par un large fossé, comme représenté grossièrement sur la figure 1.13. En se situant en A, on voit que l'angle $\widehat{MAN}$ égale 42 degrés. En reculant de dix mètres jusqu'au point B, on voit que l'angle $\widehat{MBN}$ égale 27 degrés. Les triangles AMN et BMN sont rectangles en M.

En exprimant MN en fonction de AM de deux façons différentes, calculer la longueur AM. En déduire la hauteur de la tour.

Exercice 8. Simplifier l'expression

$$\cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

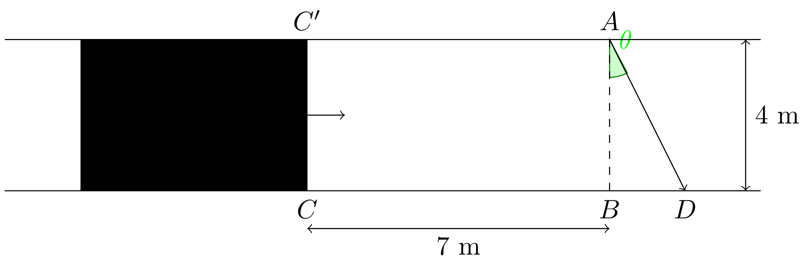
FIGURE 1.13 – Tour de l'exercice 7.



Exercice 9. Simplifier l'expression $(1 - \cos(t))(1 + \cos(t))$.

Exercice 10. Un lapin désire traverser une route de quatre mètres de large. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à une vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à sept mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite à la vitesse de 30 km/h. Sur la figure 1.14, l'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$. Le lapin part du point A en direction de D. Cette direction est représentée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$, avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

FIGURE 1.14 – Situation de l'exercice 10.



Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement AD et CD.

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si, et seulement si $\frac{7}{2} + 2\tan(\theta) - \frac{4}{\cos(\theta)} > 0$. En déduire quel angle est autorisé (en degrés) pour que le lapin soit sauf.

1.3.2 Exercice sur l'exponentielle et le logarithme

Exercice 1. Prouver tous les résultats du cours sur les fonctions $x \mapsto a^x$.

Exercice 2. Simplifier les expressions suivantes :

$$e^x e^{3-x}; \quad (e^x)^3 e^{-2x}; \quad e^{-3x} - \frac{e^x+1}{e^{3x}}; \quad \frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}}; \quad (e^x+e^{-x})^2; \quad e^{-2x} - \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$$\exp(x) > \exp(2x+3); \quad \exp(x^2) > \exp(2x)+3; \quad \exp(x)^4 > \exp(3x+5).$$

$$\exp(2x)-1 > 0; \quad \frac{\exp(x)+3}{\exp(x)+1} > 2; \quad \exp(x)-\exp(2x) \leq 0; \quad \exp(2x+5) < \exp(1-x).$$

Exercice 4. Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} e^x+e^y &=& 5 \\ e^x-e^y &=& 3 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rcl} e^x+2e^y &=& 3 \\ x+y &=& 0 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rcl} xy &=& -15 \\ e^x e^y &=& e^{-2} \end{array}\right.$$

Exercice 5. Résoudre l'équation $e^{2x+1} = e^{\frac{6}{x}}$.

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(e^x)^2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^3, \quad e^x - \frac{1}{e^x} > 0.$$

Exercice 7. Résoudre les inéquations suivantes :

$$\ln(2x-1) > -2; \quad \ln(x^2-4) < \ln(x).$$

$$\ln(x) < 1; \quad (\ln(x))^2 + \ln(x^3) > 2; \quad \ln(x) > \ln\left(\frac{3}{x}\right); \quad \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) \geq 1.$$

Exercice 8. Résoudre les équations suivantes :

$$\ln(x) = -5; \quad \ln(x^2-4) = \ln(x).$$

$$\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(2) - 1; \quad \ln(x) + \ln\left(\frac{2}{x^2}\right) = 2; \quad \ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) = -1.$$

Exercice 9. Résoudre $2(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 3 = 0$.

Exercice 10. Résoudre l'inéquation $\ln(x^2-3) < 0$ (préciser pour quelles valeurs de x le logarithme est bien défini !).

Exercice 11. Simplifier $\frac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Exercice 12. Simplifier $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right)$.

Exercice 13. Soit $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (vérifier pour quelles valeurs de x c'est défini !). Montrer que $f(-x) = -f(x)$.

Exercice 14. Soit u la suite géométrique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n$. À partir de quel rang les termes de la suite sont-ils supérieurs à 10^5 ?

Exercice 15. Soit $a > 0$, et $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction ln. Écrire l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Pour quelle valeur a la tangente T passe-t-elle par le point de coordonnées (0,1) ?

Chapitre 2

Études de fonctions

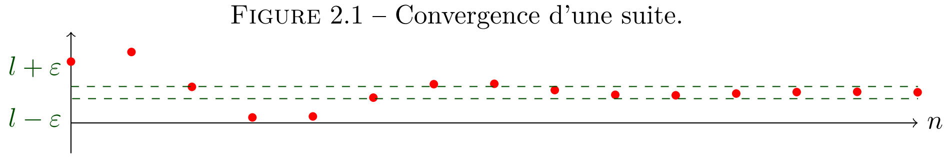
2.1 Notions locales

2.1.1 Préliminaires : convergence des suites

Définition 2.1 (Suite) *Une suite (réelle) est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note le plus souvent $u_n = u(n)$ ses valeurs (u_n est appelé* terme général *de la suite), et $u = (u_n)_{n\geq 0}$ la suite en elle-même.*

Le comportement asymptotique d'une suite est toujours une préoccupation majeure, en particulier si elle semble se rapprocher sans cesse d'une valeur particulière, qu'on appelle alors limite. Informellement, on dira qu'une suite admet une limite l si peu importe l'étau resserré autour de cette valeur (voir la figure 2.1), tous les termes de la suite finissent par y figurer. Cette idée mérite d'être formalisée dans la définition suivante.

FIGURE 2.1 – Convergence d'une suite.



Définition 2.2 (Convergence, divergence) *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite. On dit que cette suite est convergente, s'il existe un réel l tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| < \varepsilon$ dès que $n > N$. Dans ce cas, on dit que l est la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$, et on note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.*

La limite d'une suite est unique, car il est évidemment impossible de se rapprocher indéfiniment de deux valeurs distinctes à la fois, il faut faire un choix !

Définition 2.3 (Limite infinie) *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite. On dit que cette suite tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), si pour tout A, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > A$ (respectivement $u_n < A$) dès que $n > N$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $-\infty$).*

On peut être divergent sans pour autant avoir une limite infinie, comme en atteste l'exemple de la suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le critère suivant est très pratique pour montrer la convergence d'une suite, si elle n'est pas donnée simplement en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.4 *Une suite croissante est soit convergente, soit divergente avec pour limite* $+\infty$.

Corollaire 2.5 *Une suite croissante et majorée est convergente.*

2.1.2 Limites

Dans cette partie, D désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, le plus souvent le domaine de définition d'une fonction.

Intuitivement, la limite d'une fonction en un point doit être une valeur dont la fonction se rapproche indéfiniment. Il est plus simple de trouver un pendant mathématique à cette intuition dans le cas où la limite est finie, et en un point. Sur la figure 2.2, ce qui nous permet d'affirmer avec conviction que la fonction $x \mapsto x^2$ s'approche sans cesse de la valeur $l = 1$ autour du point $x_0 = 1$ est le fait que peu importe le rectangle centré en le point de coordonnées (x_0, l), toutes les valeurs de f y figurent : le graphe est encastré tout entier dans le rectangle. Si on rétrécit indéfiniment le rectangle dans le sens de la largeur, on pourra toujours, quitte à le rétrécir également dans le sens de la longueur, y faire entrer la courbe tout entier (voir la figure 2.3).

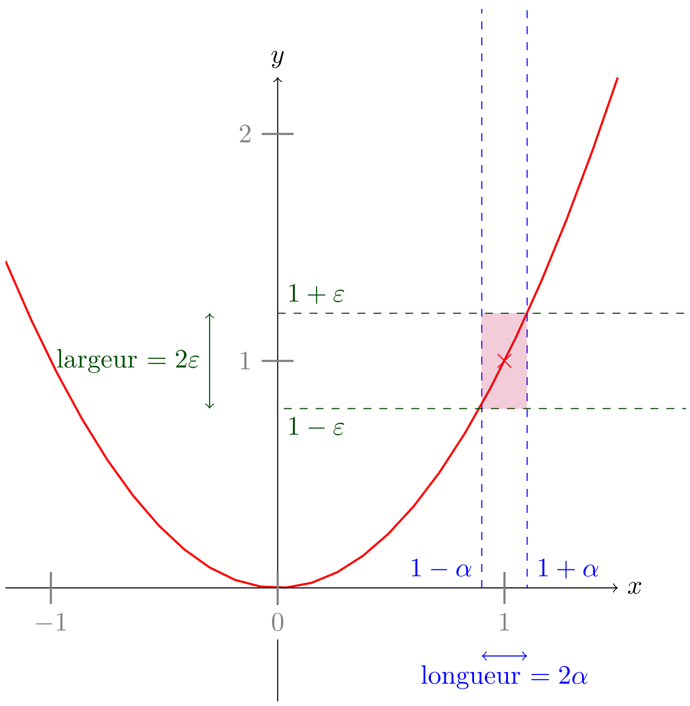


FIGURE 2.2 – Illustration de la notion de limite en un point.

Ceci ne serait pas possible en un point que la fonction n'approche pas indéfiniment : par exemple, toujours sur la figure 2.3, la fonction ne s'approche pas de la valeur $l = \frac{1}{2}$ autour de $x_0 = 1$, car on a trouvé un rectangle centré en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ qui ne contient pas toute la courbe.

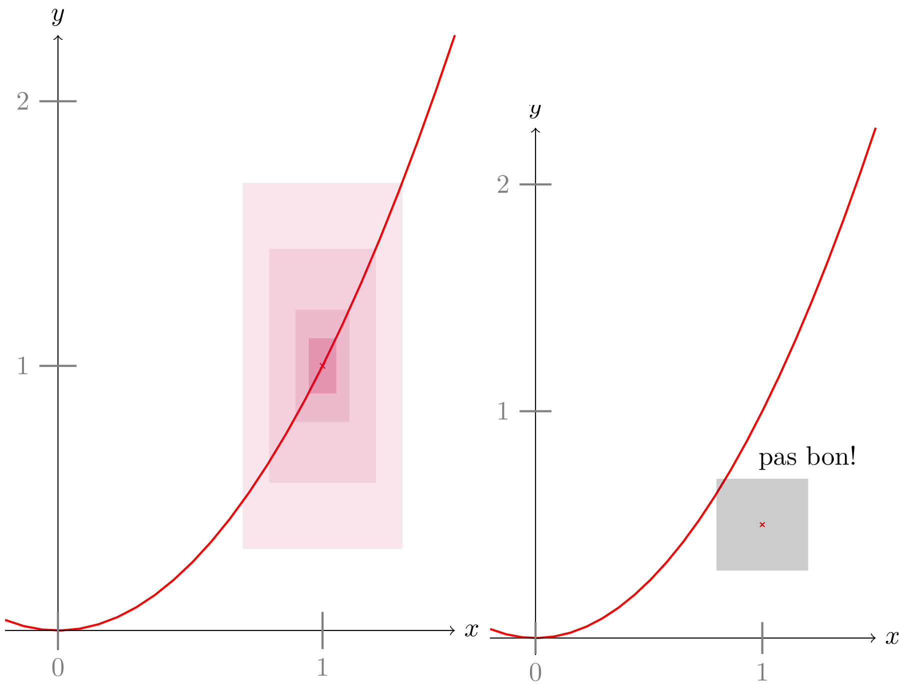


FIGURE 2.3 – Comportement de $x \mapsto x^2$ autour de $x_0 = 1$.

C'est ce qui va motiver notre définition de limite l en un point x_0 : si on décide de donner des noms à la largeur du rectangle (disons 2ε) et à sa longueur (disons 2α), alors un point $(x, f(x))$ du graphe de la fonction qui est à l'intérieur du rectangle centré en (x_0, l) vérifie

$$x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha, \text{ ce qui équivaut à } |x - x_0| < \alpha,$$

mais aussi $|f(x) - l| < \varepsilon$ par le même raisonnement. D'où la définition suivante :

Définition 2.6 (Limite finie en un point) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application, et x_0 un réel. La fonction f a pour limite l en x_0 (ou : f tend vers l en x_0) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - l| < \varepsilon$ dès que $|x - x_0| < \alpha$. On note*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x_0} f = l$$

la limite.

On voit que dans cette définition, x_0 n'a pas besoin d'être dans l'intervalle de définition de f. On peut voir dans l'exemple de la figure 2.4 que même si la fonction n'est pas définie en 0, il est clair qu'elle approche infiniment 0 quand x se rapproche de 0. Pour le prouver, soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe un $\alpha > 0$

tel que le rectangle centré en (0,0), de longueur 2α et de largeur 2ε contienne tout le graphe, c'est-à-dire :

$$\left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| < \varepsilon \text{ dès que } |x| < \alpha.$$

Il suffit, pour cela, de prendre $\alpha = \varepsilon$. En effet, dans ce cas là, on a pour tout x tel que $|x| < \alpha$:

$$\left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| < \alpha \underbrace{\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|}_{\leq 1} < \alpha = \varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

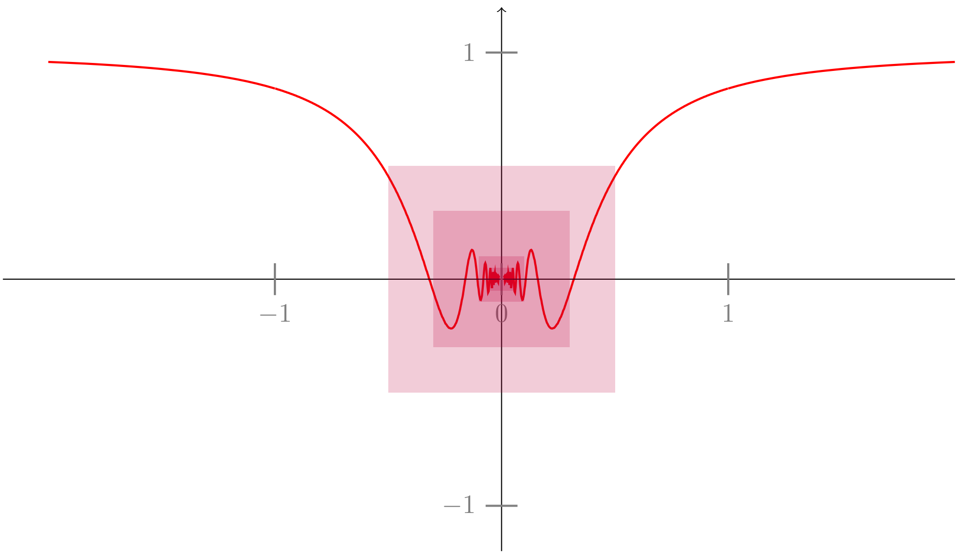


FIGURE 2.4 – Comportement de $x \mapsto x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ autour de $x_0 = 0$.

Dans les exercices, f sera définie au moins sur un intervalle contenant x_0, éventuellement privé de x_0, ou d'extrémité x_0, éventuellement privé de x_0.

Mais il est aussi commode de pouvoir étudier le comportement d'une fonction au voisinage de l'infini : par exemple, si $f(t)$ représente une population à un instant t, il est de bon ton de savoir si la population finira par s'éteindre, s'accroître sans cesse ou stagner. Comme on ne peut plus parler de rectangle centré en un point (puisque ce dernier doit dorénavant se trouver à l'infini), on doit réaménager la définition qui reste, malgré tout, plutôt intuitive :

Définition 2.7 (Limite finie en $+\infty$) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que D contient un intervalle de la forme $[a, +\infty[$. La fonction f a pour limite le réel l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les $f(x)$ pour x assez grand. Autrement dit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x) - l| < \varepsilon$ dès que $x > M$. On note*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \text{ ou } \lim_{+\infty} f = l$$

la limite.

Les figures 2.5 et 2.6 donnent deux exemples différents de comportements limites en $+\infty$: alors que la fonction $x \mapsto 1 - \exp(-x)$ semble tendre vers 1, et on sait le prouver grâce aux résultats anticipés du premier chapitre, la fonction sinusoïdale ne tend pas vers 0 : la courbe finit irrémédiablement par sortir d'un « tube » assez petit autour de la droite $y = 0$. En fait, on peut se douter que ni 0, ni aucun autre réel n'est limite du sinus en $+\infty$.

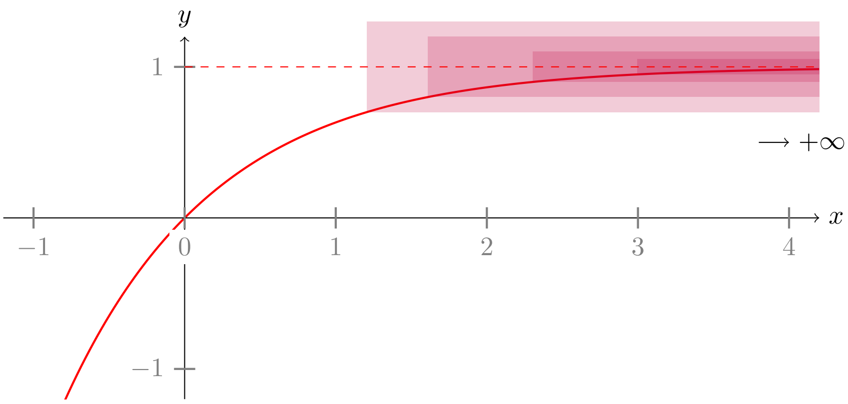


FIGURE 2.5 – Comportement de $x \mapsto 1 - \exp(-x)$ autour de $+\infty$.

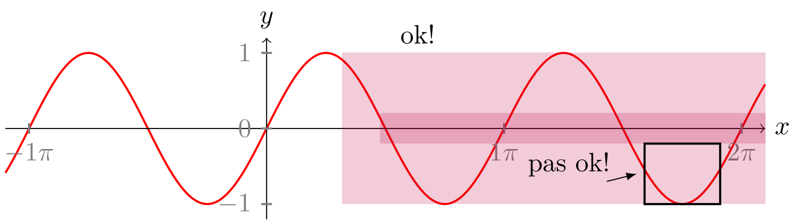


FIGURE 2.6 – Comportement de $x \mapsto \sin(2x)$ autour de $+\infty$.

Définition 2.8 (Limite finie en $-\infty$) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que D contient un intervalle de la forme $]-\infty, a]$. La fonction f a pour limite le réel l en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les $f(x)$ pour x assez petit. Autrement dit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x) - l| < \varepsilon$ dès que $x < M$. On note*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \text{ ou } \lim_{-\infty} f = l$$

la limite.

Pour inclure les limites infinies, on doit articuler différemment les définitions : l'idée est que peu importe la valeur M haute (ou basse) qu'on choisit, la fonction finit irrémédiablement par la dépasser, quitte à se rapprocher suffisamment du point limite. Dans la définition qui suit, la condition $|x - x_0| < \alpha$ traduit le fait d'être « suffisamment proche ».

Définition 2.9 (Limite infinie en un point) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application, et x_0 un réel. On suppose que tout intervalle ouvert non vide contenant x_0 contient des points de D.*

La fonction f a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en x_0 si pour tout réel A, il existe $\alpha > 0$ tel que $f(x) > A$ (respectivement $f(x) < A$) dès que $|x - x_0| < \alpha$. On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x_0} f = \pm\infty$$

la limite.

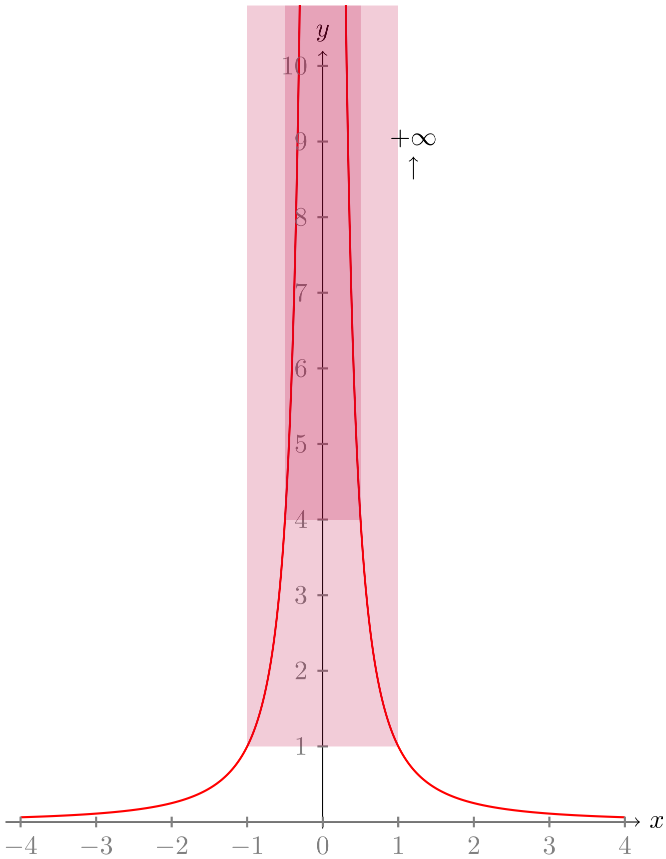


FIGURE 2.7 – Comportement de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ autour de 0.

Définition 2.10 (Limite infinie en $+\infty$) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application, et x_0 un réel. On suppose que D contient un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.*

La fonction f a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en $+\infty$ si pour tout réel A, il existe un réel M tel que $f(x) > A$ (respectivement $f(x) < A$) dès que $x > M$. On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x_0} f = \pm\infty$$

la limite.

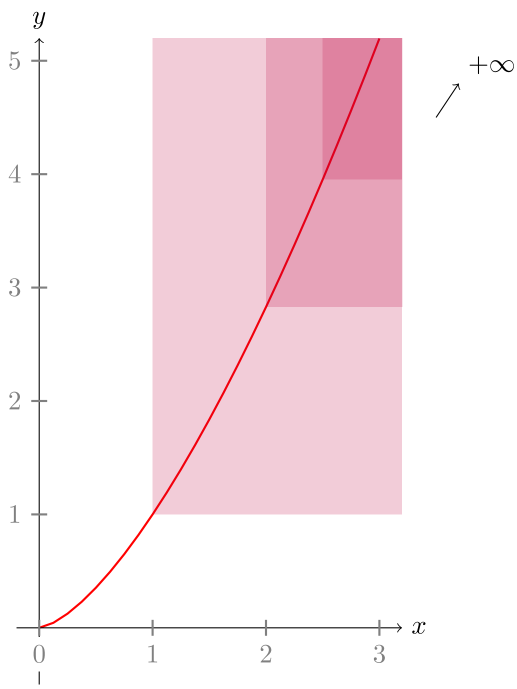


FIGURE 2.8 – Comportement de $x \mapsto x\sqrt{x}$ autour de l'infini.

La figure 2.8 donne un exemple de où la fonction a bel et bien une limite infinie en $+\infty$, tandis que la figure 2.9 montre une fonction sans limite du tout en $+\infty$: elle plonge sans cesse dans les valeurs négatives, donc sort de tout cadran supérieur droit où on l'y inviterait.

On définit de même $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Certaines fonctions n'ont pas le même comportement quand x tend vers x_0 selon que x reste inférieur ou supérieur à x_0. Ceci nécessite d'introduire les notions plus subtiles de limite à droite et de limite à gauche.

Définition 2.11 (Restriction) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et D_0 une partie de $\mathbb{R}$. On appelle restriction de f à D_0 l'application g définie sur $D \cap D_0$ par $g(x) = f(x)$. On la note $f_{|D_0}$.*

Définition 2.12 (Limite à droite) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application, et x_0 un réel. On suppose que tout intervalle ouvert non vide contenant x_0 contient des points de D. La fonction f a pour limite l à droite en x_0 (ou encore $f(x)$*

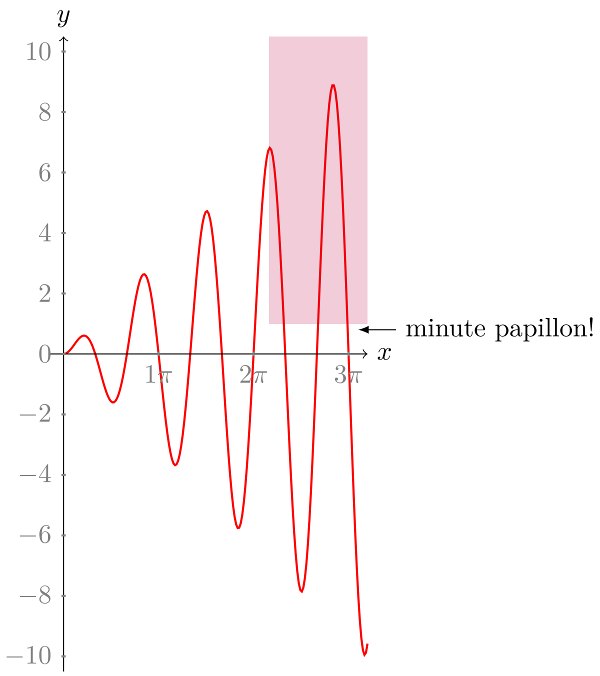


FIGURE 2.9 – Comportement de $x \mapsto x \cdot \sin(3x)$ autour de $+\infty$.

tend vers l quand x tend vers x_0 par valeur supérieures) si la restriction de f à $]x_0, +\infty[$ a pour limite l. On note

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x_0^+} f = l$$

la limite.

On définit de même la limite infinie à droite, et de même les limites à gauche en remplaçant la restriction de f à $]x_0, +\infty[$ par celle à $]-\infty, x_0[$.

Exemple. On a vu, au premier chapitre, que $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, tandis que $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$. Ceci provient du fait que $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} > 0$ pour $x < \frac{\pi}{2}$ proche de $\frac{\pi}{2}$ (donc sa limite ne peut être que positive ou $+\infty$), tandis que $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} < 0$ pour $x > \frac{\pi}{2}$ proche de $\frac{\pi}{2}$ (donc sa limite ne peut être que négative ou $-\infty$).

Pour calculer les limites d'une fonction, il est de bon ton de connaitre les limites de fonctions usuelles, et de savoir comment additionner, multiplier, *etc.*, les différentes limites possibles. D'où les tableaux suivants :

$\lim_{x_0} f$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x_0} g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x_0}(f+g)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	???	$-\infty$

Dans le cas $(+\infty) + (-\infty)$, tout peut se produire :

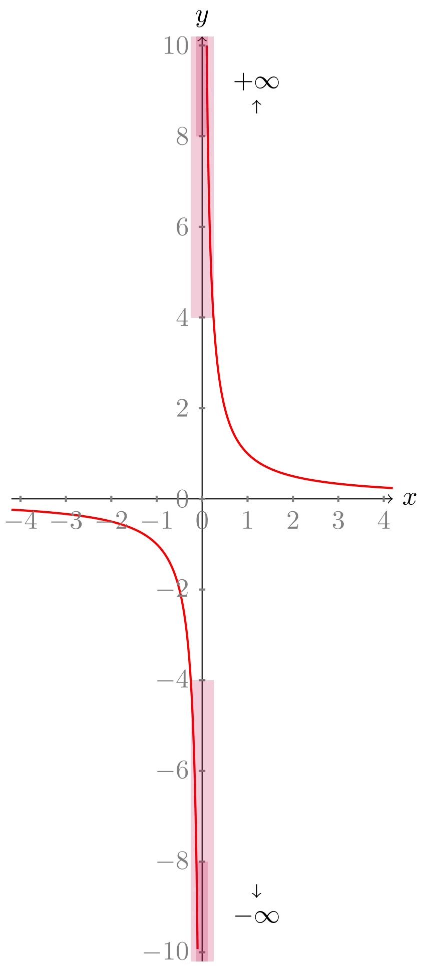


FIGURE 2.10 – Comportement de $x \mapsto \frac{1}{x}$ autour de 0.

— par exemple, si $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$, alors $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$, et $\lim\limits_{+\infty}(f+g) = +\infty$;

— si on pose $f(x) = x$ et $g(x) = -x^2$, alors c'est le contraire, $\lim\limits_{+\infty}(f+g) = -\infty$;

— par contre, si $f(x) = x$ et $g(x) = -f(x)$, alors $\lim\limits_{+\infty}(f+g) = 0$.

En fait, toute limite est possible, et pas seulement ces trois limites simples exhibées (il peut ne pas y avoir de limite du tout).

Voici le tableau correspondant pour les produits de limites : tout se passe comme on pense.

$\lim_{x_0} f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x_0} g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x_0}(f\cdot g)$	$l\cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	???	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Dans le cas $0\times\infty$, tout peut se produire :
— par exemple, si $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x^2$, alors $\lim_{+\infty} f=0$, $\lim_{+\infty} g=+\infty$, et $\lim_{+\infty}(f\cdot g)=+\infty$;
— si on pose $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x$, alors $\lim_{+\infty}(f\cdot g)=1$;
— par contre, si $f(x)=\frac{1}{x^2}$ et $g(x)=x$, alors $\lim_{+\infty}(f\cdot g)=0$.

Encore une fois, toute limite est possible, et pas seulement ces trois limites simples exhibées (il peut ne pas y avoir de limite du tout).

On dresse également le tableau qui établit les règles régissant les limites de quotients :

$\lim_{x_0} f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	0	l	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} g$	$l'\neq 0$	0 et $g\geq 0$	0 et $g\leq 0$	0 et $g\geq 0$	0 et $g\leq 0$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	???	0	???

Ce tableau peut en fait, si on y réfléchit bien, se déduire du précédent, puisqu'un quotient n'est rien d'autre qu'une multiplication : $\frac{f}{g}=f\times\frac{1}{g}$. On doit juste savoir que si g tend vers 0 en un point, alors $\frac{1}{g}$ tend vers $\pm\infty$ (selon son signe) en ce même point.

Les limites ont tendance à bien se calculer quand on compose les fonctions. Rappelons que si $f:D\to\mathbb{R}$ et $g:D'\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $f(D)\subseteq D'$, alors $g\circ f(x)=g(f(x))$ pour tout $x\in D$.

Proposition 2.13 *Soient $f:D\to\mathbb{R}$ et $g:D'\to\mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D)\subseteq D'$. Si $\lim_{x_0} f=y_0$ et $\lim_{y_0} g=l$, alors*

$$\lim_{x_0} g\circ f=l;$$

les lettres x_0, y_0 et l désignent des réels ou $\pm\infty$.

En pratique, on se dispense de cette écriture un peu lourde en remplaçant $f(x)$ par une variable u. La proposition dit que si $u=f(x)$, alors

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=\lim_{u\to f(x_0)} g(u),$$

où j'ai écrit abusivement $f(x_0)$ au lieu de $\lim_{x\to x_0} f(x)$ par commodité.

Exemple. Imaginons qu'on ait besoin de calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Intuitivement, on a envie de dire que quand x se rapproche de 0, $-\frac{1}{x^2}$ a tendance à se rapprocher de $-\infty$, donc $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ aurait tendance à se rapprocher de « $\exp(-\infty)$ » (notation abusive à ne surtout pas reproduire !), qui serait 0. La proposition est là pour dire que cette intuition est juste : on pose $u = -\frac{1}{x^2}$, et alors, comme $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$, on a

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{u\to -\infty} \exp(u) = 0,$$

comme on l'a vu au chapitre précédent.

Pour calculer des limites, maintenant qu'on sait comment elles se combinent avec des sommes, produits, quotients et compositions, il faut connaître un bagage minimum de limites de fonctions usuelles ! Une fois celles-ci connues, on pourra en déduire presque toutes les limites de fonctions obtenues à partir d'opérations élémentaires avec les fonctions usuelles (polynômes, fractions rationnelles...). À cet effet, le tableau suivant de limites est à connaître absolument. Au pire, un dessin bien sensé permet de recouvrer ce tableau.

fonction	$\lim_{x\to -\infty}$	$\lim_{x\to 0}$	$\lim_{x\to +\infty}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$	0	$+\infty$ si n pair $+\infty$ si n impair, $x \to 0^+$ $-\infty$ si n impair, $x \to 0^-$	0
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	non défini	0 si $\alpha > 0$ $+\infty$ si $\alpha < 0$	$+\infty$ si $\alpha > 0$ 0 si $\alpha < 0$
exp	0	1	$+\infty$
ln	non défini	$-\infty$	$+\infty$

Les cosinus et sinus ne sont pas dans ce tableau, car elles ont un comportement assez prévisible en un point, et n'ont pas de limite au voisinage de l'infini. Pourtant, on a besoin de savoir les gérer puisqu'elles peuvent apparaître et produire des limites finies, comme on l'a vu sur la figure 2.4. Le théorème suivant permet de se débarrasser des fonctions aux limites mal gérées, pourvues qu'elles soient bien encadrées :

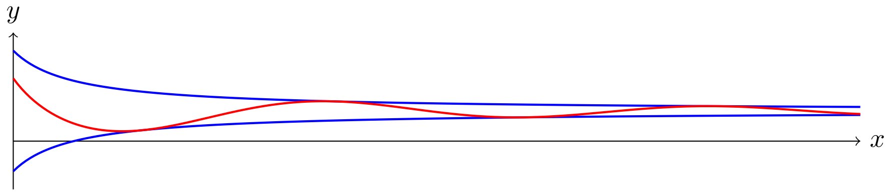
Théorème 2.14 (Théorème des gendarmes) *Soient f, g et h trois fonctions $D \to \mathbb{R}$, et soit x_0 un réel tel que nos trois fonctions soient définies autour de ce point. On suppose que pour x assez proche de x_0, on a $f \leq g \leq h$. Alors,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x) \leq \lim_{x\to x_0} h(x),$$

sous réserve que les limites existent. En particulier, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$, alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

Ce théorème vaut même si les limites sont infinies, et si x_0 est infini. Ceci permet de déduire la limite d'une fonction g peu commode de la limite de deux fonctions f et h plus sympathiques.

FIGURE 2.11 – Illustration du théorème des gendarmes.



Exemple. Comme $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, on a pour $x > 0$:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x},$$

donc, par le théorème des gendarmes,

$$\underbrace{\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x}}_{=0} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} \leq \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}_{=0},$$

ce qui prouve que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$. On procède de même pour déterminer la limite en $-\infty$.

Le théorème des gendarmes nous permet aussi de lever quelques cas d'indéterminées classiques, qui méritent d'être groupés dans les deux propositions suivantes :

Proposition 2.15 (Le logarithme perd toujours) *Soient a et b deux réels positifs. On a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^a}{x^b} = 0, \text{ et enfin } \lim_{x \to 0} x^b \ln(x) = 0.$$

Preuve (à omettre avant la lecture de la prochaine section). On définit une fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln(x) \end{cases}$. Sa dérivée égale $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, et l'étude de son signe donne le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

On voit que $f(x) > 0$, donc en particulier : $\ln(x) < x$ pour tout $x > 0$, et on en déduit que

$$0 < \frac{\ln\left(x^{b/2}\right)}{x^b} < \frac{x^{b/2}}{x^b} = x^{-b/2}.$$

Grâce à la propriété magique du logarithme, ceci équivaut à

$$0 < \frac{\ln(x)}{x^b} < \frac{2}{b}x^{-b/2}.$$

Par le théorème des gendarmes, comme $-b/2 < 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = 0$. La deuxième limite se déduit de la première simplement, le lecteur appréciera régler les détails. Enfin, pour la dernière, on pose $u = \frac{1}{x}$ pour se ramener aux limites précédentes :

$$\lim_{x\to 0} x^b \ln(x) = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u^b} \ln\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to+\infty} -\frac{\ln(u)}{u^b} = 0. \square$$

Proposition 2.16 (L'exponentielle gagne toujours) *Soit a un réel. On a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^a} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} x^a \exp(x) = 0.$$

Preuve (à omettre avant la lecture de la prochaine section). On peut supposer $a > 0$, car dans le cas $a < 0$ il n'y a pas d'indéterminée. On définit une fonction $f\ :\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\exp(x)}{x^{a+1}} \end{cases}$. Sa dérivée égale

$$f'(x) = \frac{\exp(x)(x-(a+1))}{x^{a+2}},$$

ce qui fournit le tableau de variation suivant :

x	0		$a+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m = f(a)$	$\nearrow$	

En particulier, on en déduit que $\frac{\exp(x)}{x^{a+1}} > m$ pour tout $x > 0$, donc $\frac{\exp(x)}{x^a} > mx$. Comme $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$, on en déduit que $m = f(a) > 0$, donc le théorème des gendarmes nous dit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^a} \geq \lim_{x\to+\infty} mx = +\infty,$$

et la proposition en découle. La seconde limite provient de la première, via le simple changement de variable $u = -x$ et la formule $\exp(-u) = \frac{1}{\exp(u)}$. $\square$

On dit donc que le logarithme perd toujours, parce qu'à chaque fois ce sont normalement des indéterminées : $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ ou $0 \cdot -\infty$. Mais à chaque fois, c'est la limite de x qui compte. Vu qu'il perd même face à un ridicule x, il est évident qu'il perd toujours face à l'exponentielle en cas d'indéterminée. Par exemple,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = +\infty$. Attention, le logarithme perd toujours (et l'exponentielle l'emporte tout le temps) *seulement* dans les cas d'indéterminées : en 0, par exemple, l'exponentielle ne gagne pas forcément, on a $\lim\limits_{x\to0} e^x \ln(x) = -\infty$, car $\lim\limits_{x\to0} e^x = e^0 = 1$, et $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$: on n'a pas d'indéterminée ici.

Grâce aux deux propositions précédentes et un peu de bon sens, on sait lever des indéterminées de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$ dès que le numérateur et le dénominateur sont des exponentielles, des logarithmes, ou des puissances. Pour les autres fonctions sous forme de quotient $\frac{f}{g}$ qui présentent ce genre d'indéterminées, on lève l'indéterminée en factorisant au numérateur et au dénominateur par *le terme le plus fort*. En procédant ainsi, si F et G sont les termes les plus forts dans f et g, on a

$$\frac{f}{g} = \frac{F}{G} \cdot \frac{1 + etc.}{1 + etc.},$$

et on sait déterminer la limite de $\frac{F}{G}$ dans plusieurs cas grâce aux propositions précédentes (les termes tus à l'intérieur des « *etc.* » tendent vers zéro, car on les a divisés par F et G qui étaient les termes les plus « forts »). Il convient donc de comprendre ce qu'on entend par terme le plus « fort ». Au voisinage de l'infini, on a la hiérarchie bien établie suivante :

$$\exp \gg \underbrace{x^m \gg x^n}_{\text{pour } m>n>0} \gg \ln \gg \underbrace{\frac{1}{x^n} \gg \frac{1}{x^m}}_{\text{pour } m>n>0},$$

et quand x tend vers 0, il faut être plus vigilant, parce que les fonctions puissances et inverses s'ordonnent dans l'autre sens ! On a

$$\underbrace{\frac{1}{x^m} \gg \frac{1}{x^n}}_{\text{pour } m>n>0} \gg \ln \gg \underbrace{x^n \gg x^m}_{\text{pour } m>n>0},$$

l'exponentielle n'ayant rien à faire ici puisqu'elle tend vers 1. Cet ordre n'est peut-être pas aussi intuitif que le précédent, car on a tendance à imaginer que $x \mapsto x^2$ est plus fort que $x \mapsto x$ ou $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$, par exemple. Mais il n'en est rien autour de 0, et la figure 2.12 est à garder en tête pour avoir les idées claires.

Exemple 1. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^3+x^2+x}{x^5+x^7+x^2}$ présente une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$ en 0. Pour la lever, je factorise par le terme le plus fort autour de 0 au numérateur (c'est-à-dire x) et au dénominateur (j'ai nommé x^2). Alors,

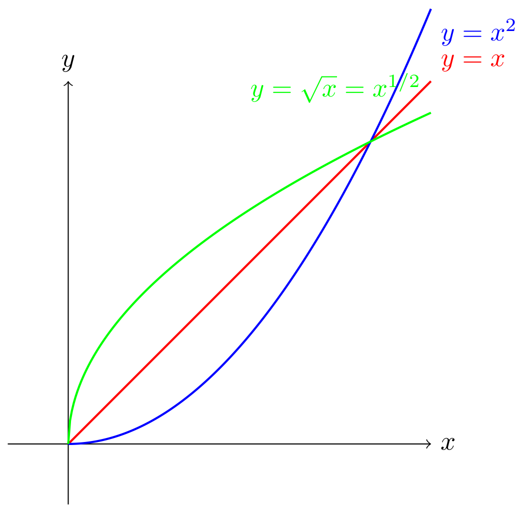
$$\frac{x^3+x^2+x}{x^7+x^5+x^3} = \frac{x}{x^3}\frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{x^2}\frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1} = 1$, on en déduit $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.

Exemple 2. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^4-x^2+1}{3x^4+6}$ présente une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ en $+\infty$. Pour la lever, je factorise par le terme le plus fort autour de 0 au numérateur (c'est-à-dire x^4) et au dénominateur (x^4 également). Alors,

$$\frac{x^4-x^2+1}{3x^4+6} = \frac{x^4}{x^4}\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{3+\frac{6}{x^4}} = \frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{3+\frac{6}{x^4}}.$$

FIGURE 2.12 – Comparaison des fonctions puissances autour de 0.



Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{3}$.

Attention, les ordres de grandeur ci-dessus valent autour de 0 et de l'infini. Pour le moment, on ne sait pas encore gérer la plupart des indéterminées ailleurs : en un point a, on sait encore comparer les puissances (il suffit de remplacer les $x \mapsto x^n$ par des $x \mapsto (x-a)^n$ dans nos considérations), mais dès que des exponentielles ou des logarithmes interviennent (ou pire encore, des fonctions trigonométriques, *etc.*), on ne sait plus quoi faire : les propositions qu'on a vues sur l'exponentielle et le logarithme tiennent au voisinage de 0 et de l'infini. Ainsi, on *ne sait pas* déterminer la limite de $\frac{\ln(x)}{x-1}$ quand $x \to 1$, par exemple ! Mais ça ne saurait tarder.

2.1.3 Continuité

La notion de limite permet de rigoureusement définir la notion de fonction « bien foutue », avec laquelle on travaille la plupart du temps. Ce sont les fonctions au comportement sensé, sans bond inattendu de leur graphe, qu'on peut tracer « sans lever le stylo ».

Définition 2.17 (Continuité) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, et $a \in D$. On dit que f est continue en a si $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. On dit que f est continue sur D si f est continue en tout point de D.*

À notre niveau, presque toutes les fonctions sont continues :

Proposition 2.18 *Les fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmes, puissances sont continues sur leurs domaines de définition.*

La continuité des fonctions polynomiales se déduit de celle de l'identité (évidente), en soutien avec la proposition suivante. La continuité des fonctions trigonométriques, logarithmes et puissances se déduit de la continuité de l'exponentielle (qu'on ne démontrera pas) et du corollaire 2.23. En effet, le chapitre sur les nombres complexes montrera que les cosinus et sinus s'écrivent à l'aide de l'exponentielle *.

Un exemple traditionnel de fonction non continue est la fonction « partie entière », qui prend un nombre réel et donne comme résultat le plus grand entier qui le précède (pour un nombre réel positif, cela revient à laisser tomber les « chiffres après la virgule »). Elle n'est pas continue en chaque entier relatif.

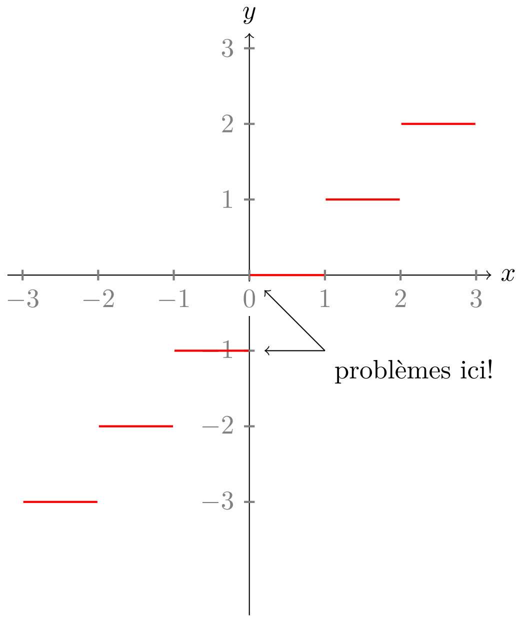


FIGURE 2.13 – Graphe de la fonction « partie entière ».

Grâce aux propriétés des limites déjà vues, on en déduit que la continuité aussi se transmet bien au travers des différentes opérations usuelles.

Proposition 2.19 *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur D, et a un réel. Alors,*
- *(somme et produit) si $a \in D \cap D'$, et si f et g sont continues en a, alors $f + g$ et $f \cdot g$ sont continues en a ;*
- *(quotient) si $a \in D \cap D'$ et si f et g sont continues en a, avec de plus $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a ;*
- *(composition) si $f(D) \subseteq D'$, et si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Pour les principales préoccupations de ce cours, la continuité sera surtout utile pour les trois propositions suivantes, toutes admises :

*. Même si c'est un peu pernicieux : pour le démontrer, on utilisera le fait que les cosinus et sinus sont dérivables, donc forcément continus, *cf.* la section suivante... Le serpent ne se mord pas la queue si on suppose avoir défini le cosinus et le sinus tels qu'on les voit apparaître dans le chapitre des nombres complexes, et qu'on en déduit toutes les propriétés qu'on a vues.

Théorème 2.20 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout m entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = m$.*

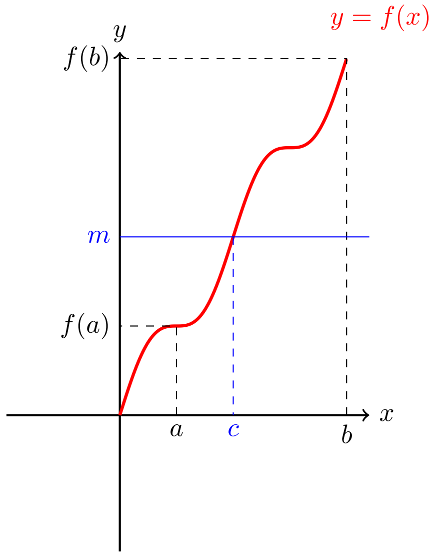


FIGURE 2.14 – Théorème des valeurs intermédiaires.

Proposition 2.21 *Toute fonction continue sur un segment atteint un maximum et un minimum.*

Proposition 2.22 (Caractérisation séquentielle) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans D et convergente, on a*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right).$$

C'est une méthode très commode pour déterminer la limite d'une suite, surtout si elle est définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue : si on sait montrer qu'elle converge par différentes méthodes, et qu'on note l sa limite, alors la relation écrite précédemment implique

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}}_{=l} = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) = f(l),$$

autrement dit, $l = f(l)$. Trouver la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ revient donc, simplement, à trouver les solutions à l'équation $l = f(l)$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $u_0 = \frac{\pi}{2}$. Un dessin convaincra aisément que $\sin(x) < x$ pour tout $x > 0$, ce qu'on démontrera rigoureusement avec les méthodes de la prochaine section. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$, donc la suite est décroissante. De plus, il est facile de montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n, donc la suite est décroissante et minorée (par 0), et converge. Soit l sa limite. D'après ce qu'on a dit ci-dessus, comme le sinus est une fonction continue, on doit avoir $l = \sin(l)$, ce qui ne se produit que pour $l = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

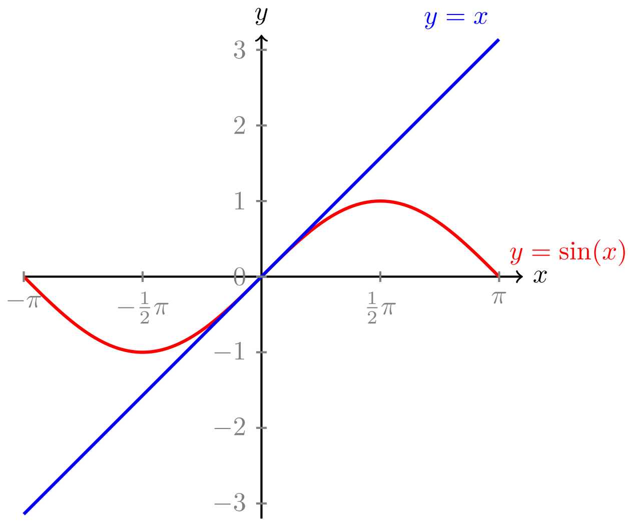


FIGURE 2.15 – Comparaison entre $y = x$ et $x \mapsto \sin(x)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet notamment d'assurer qu'une solution à une certaine équation existe. Par exemple, si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue, alors l'étude de la fonction continue $g : [0,1] \to [0,1]$ définie par $g(x) = f(x) - x$ montre que $f(x) = x$ a toujours une solution ; c'est l'objet d'un exercice du cours. On a aussi utilisé le théorème des valeurs intermédiaires pour assurer que l'équation $y = \exp(x)$ a toujours une solution pour $y > 0$, ce qui nous a permis de définir le logarithme naturel dans le chapitre précédent. C'est, en fait, le cas particulier d'un résultat plus général :

Corollaire 2.23 (Fonction réciproque) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone sur I. Alors,*

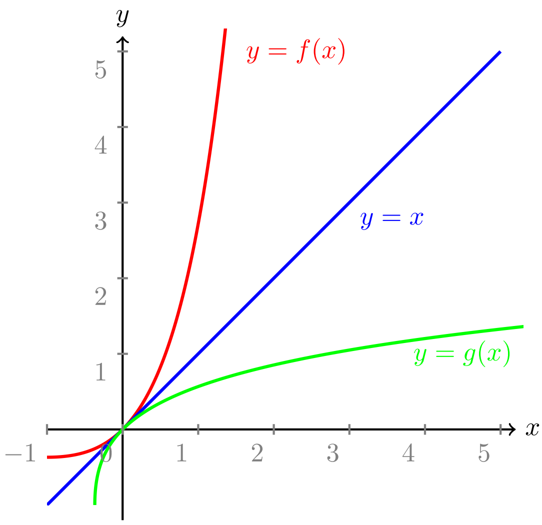
- *la fonction f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ et sa bijection réciproque $g : J \to I$ a le même sens de monotonie que celui de f. Dans un repère orthonormé du plan, les représentations graphiques de f et g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$;*
- *si de plus f est continue sur I alors J est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I et g est continue sur J.*

On ne démontrera rien de tout cela, on se contentera de l'admirer sur la figure 2.16.

2.1.4 Dérivées et tangentes

Mais l'étude d'une fonction ne se résume pas à son comportement limite : pour maintes études de phénomènes physiques, où la fonction à étudier représente une population, une vitesse, une température, *etc.*, ses variations sont au

Figure 2.16 – La fonction $f : x \mapsto x \cdot \exp(x)$ sur $]-1, +\infty[$ et sa réciproque.



moins tout aussi importantes que son comportement asymptotique, si ce n'est davantage. Il serait bon d'avoir une méthode, étant donnée une fonction f, pour obtenir ses variations par le pur calcul ; c'est la dérivation qui va nous permettre de déterminer ces variations, en étudiant le *signe* d'une fonction liée à f.

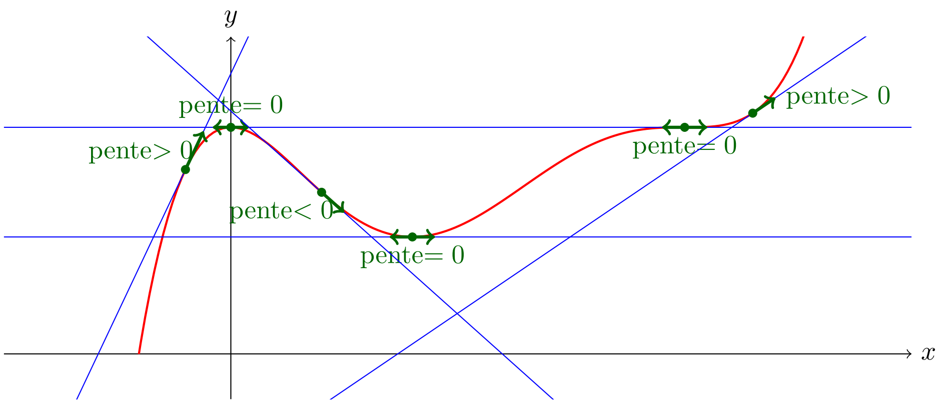


Figure 2.17 – Lien entre tangentes et variations.

Pour comprendre comment on définit la dérivée d'une fonction f, remarquons tout d'abord, figure 2.17 à l'appui, que les variations de la fonction autour d'un point semblent être données par la pente de la tangente à la courbe de f en ce point d'étude : si la tangente est « dirigée vers le haut », c'est-à-dire si sa pente est strictement positive, alors la fonction croît au voisinage de ce point. Si, par contre, elle est « dirigée vers le bas », c'est-à-dire si sa pente est strictement négative, alors la fonction décroît au voisinage de ce point. On ne peut pas conclure au sujet des variations de la fonction si la tangente est horizontale, mais on peut tout de même remarquer qu'en les maximums et minimums de la fonction, la pente est nulle. On voit donc que le signe de la pente de la tangente fournit des informations cruciales sur les variations de la fonction, et on doit donc trouver une méthode pratique pour exprimer *la pente de la tangente à la courbe de f en un point.*

Pour y parvenir, voici ce que ferait Batman : on ne sait pas calculer la pente de la tangente à la courbe de f en un point a, parce qu'on a besoin de deux points pour déterminer l'équation d'une droite, mais ici on n'en a qu'un seul (qui est $(a, f(a))$). On considère donc des droites passant d'une part par $(a, f(a))$, et d'autre part par un autre point bien connu. En prenant des droites de plus en plus proches de la tangente étudiée jusqu'à se confondre avec elle, les pentes de ces droites devraient logiquement tendre vers celle de la tangente.

Plus rigoureusement, imaginons qu'on cherche à calculer la pente de la tangente de la courbe de f en a (la tangente passe donc par le point de coordonnées $(a, f(a))$). Pour x un réel donné différent de a, soit D_x la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$: sa pente est facile à calculer, et égale

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On a représenté plusieurs D_x possibles sur la figure 2.18, par des droites bleues. On voit que plus x est proche de a, plus la droite D_x se rapproche de la tangente à la courbe f en a, et donc plus la pente de D_x se rapproche de celle de la tangente. Quand on prend la limite pour $x \to a$, on est en droit de penser que la pente de D_x a pour limite la pente de la tangente. C'est ce qui motive la définition suivante :

Définition 2.24 (Dérivée, fonction dérivable) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en un point $a \in D$ si la limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est finie. On note alors $f'(a)$ cette limite ; il s'agit de la pente de la tangente de f au point a.

Si, dans le raisonnement heuristique ci-dessus, on remplace x par une abscisse $a + h$, avec h qui devient de plus en plus petit, alors on peut prendre comme définition de la dérivée :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Les deux limites sont nécessairement les mêmes, on passe de l'une à l'autre en posant $x = a + h$ (donc $h = x - a$).

Remarque. On peut donc écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point a : elle a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. En effet, pour $x = a$ on obtient $y = f(a)$, donc $(a, f(a))$ appartient à cette droite. On a défini $f'(a)$ précisément pour que ce soit la pente de cette tangente, d'où sa présence devant $(x - a)$.

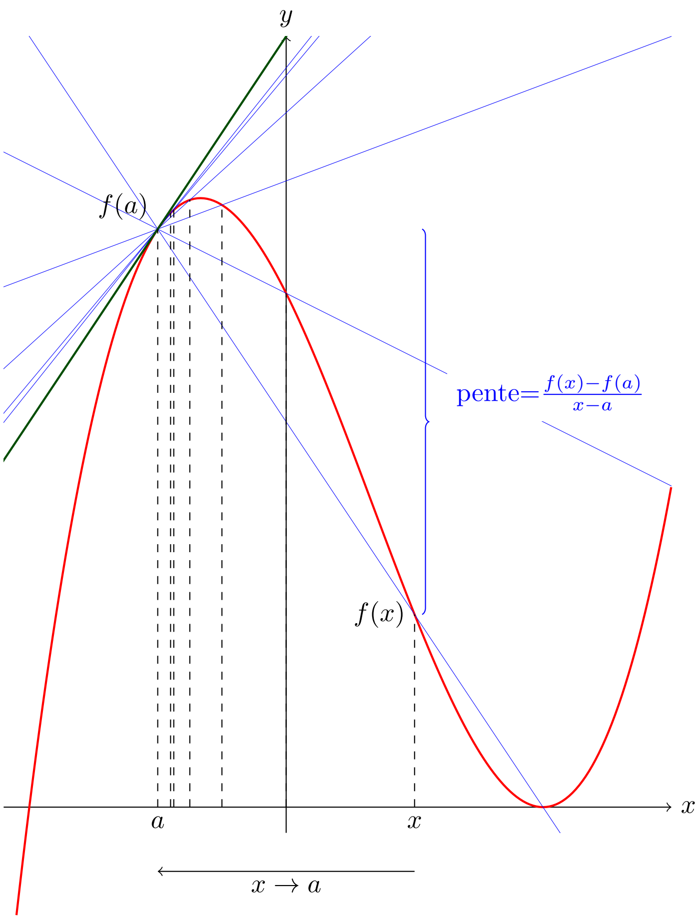


FIGURE 2.18 – Approximation de la pente de la tangente par plusieurs droites.

Définition 2.25 (Fonction dérivée) *On dit que f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I. Ceci définit sur I une fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$.*

Exemple 1. Étudions la dérivabilité des fonctions affines $x \mapsto ax + b$ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{(ax + \cancel{b}) - (ax_0 + \cancel{b})}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a,$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a,$$

donc $x \mapsto ax + b$ est dérivable en tout réel x_0, de dérivée a, qui est la pente de notre fonction affine : ce n'est pas une surprise, vu que la dérivée est la pente de la tangente en chaque point, et qu'ici chaque tangente est confondue avec la courbe de la fonction affine (qui est déjà une droite). En particulier, une fonction constante a une dérivée nulle (elles correspondent à $a = 0$).

Exemple 2. Étudions la dérivabilité de $x \mapsto x^2$ en un point $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)} = x + a,$$

donc

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a}(x+a) = 2a,$$

donc $x \mapsto x^2$ est dérivable en tout réel a, de dérivée $2a$.

Exemple 3. Étudions la dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{x}$ en un point $a \geq 0$. On a :

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{x - a}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}},$$

donc

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a = 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $x \mapsto \sqrt{x}$ est *non dérivable en 0*, et dérivable pour tout réel strictement positif a, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. On note que le fait que ce soit non dérivable en 0 se voit sur le graphe de la fonction : la tangente a une pente verticale.

Proposition 2.26 *Une fonction dérivable est continue.*

Preuve. Soit f une fonction dérivable. Montrer qu'elle est continue en un point a de son domaine de définition reviendrait à prouver que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Or,

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a),$$

et comme $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie (égale à $f'(a)$), on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \underbrace{\left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)}_{=f'(a)} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x \to a}(x - a)\right)}_{=0} + f(a) = f(a). \square$$

Proposition 2.27 *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et a un réel. Alors,*

— *(somme) si $a \in D \cap D'$, et si f et g sont dérivables en a, alors $f + g$ est dérivable en a, et*

$$(f + g)' = f' + g';$$

— *(produit) si $a \in D \cap D'$, et si f et g sont dérivables en a, alors $f \cdot g$ est dérivable en a, et*

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'.$$

En particulier, la dérivée de af pour a réel, est af', car $a' = 0$.

— *(quotient) si $a \in D \cap D'$ et si f et g sont dérivables en a, avec de plus $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a, et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

En particulier, si g est dérivable et $g'(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a, et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

— *(composition) si $f(D) \subseteq D'$, et si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a, et*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Autrement dit, pour dériver $g(u)$, on « dérive g comme si de rien n'était » et on multiplie par u' pour rectifier.

Grâce à ces formules, on en déduit aisément la dérivée de beaucoup de fonctions construites à l'aide de fonctions usuelles.

Exemple 1. Par exemple, comme on a déjà vu la dérivée des fonctions $x \mapsto x$ (qui est $x \mapsto 1$) et $x \mapsto x^2$ (qui est $x \mapsto 2x$), on en déduit par produit que $x \mapsto x^3$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$. Plus généralement, les fonctions du type $x \mapsto x^a$ avec a réel ont des dérivées bien connues, qui méritent d'être données dans la proposition suivante :

Proposition 2.28 *Pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto n \cdot x^{n-1}$. Pour tout réel α, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.*

La dichotomie dans l'énoncé de la proposition est importante, même si on a l'impression de dire la même chose deux fois : les premières fonctions citées s'obtiennent simplement en multipliant x (un réel quelconque) par lui-même n fois, tandis que les deuxièmes fonctions se définissent, on l'a vu, à l'aide de l'exponentielle et du logarithme.

Preuve. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto 1 = 1 \cdot x^0$, on l'a établi en même temps que la dérivabilité de toutes les fonctions affines. Comme $x^{n+1} = x^n \cdot x$, ceci suggère un raisonnement par récurrence.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto n \cdot x^{n-1}$ ». On vient d'affirmer que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Montrons que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraine celle de $\mathcal{P}_{n+1}$: comme $x^{n+1} = x^n \cdot x$ pour tout x réel, on déduit de la proposition suivante que $x \mapsto x^{n+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et en notant $f(x) = x^n$ puis $g(x) = x$, on a

$$(x \mapsto x^{n+1})'(x) = (fg)'(x) = (f'g + fg')(x) \overset{[\mathcal{P}_n]}{=} n \cdot \underbrace{x^{n-1} \cdot x}_{=nx^n} + x^n = (n+1)x^n,$$

et $(n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}$ est bien de la forme voulue, donc $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$. Par récurrence, on a bien le résultat voulu pour tout n.

À présent, soit α réel. On a vu, d'une part, que pour tout $x > 0$, on a la définition $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$, et d'autre part un passé lointain nous a révélé les dérivées de exp et ln. Sachant cela et la formule de composition des dérivées, on en déduit que $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur le domaine de définition de $\alpha \cdot \ln$ (c'est-à-dire $\mathbb{R}_+^*$), de dérivée $(\exp' \circ (\alpha \cdot \ln)) \cdot (\alpha \cdot \ln)'$. Comme $\exp' = \exp$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned}(x \mapsto x^\alpha)'(x) &= \exp(\alpha \ln(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} \\ &= \alpha \cdot x^{\alpha-1}. \square\end{aligned}$$

Exemple 2. La dérivée des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ se déduit de celles des fonctions de la proposition, grâce à la dérivabilité des quotients de fonctions dérivables, et vaut $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$ sur $\mathbb{R}^*$. Comme $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et $\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$, on constate que finalement, la formule de la proposition vaut pour tout entier n relatif.

Exemple 3. La fonction $x \mapsto (1+x^2)^7$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée des fonctions $x \mapsto x^7$ et $x \mapsto 1+x^2$ qui sont toutes les deux dérivables (sur $\mathbb{R}$), et sa dérivée égale $x \mapsto 7(1+x^2)^6 \cdot 2x$: j'ai dérivé $x \mapsto (1+x^2)^7$ « comme $x \mapsto x^7$ » (dont la dérivée est $7x^6$, donc dans cet exemple j'obtiens déjà $7(1+x^2)^6$), et pour rectifier je dois multiplier par la dérivée de $x \mapsto 1+x^2$, qui est $2x$.

La dérivée se comporte terriblement bien par toutes les opérations, puisqu'on sait également calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction dont je connais la dérivée.

Proposition 2.29 (Fonction réciproque) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in I$, telle que sa réciproque $g : J \to I$ existe. On suppose que f' ne s'annule pas. Alors la fonction réciproque g est dérivable sur J, et pour tout $a \in J$:*

$$g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))}.$$

Preuve. Pour s'assurer que g est dérivable en un point $a \in J$, on doit démontrer que $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Or, le changement de variable $u = g(x)$ donne :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} &= \lim_{u\to g(a)} \frac{u-g(a)}{f(u)-a} \\ &= \lim_{u\to g(a)} \frac{u-g(a)}{f(u)-f(g(a))} \\ &= \frac{1}{f'(g(a))}. \square \end{aligned}$$

C'est ainsi qu'on avait calculé la dérivée de ln, quand on l'avait définie en tant que réciproque de exp. Si on ne se souvient plus de cette expression qui peut paraître compliquée, voici comment la retrouver : on écrit que $f(g(x)) = x$. La formule de dérivation d'une composition dit que la dérivée de $f \circ g$ est $(f' \circ g) \cdot g'$, et de plus la dérivée de $x \mapsto x$ est 1. Donc, en dérivant les deux membres de l'égalité $f(g(x)) = x$, on obtient

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1,$$

ce qui permet de retrouver la formule donnée dans la proposition précédente.

Exemple 1. On va retrouver la dérivée de la fonction racine carrée, et plus généralement de la fonction racine n-ième pour tout entier naturel $n \geq 2$ (qui existe sur $\mathbb{R}^*$ si n est impair, sur $\mathbb{R}_+^*$ si n est pair). Étant donné que $(\sqrt[n]{x})^n = x$, dériver cette égalité donne $n(\sqrt[n]{x})^{n-1} \cdot \sqrt[n]{x}' = 1$, donc

$$\sqrt[n]{x}' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

On retrouve bien les dérivées prédites par la proposition 2.28 : comme $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, la proposition en question nous dit que sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ égale $\frac{1}{n}x^{1/n-1}$, et c'est exactement ce qu'on a retrouvé ici : $\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{-(n-1)/n} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$. Toutefois, ici, on a gagné le fait que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ si n est impair, alors que la proposition 2.28 ne nous informait que sur $\mathbb{R}_+^*$ (encore une fois parce que les fonctions puissances ont été définies à l'aide du logarithme).

Exemple 2. La fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, et on peut donc définir sa réciproque, notée $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ dans la littérature. On peut calculer précisément sa dérivée, qui est relativement simple. En effet, partant de la relation $\cos(\arccos(x)) = x$, on en déduit encore une fois que $-\sin(\arccos(x)) \cdot \arccos'(x) = 1$, puis que $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}$. On ne va bien sûr pas se satisfaire de cette expression peu éclairante, qu'on peut heureusement modifier : comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on en déduit que $\sin(\arccos(x))^2 = 1 - \cos(\arccos(x))^2 = 1 - x^2$. Le sinus étant positif sur $[0,\pi]$ (la vie est bien faite, même si ce n'est pas du tout une coïncidence), on a même $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Finalement,

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On peut calculer de la même manière les dérivées des réciproques du cos sur les autres intervalles où elle est strictement monotone, c'est un exercice intéressant.

En bref, pour savoir dériver une fonction obtenue à l'aide d'opérations élémentaires et réciproques entre fonctions classiques, il suffit de savoir dériver ces fonctions classiques. Le tableau suivant fournit l'essentiel des fonctions à connaître, et à partir de ce tableau, toutes les fonctions se dérivent toutes seules.

fonction	domaine de dérivabilité	dérivée
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
exp	$\mathbb{R}$	exp
ln	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
cos	$\mathbb{R}$	$-\sin$
sin	$\mathbb{R}$	cos

2.1.5 Tableaux de variations

Comme je l'ai annoncé en introduction, la dérivée d'une fonction est précisément la pente des tangentes de la courbe de la fonction étudiée. Le signe de la pente donne le sens de croissance de la fonction, puisque l'intuition semble indiquer que la fonction suit la direction donnée par la tangente en chaque point. Cette intuition, même si elle n'est pas complètement évidente, est bien vraie, et la confirmer est un des grands succès historiques du calcul infinitésimal.

Proposition 2.30 *Soit f une fonction dérivable en un point a. Alors,*

— *Si $f'(a) > 0$, alors f est strictement croissante dans un voisinage de a ;*
— *Si $f'(a) < 0$, alors f est strictement croissante dans un voisinage de a ;*
— *Si f atteint un maximum ou un minimum local, alors $f'(a) = 0$.*

Pour l'instant, les informations sont seulement « autour d'un point », mais une conséquence directe de la proposition est le corollaire suivant, qui donne la monotonie d'une fonction sur tout un intervalle.

J'attire l'attention sur le fait que le dernier point de la proposition est d'une toute autre nature : on n'a pas donné d'information sur le cas où f' s'annule en a, parce qu'on ne sait rien dire dans ce cas ! Les figures 2.17 et 2.23 (plus loin) montrent bien que ces points, où la tangente est horizontale, ne concernent pas nécessairement des extremums ; ce qui est assez logique, au fond. En vérité, on a besoin d'en savoir plus sur la dérivée de la dérivée (donc la dérivée seconde) pour décider du comportement de la fonction autour d'un point d'annulation de la dérivée, mais je ne m'en soucierai pas dans ce cours. Toutefois, on sait que les extremums de la fonctions sont à chercher *parmi* les points où la dérivée s'annule.

Corollaire 2.31 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,*

— *Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I ;*
— *Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I ;*
— *Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.*

Ce corollaire est formidable, car il s'avère qu'on sait effectivement calculer la dérivée d'une fonction dans beaucoup de cas ! Alors, l'étude de son signe, et simplement de son signe, permet de connaître les variations de la fonction. Cette fois-ci, l'annulation de la dérivée donne une information franche : on avait vu qu'une fonction constante admet une dérivée nulle ; ce sont en fait les seules fonctions dont la dérivée est nulle partout.

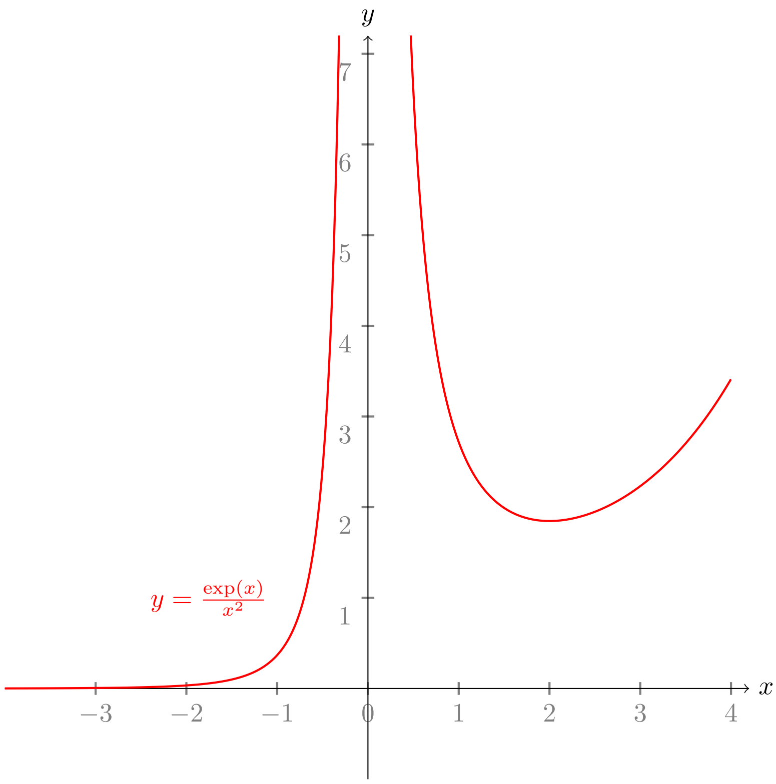
Exemple 1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\exp(x)}{x^2} \end{cases}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que fonction de deux fonctions dérivables, et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{\exp(x)x^2 - \exp(x) \cdot 2x}{x^4} = \exp(x) \cdot x \cdot \frac{x-2}{x^4}.$$

On a vu que le signe de f' donne le sens de variations de f. Comme $\exp(x) > 0$ et $x^4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, seul le signe de $x(x-2)$ importe. D'où le tableau suivant, qui résume tout :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	↘	$\frac{\exp(2)}{2}$	↗	$+\infty$

FIGURE 2.19 – Graphe de $f(x) = \frac{\exp(x)}{x^2}$.



Le graphe de la fonction est tracé sur la figure 2.19.

Exemple 2. Les études de variations permettent de dénicher de nouvelles inégalités vérifiées par nos fonctions préférées : la manœuvre consiste, si on veut démontrer une inégalité du type $f(x) \leq g(x)$ vérifiée sur un certain intervalle I (ou une réunion d'intervalles), à étudier la fonction $g - f$. Si elle est dérivable, on fait son tableau de variation, et on en déduit son minimum. S'il est positif, ceci prouve que $g - f \geq 0$, donc $g \geq f$. Illustrons cette méthode sur un exemple : je veux démontrer que $\exp(x) \geq 1 + x$ pour tout x réel. Pour ceci, je pose $h(x) = \exp(x) - (1 + x)$ pour x réel. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

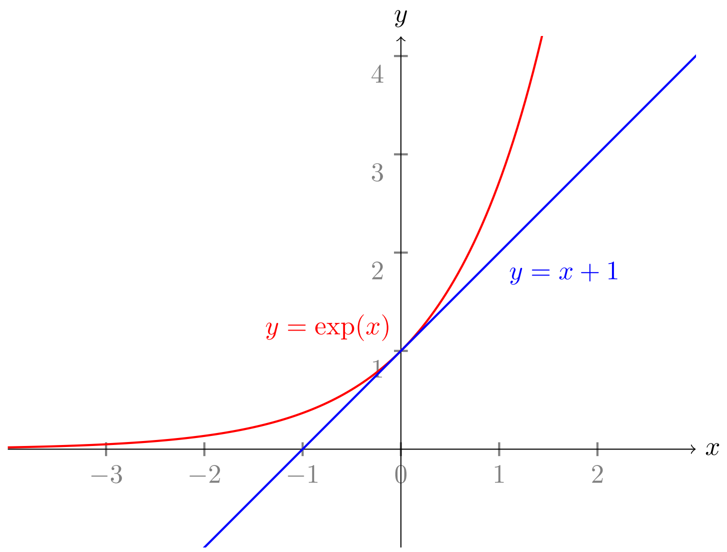
$$h'(x) = \exp(x) - (0 + 1) = \exp(x) - 1.$$

Son signe est simple à étudier : $h'(x) \geq 0$ si, et seulement si $\exp(x) \geq 1$, si et seulement si $x \geq 0$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On voit sur ce tableau que $h(x) \geq 0$ pour tout x réel, donc $\exp(x) \geq 1 + x$: c'est bien ce que j'avais annoncé. On constate d'ailleurs que l'inégalité est stricte dès que x est non nul.

FIGURE 2.20 – Illustration de l'inégalité $\exp(x) \geq 1 + x$.



Exemple 3. On n'a pas encore utilisé un point pourtant essentiel du dernier corollaire : si $f' = 0$, alors f est constante. On peut utiliser ce constat pour déduire des identités entre fonctions. Par exemple, si on veut montrer une égalité du type $f(x) = g(x)$ pour certains x d'un intervalle I (ou d'une réunion d'intervalles), on étudie $f - g$, et on montre que sa dérivée est nulle partout. Alors, $f - g$ est une constante, et si on sait montrer grâce à un point particulier que $f - g$ égale 0, alors $f = g$. Cet exemple et le suivant sont là pour illustrer cette méthode, je vais tout d'abord redémontrer la formule $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, valable pour tous x et y strictement positifs. Pour cela, je fixe $y > 0$, et je pose $h(x) = \ln(xy) - (\ln(x) + \ln(y))$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

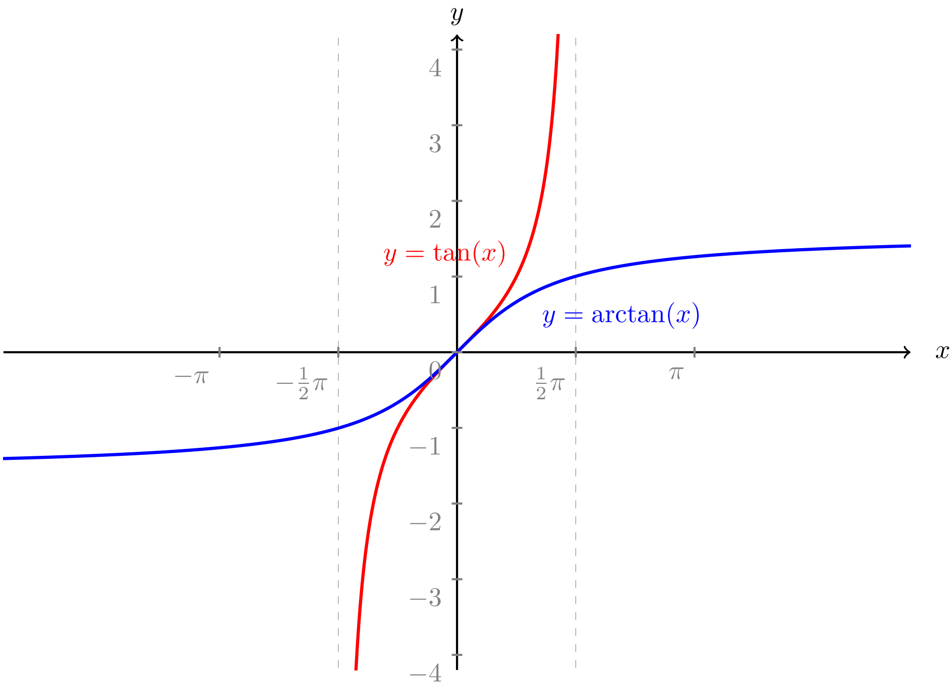
$$h'(x) = \frac{1}{xy} \cdot y - \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0,$$

donc h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale à $h(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0$. On en déduit que $\ln(xy) - (\ln(x) + \ln(y)) = 0$ pour tout $x > 0$, d'où le résultat voulu.

Exemple 4. Voici un exemple plus élaboré : la fonction tan : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante et admet une fonction réciproque $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ que l'usage nomme arctan. Son graphe est sur la figure 2.21. Je vais démontrer que pour tout x non nul :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

FIGURE 2.21 – Graphes de tan et arctan.



Soit $h(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}$. Pour savoir dériver h, je dois savoir dériver arctan, et on a vu comment dériver une fonction réciproque. La formule donnée démontre que

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))}.$$

Or, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$, comme on l'a déjà vu au premier chapitre, donc $\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$. On en déduit la dérivée de h :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Donc h est une fonction constante, égale à $h(1)$. De $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, on déduit $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$. Donc $h(1) = \arctan(1) + \arctan(1) - \frac{\pi}{2} = 0$, et on en déduit que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2} = 0$ pour tout x non nul.

On a ainsi vu, dans cette longue section, comment étudier en long, en large et en travers une fonction sous toutes ses coutures ; ceci permet de peindre son portrait exhaustivement. Bien sûr, la monotonie d'une fonction ne suffit pas à avoir une idée de l'allure de la fonction : on sait par exemple que même si $x \mapsto x$, exp et ln sont toutes les trois des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+$, elles ne croissent pas du tout de la même manière ! Pour se donner une meilleure idée du comportement autour de $+\infty$ même quand il n'y a pas de limite, et ne pas dessiner n'importe quoi au moment de faire un rendu de la courbe de la fonction, on introduit la notion d'*asymptotes* ; je reviens dessus très bientôt. Pour résumer, voici comment étudier une fonction dérivable en détails :

1. on détermine son domaine de définition et de dérivabilité ;
2. on calcule ses limites aux extrémités de son domaine de définition et là où elle n'est pas définie ;
3. on calcule sa dérivée, et le signe de cette dérivée nous donne les variations de la fonction, qu'on résume dans un tableau de variation qui comprend également les limites précédemment calculées ;
4. on cherche ses asymptotes éventuelles ;
5. pour avoir une meilleure de son allure, on peut calculer sa dérivée en quelques points particuliers, de sorte à pouvoir connaître localement la tête de la courbe... ce dernier point, contrairement aux quatre points, est purement cosmétique et n'est pas indispensable ;
6. faire un *très beau* dessin pour résumer la situation.

Un asymptote est une droite dont la courbe de la fonction se rapproche « indéfiniment » ; il convient de préciser rigoureusement ce que cela signifie. Pour cela, je rappelle d'abord qu'une asymptote, en tant que droite, admet une équation de deux formes possibles :

— soit elle est une droite verticale, et son équation est donc de la forme $x = c$;

— soit elle ne l'est pas (on parle alors d'asymptote oblique), et son équation est de la forme $y = ax + b$ (si $a = 0$, on parle même d'asymptote horizontale).

Une fonction admet une asymptote verticale si elle se rapproche indéfiniment d'une droite verticale ; ceci ne se produit que si cette fonction admet une limite infinie en un point fini : $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$. Comme ce cas de figure a déjà été cité précédemment, on ne va pas s'attarder là-dessus.

Demander à ce qu'une fonction f se rapproche indéfiniment d'une droite d'équation $y = ax+b$, phénomène qui n'est intéressant qu'au voisinage de l'infini, revient à demander que $f(x) - (ax + b)$ devienne infiniment petit. Autrement dit, pour dénicher des asymptotes obliques, on doit trouver des réels a et b tels que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

La difficulté consiste à trouver les a et b qui conviennent, si du moins ils existent. Un cas simple est celui où f admet une limite finie b en l'infini. Alors, d'après le laïus précédent, $y = b$ est l'équation d'une asymptote (horizontale) de f en l'infini.

Pour les trouver dans le cas général, on remarque d'abord que *si* a existe, alors on a nécessairement, partant de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, la limite

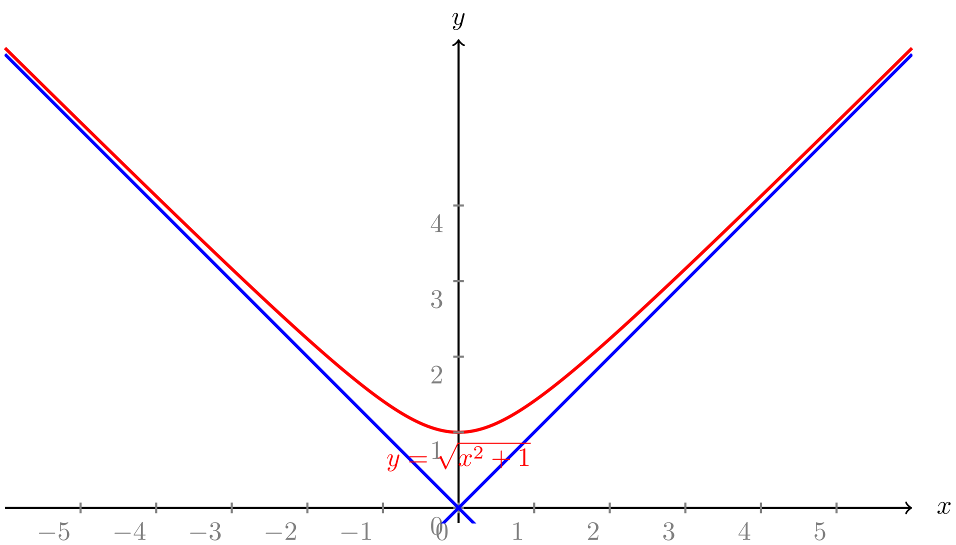
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - a = 0$: saurez-vous le démontrer ? En bref, pour trouver l'éventuel a qui doit fonctionner, on calcule $\frac{f(x)}{x}$, et *s'il* admet une limite finie a, alors ce a est *potentiellement* la pente de l'asymptote cherchée (à noter que ceci ne suffit pas pour avoir une asymptote, on donnera un contre-exemple plus tard !). Une fois le a potentiel trouvé, on doit déterminer b. Celui-ci s'obtient en calculant $f(x) - ax$, et en espérant trouver une limite finie b. Alors, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0,$$

et la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote de f en $\pm\infty$. Une fois cette recherche aboutie, on peut étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$, il détermine si la courbe de f est au-dessous ou en dessous de la droite asymptote.

Exemple. La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, définie pour x réel, admet deux asymptotes d'équations respectives $y = -x$ (en $-\infty$) et $y = x$ (en $+\infty$).

Figure 2.22 – Graphe de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.



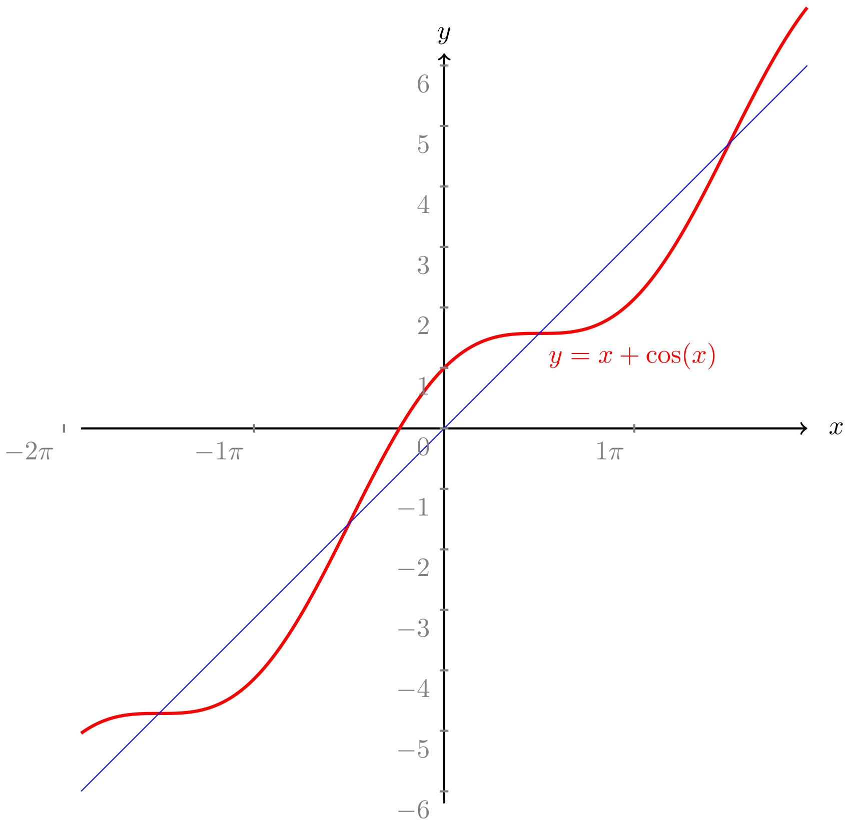
En effet, $f(x)-x = \sqrt{x^2 + 1}-x = \sqrt{x^2 + 1}-\sqrt{x^2} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$, ce dont on déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0.$$

On procède de même pour $f(x)+x$ autour de $-\infty$, en faisant toutefois attention au fait que $\sqrt{x^2} = -x$ pour x négatif.

Contre-exemple. La fonction $f(x) = x + \cos(x)$ n'admet pas d'asymptote oblique autour de l'infini. Pourtant, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{\cos(x)}{x} = 1$. En effet, $f(x) - x = \cos(x)$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.

FIGURE 2.23 – Graphe de $f(x) = x + \cos(x)$.



Vous avez dorénavant toutes les cartes en mains pour dresser de jolis tableaux de variations.

Exemple. Soit $f(x) = x + \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)$. Cette fonction est définie là où le logarithme est bien défini ; grâce à la valeur absolue autour de $\frac{x}{x+1}$, on n'a pas à se soucier de son signe, on doit juste éviter l'annulation de ce terme. Il est nul pour $x = 0$ et n'est pas défini du tout pour $x = -1$, donc f est définie sur $]-\infty, -1[\cup]-1{,}0[\cup]0, +\infty[$.

De plus, elle est dérivable sur ce même intervalle, en tant que composée de fonctions dérivables : on pourrait avoir un doute à cause de la valeur absolue, et pour éviter de s'interroger sur son influence concernant la dérivabilité, il suffit de voir ce que vaut $\left|\frac{x}{x+1}\right|$ sur chaque intervalle sujet à caution. Par exemple, pour $x \in]-1{,}0[$, $\left|\frac{x}{x+1}\right| = -\frac{x}{x+1}$, et $x \mapsto x + \ln\left(-\frac{x}{x+1}\right)$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. De même ailleurs. La dérivée se calcule et donne sur chaque intervalle où f est définie :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1) + (x+1) - x}{x(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)}.$$

Le discriminant de la fonction polynomiale au numérateur égale -3, donc est négatif. Donc le numérateur ne change jamais de signe, et est positif plus précisément (on le voit par exemple avec sa valeur en 0). Seul le signe du dénominateur $x(x+1)$ nous intéresse conséquemment, et donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Je vous laisse vous charger du calcul des différentes limites, le cours et les exercices devraient rendre la tâche facile.

Cette étude de variations montre déjà l'existence de deux asymptotes verticales, d'équations $x = -1$ et $x = 0$. Il existe également une asymptote d'équation $y = x$, autour de $+\infty$ et $-\infty$: en effet,

$$f(x) - x = \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = -\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) = -\ln\left(\left|1 + \frac{1}{x}\right|\right),$$

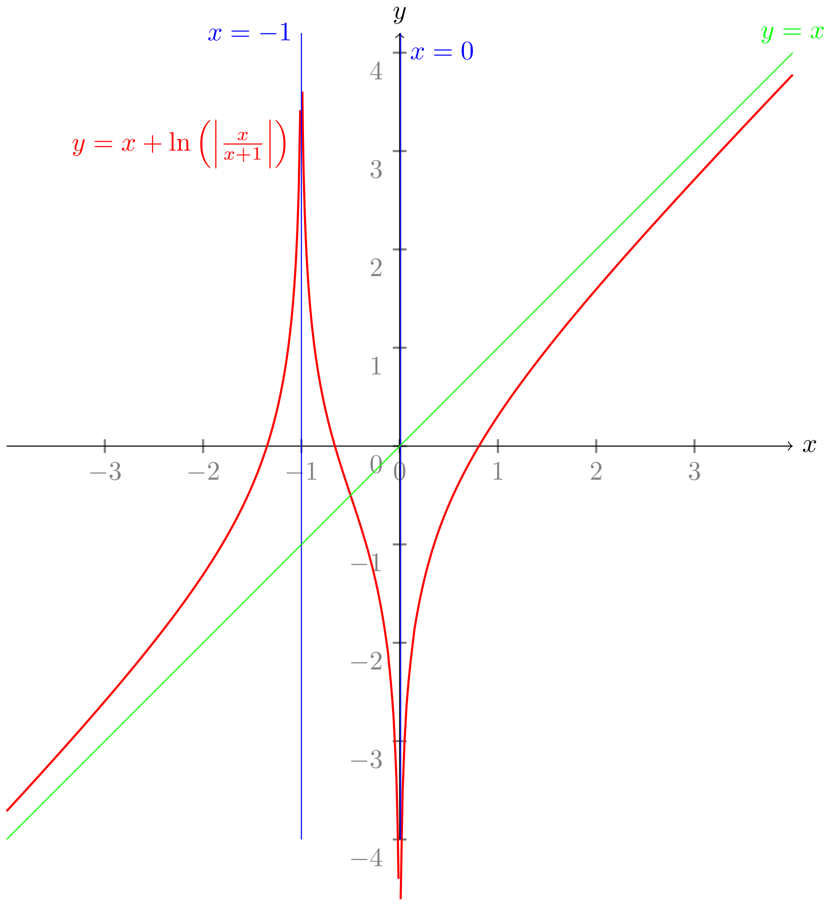
et cette transformation qui n'est pas indispensable nous montre que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = 0$, étant donné que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 1$. On peut donc, enfin, tracer le graphe de la fonction f, disponible sur la figure 2.24. Notons que si on n'avait pas tracé les asymptotes, on aurait sans doute été bien en peine pour avoir un tracé cohérent de la courbe de f au voisinage de l'infini.

2.1.6 Calculs de limites vues comme taux d'accroissement

On a vu, dans la section sur les limites, comment lever certaines indéterminées dans les quotients $\frac{f}{g}$. Il fallait, moralement, déterminer qui de f ou de g était le « plus fort », c'est-à-dire tendait « le plus vite » vers le point limite. Hélas, la hiérarchie était certes facile à établir autour de 0 et de l'infini, mais les exemples simples de limites autour d'autres points montraient qu'on n'a pas encore tous les outils adéquats pour éliminer toutes les indéterminées, en particulier quand la limite est en un réel a différent de 0. Parfois, le changement de variable $u = x - a$ suffisait à se ramener à une situation connue, mais pas nécessairement.

Qui plus est, la hiérarchie établie était loin d'être exhaustive et ne contient pas tous les cas de figure possibles : par exemple, on ne pouvait pas l'utiliser pour savoir quelle est la limite de $\frac{\exp(x)-1}{x}$ quand x tend vers 0. Il s'avère que la notion de dérivée est bien pratique pour lever *toutes* les indéterminées qui persistaient.

Figure 2.24 – Graphe de la fonction $x \mapsto x + \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)$ et ses asymptotes.



Soit $\frac{f}{g}$ la fonction qui donne une limite indéterminée autour d'un réel a, et dont les méthodes précédentes ne mènent à rien ; si l'indéterminée est autour de l'infini, on se ramène à une indéterminée en 0 en posant $u = \frac{1}{x}$ par exemple. Alors,

— si $g(x) = x - a$, c'est-à-dire si on a affaire à un quotient de la forme $\frac{f(x)}{x-a}$ à étudier autour de a, la présence d'indéterminée du type $\frac{0}{0}$ en a se traduit *exactement* par le fait que $f(a) = 0$. L'astuce consiste conséquemment à constater que $\frac{f(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; cette ruse permet de reconnaître là, quand x tend vers a, la dérivée de la fonction f :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Aucune limite ne résiste à ce principe, pourvu que f soit dérivable !

— si g est une fonction plus compliquée, ce n'est pas bien grave en général : avoir une indéterminée du type $\frac{0}{0}$ se traduit toujours par le fait que

$f(a) = 0$ et $g(a) = 0$ (moyennant quelques simplifications). Alors,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)},$$

et on peut encore une fois ruser pour faire apparaître la dérivée de f et g :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

sous réserve que $g(x) - g(a) \neq 0$ pour x assez près de a : c'est la règle de l'Hôpital (qui a « acheté » le nom de ce résultat).

Dans le cas d'une indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, ce raisonnement est toujours valable, mais un peu plus technique à justifier (il faut remarquer qu'une telle indéterminée est, en fait, un $\frac{0}{0}$ déguisé). On peut même généraliser la situation à $a = \pm\infty$, grâce à un résultat qu'on verra en exercice ! Pour résumer :

Proposition 2.32 (Règle de l'Hôpital) *Soient f et g deux fonctions dérivables en un point a, tel que g' ne s'annule pas au voisinage de a (a exclu). Alors,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En effet, on peut montrer que si g' ne s'annule pas autour de a, alors la condition $g(x) - g(a) \neq 0$ est respectée : c'est une conséquence du dernier exercice du cours.

Exemple 1. Cette limite et les deux suivantes donnent des formes indéterminées, qu'on lève grâce à la dérivée :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Exemple 2. Cette fois-ci, le quotient n'est plus de la forme $x - a$, et on recourt donc à la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(0) = 0.$$

Notons que la formule de dérivée donne que $\frac{\cos(x)-1}{x}$ admet 0 pour limite en 0. Comme l'exemple précédent montre que $\sin(x)$ est « aussi fort » que x, il est normal de trouver 0 une fois de plus ici.

Exemple 3. La règle de l'Hôpital ne couvre pas le cas des limites en l'infini. Alors, on se ramène à une limite finie en posant $u = \frac{1}{x}$, et on croise les doigts pour que la nouvelle limite soit calculable. Ici, c'est le cas :

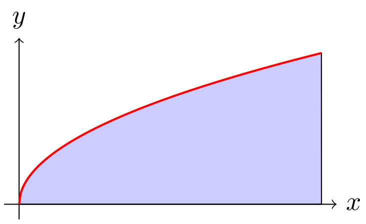
$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \overset{[u=1/x]}{=} \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

Exemple 4. Enfin, la règle de l'Hôpital peut parfois nécessiter plusieurs utilisations successives, comme c'est le cas dans l'exemple suivant, où on l'utilise d'abord avec $\cos -1$ et $x \mapsto x^2$, puis avec sin et $x \mapsto x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2.2 Notions globales

2.2.1 Notions d'intégration



Définition 2.33 (Intégrale) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de f entre a et b la limite suivante, qui existe :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

On préfère noter $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f$ cette limite.

L'existence de cette limite est hautement subtile, et est admise. Conformément à l'intuition, l'intégrale décrit l'aire sous la courbe :

Proposition 2.34 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f \geq 0$. L'intégrale de f entre a et b égale l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équations $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et $y = f(x)$, c'est-à-dire l'aire de l'ensemble des points (x,y) qui vérifient $a \leq x \leq b$ et $0 \leq f(x) \leq y$.*

Dans la suite du cours, j'abrégerai l'aire désignée par $\int_a^b f$ en le terme plus vague « aire sous la courbe ». Si la fonction f est toujours négative, alors $\int_a^b f$ désigne l'*opposé* de l'aire décrite dans la proposition. Si f prend des valeurs tantôt positives, tantôt négatives, alors $\int_a^b f$ égale la différence entre l'aire sous la courbe où f est positive et l'aire sous la courbe où f est négative.

D'autres propriétés de l'intégrale, relativement intuitives, se déduisent de la définition ; remarquons que dans la définition de l'intégrale, on n'a pas supposé que $a < b$ ni que $f \geq 0$, même si c'est dans ce cas que cela correspondrait à la notion d'aire. Il vaut le coup de s'intéresser aux propriétés de $\int_a^b f$ sans hypothèses sur a, b et f.

Proposition 2.35 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonction continues sur un intervalle I, λ un réel et a, b et c trois réels appartenant à I. Alors,*

— $\int_a^a f = 0$;

— $\int_a^b f = -\int_b^a f$;
— *(relation de Chasles)* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;
— *(linéarité)* $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;
— *(linéarité bis)* $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$;
— *si* $f \geq 0$ *sur* $[a,b]$, *alors* $\int_a^b f \geq 0$;
— *si* $f \geq g$ *sur* $[a,b]$, *alors* $\int_a^b f \geq \int_a^b g$;
— $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Preuve. Toutes ces propriétés vont s'obtenir en travaillant sur $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$, et en regardant ce qu'il se passe quand n tend vers $+\infty$.

Par exemple, pour $a = b$, on a

$$\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=0}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = 0,$$

donc $\int_a^a f = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = 0$.

Pour la deuxième propriété, remarquons que :

$$\begin{aligned}
\frac{a-b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(b+\frac{k}{n}(a-b)\right) &= -\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(n-k)b+ka}{n}\right) \\
&\overset{[j=n-k]}{=} -\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{jb+(n-j)a}{n}\right) \\
&= -\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a+\frac{j(b-a)}{n}\right) \\
&= -\frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{jb+(n-j)a}{n}\right) + \frac{b-a}{n}\left(f(a)-f(b)\right)
\end{aligned}$$

Quand $n \to +\infty$, on obtient bien $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Pour ne pas alourdir la preuve, je saute la preuve de relation de Chasles, qui est légèrement plus technique à écrire *. Les relations de linéarité sont, elles, évidentes, et proviennent du fait qu'elles soient vraies d'emblée sur les sommes qu'on traite :

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)+g\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) \\
&+ \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right),
\end{aligned}$$

*. En effet, si on note $S_n(a,c,f)$, $S_n(c,a,f)$ et $S_n(a,b,f)$ les sommes dont les limites donnent les intégrales de la proposition, on n'a pas directement $S_n(a,c,f) + S_n(c,b,f) = S_n(a,b,f)$: ce ne sont pas les mêmes n qu'on doit prendre pour chaque S_n si on veut que la somme donne bien $S_n(a,b,f)$. On doit s'arranger pour que la subdivision sur $[a,c]$ et $[c,b]$ ressemble vaguement à celle sur $[a,b]$.

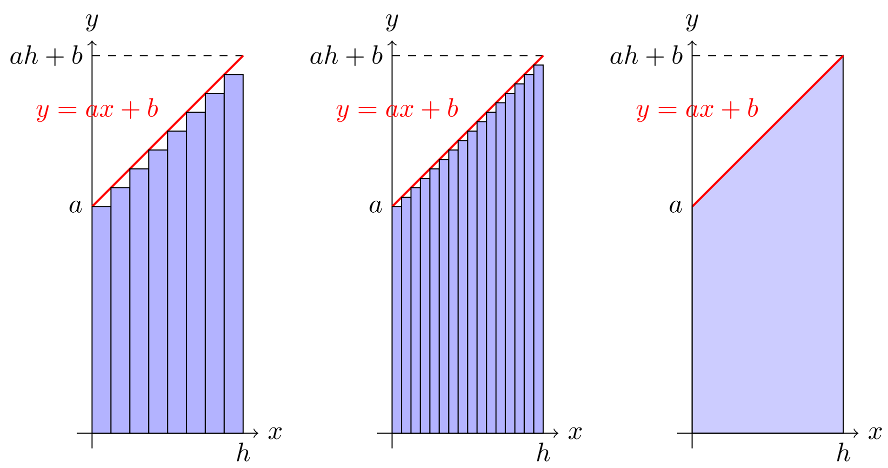
donc, quand $n \to +\infty$, $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. De même pour la deuxième formule de linéarité.

Si $f \geq 0$, alors $f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \geq 0$ pour tous k et n, donc on peut en dire autant des sommes $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$ puis de leur limite. De même si on suppose que $f \geq g$. La dernière proposition est conséquence du fait que $-|f| \leq f \leq |f|$. Il suffit alors d'appliquer la proposition qu'on vient de démontrer avec $g = -|f|$ puis $g = |f|$. $\square$

Exemple 1. Retrouvons l'aire d'un trapèze, en calculant l'intégrale entre 0 et h de $x \mapsto ax + b$:

$$\int_0^h (ax+b)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{h}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a \cdot \frac{k}{n}h + b\right).$$

FIGURE 2.25 – Aire d'un trapèze.



La somme est facile à calculer, comme on sait que $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$:

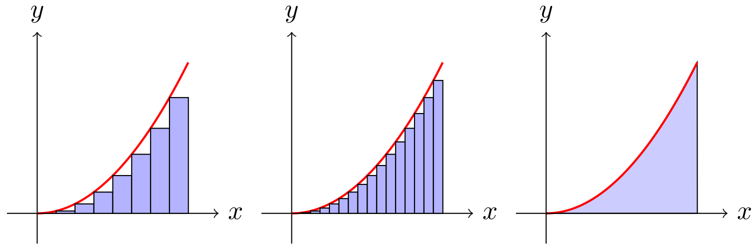
$$\frac{h}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a \cdot \frac{h}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} b\right) = \frac{ah^2}{n^{\cancel{2}}}\frac{(n-1)\cancel{n}}{2} + \frac{h}{\cancel{n}}\cdot b\cancel{n} = \frac{ah^2(n-1)}{2n} + hb.$$

Donc $\int_0^h (ax+b)\mathrm{d}x = \frac{ah^2}{2} + bh = \frac{ah+2b}{2}h$. On retrouve la formule enseignée au collège : pour trouver l'aire d'un trapèze de hauteur h et de côtés parallèles de longueurs a et b, on fait la moyenne de ces deux longueurs (qui vaut $\frac{a+b}{2}$) qu'on multiplie par la hauteur h. On voit sur la figure 2.25 qu'ici, notre trapèze avait pour hauteur h, et les côtés parallèles avaient pour longueurs b et $ah+b$, donc ça concorde.

Exemple 2. La fonction $x \mapsto x^2$ admet comme intégrale entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

FIGURE 2.26 – Aire sous la courbe de $x \mapsto x^2$.



Or, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2$, et un exercice de la feuille de TD hors-série montre comment, grâce au principe de récurrence, on peut prouver que

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6\cancel{n^3}} = \frac{1}{3}.$$

Donc $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Cet exemple montre à quel point il peut être difficile de calculer une aire à l'aide de cette définition : pour calculer l'intégrale d'une fonction aussi simple que $x \mapsto x^2$, on a dû recourir à une formule déjà assez compliquée ! Et que faire, par exemple, si on doit calculer des sommes du type $\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$, voire plus compliquées ? On a besoin de méthodes de calculs plus pratiques pour calculer ces aires.

2.2.2 Le théorème fondamental de l'analyse

Définition 2.36 (Primitive) *Soit f une fonction continue. On appelle primitive de f une fonction dont la dérivée est f.*

La notion de primitive est donc, en quelque sorte, l'inverse de la dérivée.

Exemple. Une primitive de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto x^2$. Une primitive d'une fonction constante égale à a est $x \mapsto ax$.

Remarque. Si F est une primitive de f, alors pour tout réel c, $F + c$ en est aussi une, car c est constante donc de dérivée nulle. Il y a donc une infinité de primitives pour une fonction donnée ! Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f, alors $G = F + c$ pour un certain réel c. En effet, $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$, donc $G - F$ est une constante. Autrement dit, si on trouve *une* primitive de f, qu'on note F, alors on obtient *toutes* les primitives de f qui sont de la forme $F + c$, avec c un réel.

Théorème 2.37 (Théorème fondamental de l'analyse) *Soit f une fonction continue, et a un réel de son intervalle de définition. Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable là où f est continue, et vérifie $F' = f$: c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

On admet ce théorème surpuissant, qui donne une méthode concrète pour reconstituer une primitive d'une fonction. L'unicité n'est pas le fait éclatant du théorème, puisqu'on peut déjà la déduire de la remarque précédente.

Remarque. On peut définir la fonction logarithme grâce à ce théorème, en posant $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$, et on définit alors l'exponentielle comme étant réciproque du logarithme. Certains cours suivent ce fil pour introduire ces fonctions.

Corollaire 2.38 *Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, et F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors,*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

On note parfois $[F(x)]_a^b$ la quantité $F(b) - F(a)$, c'est une notation bien commode, notamment pour l'intégration pour parties qu'on découvre bientôt.

Preuve. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $G(x) = \int_a^x f$ est l'unique primitive de f s'annulant en a. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$, convoquée par l'énoncé du corollaire. Alors la fonction $F - F(a)$ est également une primitive de f sur $[a, b]$ (en effet, $F(a)$ est une constante, donc $(F - F(a))' = F' = f$), et s'annule en a. Par unicité, on a $G(x) = F(x) - F(a)$, donc en particulier, pour $x = b$:

$$G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a). \square$$

Exemple.

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \int \ln'(x)\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{(\ln(x))^2}{2} + c.$$

Moralité : savoir calculer des intégrales revient à savoir déterminer des primitives de fonctions. Il vaut donc la peine de s'attarder plus longuement là-dessus. On notera souvent $\int f$ l'ensemble des primitives de f.

2.2.3 Primitives

fonction	primitives
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(\lvert x\rvert) + c$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
exp	$\int \exp(x)\mathrm{d}x = \exp(x) + c$
cos	$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + c$
sin	$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + c$
$\frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$	$\int \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x = \tan(x) + c$

Les fonctions qu'on étudie la plupart du temps s'écrivent à l'aide de fonctions usuelles s'obtiendront souvent comme sommes, produits, quotients, *etc.*, des fonctions du tableau ci-dessus. La plupart du temps, il faudra alors reconnaître en ces fonctions une fonction de la forme $u' \cdot f(u)$, où f est une fonction dont on connaît une primitive (grâce au tableau ci-dessus). En effet, on sait grâce à la section précédente qu'il s'agit là de la dérivée de $F(u)$, où F est une primitive de f. Ceci permet de dresser le tableau suivant, qui n'est pas à connaître par cœur si on est méthodique :

fonction	primitives
$\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} = \ln(\lvert u\rvert) + c$
$u' \cdot u^\alpha, \alpha \neq -1$	$\int u' \cdot u^\alpha = u^n + c$
$u' \exp(u)$	$\int u' \exp(u) = \exp(u) + c$

Exemple 1. $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{\cos'}{\cos}$, donc

$$\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + c.$$

Exemple 2. Soit m un réel non nul. Pour tout x, on a $\exp(mx) = \frac{1}{m} m \exp(mx)$, et $x \mapsto m\exp(mx)$ est de la forme $u'\exp(u)$, avec $u(x) = mx$, ce qui montre qu'une primitive de $x \mapsto m\exp(mx)$ est $x \mapsto \exp(mx)$. Donc,

$$\int \exp(mx)\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\exp(mx) + c.$$

Plus généralement, il est parfois nécessaire de multiplier et diviser de manière un peu artificielle notre fonction par un certain réel non nul pour reconnaître une primitive, en particulier si on manipule des fonctions « puissances » ou linéaires.

Exemple 3. La fonction $f(x) = x\exp(x^2)$ est presque de la forme $u'\exp(u)$, vu que la dérivée de $u(x) = x^2$ est $u'(x) = 2x$. On y remédie en multipliant et divisant par 2, puisqu'alors,

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2}x\exp(x^2) = \frac{1}{2}\int 2x\exp(x^2) = \frac{1}{2}\exp(x^2).$$

Enfin, il est très important de remarquer que même si on cherche comment déterminer des primitives dans le but de calculer des intégrales, les intégrales nous permettent aussi de calculer des primitives. En effet, si f est une fonction continue, le théorème fondamental de l'analyse nous met sous le nez une primitive toute trouvée : c'est $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$! Alors, si on a des moyens de bricoler une intégrale de la fonction dont on cherche une primitive, de manière à se ramener à l'intégrale d'une autre fonction dont on connaît une primitive, on aura gagné ! Une façon de se ramener à l'intégrale d'une autre fonction est fournie par la proposition suivante, qui revient à simplifier une fonction sous forme de produit.

Proposition 2.39 (Intégration par parties) *Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$. Alors,*

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$\int_a^b u'v + \int_a^b uv' = \int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b. \square$$

Pour que cette proposition soit utile lors du calcul d'un produit de fonctions (l'une des deux fonctions pouvant tout simplement être la fonction constante égale à 1), on doit essayer en dérivant la fonction dont la dérivée est la plus simple, et en intégrant celle dont une primitive est aussi simple que possible (et connue !). Par exemple, si on a une fonction du type $f \cdot \exp$ à intégrer, on a tout intérêt à intégrer exp et dériver f, car une primitive de exp est exp, ce qui est particulièrement simple (ce ne sont pas toutes les fonctions qui peuvent se permettre d'être aussi simples à intégrer) !

Exemple 1.

$$\int_0^x t \cdot e^t \mathrm{d}t = x \cdot e^x - \int_0^x e^t \mathrm{d}t = x \cdot e^x - e^x + 1 = (x-1)e^x + 1.$$

Exemple 2.

$$\int_1^x \ln(t) \mathrm{d}t = x\ln(x) - \int_1^x \mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1.$$

2.3 Exercices

2.3.1 Calculs de limites

Exercice 1. Déterminer les limites

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+\sqrt{1+x^2}), \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x), \quad \lim_{x\to+\infty} e^{x+\frac{1}{x}} - e^x,$$

$$\lim_{x\to 2/3} \frac{\ln(3x-1)}{3x-2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{(\ln(4-x^8))^5}{x^2}, \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2-4x+7}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{e^{x^2-2}}{x}, \quad \lim_{x\to-\infty} (x^5+4x+7)e^x,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+3x^4}{5e^x+x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+3x^4}{5e^{2x}+x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+3x^4}{5e^{-x}+x},$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2^x, \quad \lim_{x\to 0^+} 95156^x, \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{x\ln(x)},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x+8}{x^2+5}\right)^{1/(x+1)}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^x.$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x}\sin\left(\frac{4}{x}\right), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+5x^2+x}{4x+6}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3+5x^2+x}{x^4+x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x}\right),$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+4}-5}{x^2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}-5}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-5}{x^2},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}, \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2\ln(x)}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}-3}}{x^3+2x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) - x\ln(2+x), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{1/x+1}}{x+30}, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln(x)}.$$

Exercice 2. Chercher un exemple de fonction qui n'admet pas de limite (ni finie ni infinie) en $a = +\infty$, puis en $a = 0$. En déduire dans chacun des cas un exemple de deux fonctions f et g telles que ni f ni g n'admettent pas une limite en a mais $f \cdot g$ en admet une.

Exercice 3. Est-ce que la fonction $x \mapsto |x|$ admet une limite en 0 ? Que dire de $x \mapsto \frac{x}{|x|}$?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle nécessairement ses bornes ?

2.3.2 Continuité

Exercice 1. Démontrer, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, que chacune de ces équations admet une solution dans l'intervalle donné :

$$x^3 = x+1 \quad \text{dans }]0,1[,$$

$$5\ln(x) = \sqrt{x} \quad \text{dans }]1,2[,$$

$$\cos(x) = x \quad \text{dans } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction est continue ou discontinue au point donné, en justifiant.

$$f(x) = \ln(|x-1|) \text{ en } x_0 = 1,$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ en } x_0 = 0,$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ en } x_0 = 0.$$

Exercice 3. Soit f une fonction continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante égale à 1 ou constante égale à -1 sur tout I, et trouver un contre-exemple dans le cas où on ne suppose pas que f est continue.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe toujours $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. En application, montrer que sur n'importe quel trajet, il existe un instant où notre vitesse est égale à la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours. Trouver un contre-exemple lorsque f n'est pas continue.

2.3.3 Dérivées et variations

Exercice 1. Dériver et dresser le tableau de variation des fonctions suivantes, sur leurs domaines de définition :

$$x \mapsto x^x, \quad x \mapsto (\ln(x))^2, \quad x \mapsto \ln(x^2+1), \quad x \mapsto -\ln(\cos(x)), \quad x \mapsto \frac{\ln(x)}{x},$$

$$x \mapsto x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right), \quad x \mapsto \ln(\ln(x)), \quad x \mapsto x + \sin(x), \quad x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$$

$$x \mapsto \frac{x^3+9x}{x^2+1}, \quad x \mapsto \frac{x}{2} + 1 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right), \quad x \mapsto \frac{4x^2-6x+3}{1-2x}$$

Exercice 2. Démontrer, à l'aide d'une étude de variations bien choisie, que $\sin(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 3. Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$u_{n+1} = \sin(u_n), u_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2, u_0 = \frac{1}{2},$$

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2, u_0 = \frac{1}{4},$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right), u_0 = \frac{3}{2},$$

$$u_{n+1} = u_n - \sin(u_n), u_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4. Démontrer, à l'aide de deux études de variations, que pour tout $x > 0$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

et en déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Exercice 5. Soit $f(x) = \frac{x-1}{x}\ln(x)$. Étudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$, et vérifier que $g(1) = 0$. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, et en déduire les variations de f, puis calculer ses limites en 0 et $+\infty$.

Exercice 6. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $x + 1/x \geq 2$. En déduire que pour tout réel x, $e^x + e^{-x} \geq 2$.

Exercice 7. À l'aide de la formule qui définit la dérivée d'une fonction, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}, \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)},\quad \lim_{x\to+\infty} e^{x+\frac{1}{x}}-e^x,\quad \lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(3x+1)}{2x}$$

2.3.4 Intégration

Exercice 1. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$x\mapsto 2,\quad x\mapsto x,\quad x\mapsto 5x,\quad x\mapsto -4x^2,\quad x\mapsto x^2-3x+2,\quad x\mapsto 3x^2+2x+1,$$

$$x\mapsto -x^2+1,\quad x\mapsto \frac{1}{x},\quad x\mapsto \exp(x),\quad x\mapsto x-\frac{1}{x^2},\quad x\mapsto x^7,\quad x\mapsto \frac{1}{x^3},$$

$$x\mapsto \frac{x^4+1}{x^2},\quad x\mapsto 5x^2+x+\frac{2}{x},\quad x\mapsto 3\sin(x)+2\cos(x),\quad x\mapsto \frac{\exp(x)+4}{3},$$

$$x\mapsto 2(2x+1)^3,\quad x\mapsto (3x+1)^{-5},\quad x\mapsto (-2x+1)^5,\quad x\mapsto \frac{2x+1}{x^2+x+1},$$

$$x\mapsto \sin(x)\cos(x)^3,\quad x\mapsto \frac{(\ln(x))^2}{x},\quad x\mapsto \frac{2x}{x^2+1},\quad x\mapsto \frac{1}{2x+1},\quad x\mapsto \frac{x+2}{x^2+4x+3},$$

$$x\mapsto x\exp(x),\quad x\mapsto \exp(3x+1),\quad x\mapsto \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}},\quad x\mapsto \frac{3x}{x^2+1},$$

$$x\mapsto \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}},\quad x\mapsto \cos(2x),\quad x\mapsto \cos(x)^2,\quad x\mapsto \sin(x)^2,\quad x\mapsto \tan(x)^2.$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{2}+2$.

1. Représenter graphiquement f. Calculer l'intégrale $\int_{-2}^4 f$ sans chercher une primitive de f.
2. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $\int_{-2}^4 f = F(4)-F(-2)$.

Exercice 3. Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^3 (x+4)\mathrm{d}x,\quad \int_{-1}^1 (2x^2-1)\mathrm{d}x,\quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\quad \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x,\quad \int_4^0 (4x-x^2)\mathrm{d}x,$$

$$\int_2^{-1} 3x^3\mathrm{d}x,\quad \int_2^1 \frac{1}{x^6}\mathrm{d}x,\quad \int_2^0 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

Exercice 4. Exprimer le produit $\cos(x)\cos(3x)\cos(5x)$ comme une somme au moyen de $\sin(9x)$, $\sin(7x)$, $\sin(3x)$ et $\sin(x)$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(3x)\cos(5x)\mathrm{d}x$.

Exercice 5. En effectuant une intégration par parties, calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x, \quad \int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 (2x+1)\exp(x)\mathrm{d}x, \quad \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_1^x (t^3+1)\ln(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\int_2^3 \frac{\ln(x)}{x^n}\mathrm{d}x$.

Exercice 7. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos(x)^2\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin(x)^2\mathrm{d}x$.

1. Sans calculer I et J, calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. En déduire I et J.

Exercice 8. En effectuant deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^1 (x+1)^2\exp(-x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\pi}^0 x^2\sin(2x)\mathrm{d}x, \quad \int_0^\pi \exp(2x)\sin(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 9. Soit n un entier naturel non nul. On pose $u_n = \int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right)\mathrm{d}x$.

1. En déterminant un encadrement de l'intégrande (c'est-à-dire la fonction intégrée), donner un encadrement de u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente, et donner sa limite.

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{Z}$, $F_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin(t))^n\cos(t)\mathrm{d}t$ et $G_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin(t))^n(\cos(t))^5\mathrm{d}t$.

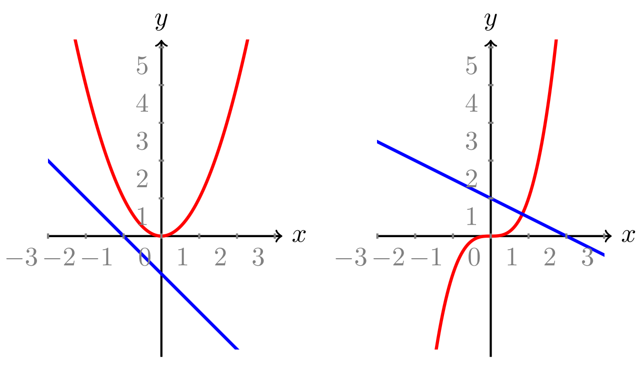
1. Montrer que $(\sin(t))^n\cos(t)$ est de la forme $u' \cdot u$ pour une fonction u convenable. En déduire F_n.
2. Montrer que $(\sin(t))^n(\cos(t))^4 = (\sin(t))^n - 2(\sin(t))^{n+2} + (\sin(t))^{n+4}$. Calculer G_n.
3. Montrer que $(\cos(t))^3$ est de la forme $(1-u)\cdot u'$ pour une fonction u convenable. En déduire $H_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos(t))^3\mathrm{d}t$.

Chapitre 3

Nombres complexes

On considère souvent que le premier inventeur (ou découvreur...) des nombres complexes est Tartaglia, mathématicien italien du XVI^{e} siècle, qui en avait besoin pour résoudre des équations polynomiales du troisième degré. Ceci peut paraître surprenant, puisqu'on les voit habituellement lors de la résolution d'équations polynomiales du second degré dont le discriminant serait négatif. Il s'avère qu'un blocage psychologique empêchait de considérer de tels nombres, qualifiés « d'impossibles » à leurs débuts, mais leur usage pour les équations du troisième degré paraissait plus raisonnables puisque même avec leur apparition, on retombait sur des solutions réelles en fin de calcul. On peut voir cela plus géométriquement sur la figure 3.1 : une solution à l'équation $x^2 = -x - 1$ correspondrait à l'abscisse d'un point d'intersection entre la droite et la parabole sur la première figure, et il n'y a rien de choquant à considérer qu'il n'y a pas de solutions dans ce cas-là, donc l'invention de solutions imaginaires n'a pas un intérêt évident.

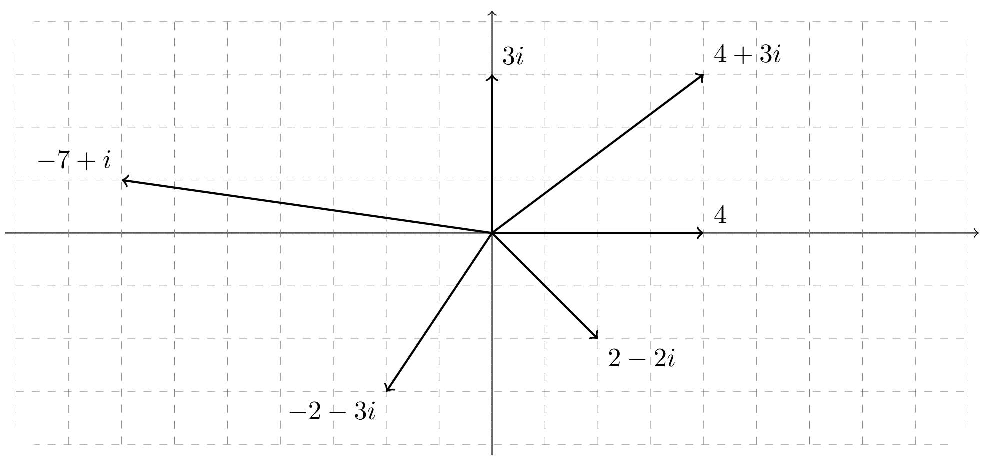
FIGURE 3.1 – Intersection d'une droite et d'une parabole ou cubique.



Par contre, la courbe d'équation $y = x^3$ et une droite d'équation de la forme $y = px + q$ se coupent toujours, et le fait qu'une solution de l'équation $x^3 = px + q$, qui existe nécessairement, soit obligatoirement écrite à l'aide de nombres complexes leur donne du crédit. Néanmoins, les nombres complexes n'étaient vus que comme des artifices intermédiaires dans les calculs. En 1702, Leibniz disait du nombre complexe i, défini comme racine carrée de -1, qu'il était amphibien, dans un statut entre l'existence et l'inexistence. Tant qu'on ne pouvait pas trancher exactement sur ce qu'*est* un nombre complexe, on était incapable de passer ce cap psychologique et de développer la théorie des nombres complexes.

À ce titre, l'interprétation nouvelle par Gauss, à la fin du XVIII^{e} siècle, a apporté une réponse satisfaisante à cette question, et a complètement révolutionné les mathématiques. Il s'agissait d'une interprétation *géométrique* des nombres complexes, en tant que points (ou vecteurs) du plan : la quantité mystérieuse $x + iy$ pouvait être vue comme le point du plan de coordonnées (x, y), ou le vecteur liant l'origine et ce point. De ce point de vue, le plan est noté $\mathbb{C}$, et est nommé *plan complexe*.

FIGURE 3.2 – Plan complexe $\mathbb{C}$.



L'addition et la multiplication des nombres complexes prend alors un sens géométrique, comme nous allons le voir. Ceci permet d'alterner entre géométrie et algèbre, puis de résoudre des problèmes géométriques par le pur calcul, profitant du fait qu'un nombre complexe contient à la fois deux informations sur un point (une longueur et un angle). Et ce n'est que le sommet de l'iceberg.

3.1 Point de vue géométrique

C'est le moment de décrire les nombres complexes, avec le point de vue qui les rend naturels, à savoir le point de vue géométrique (pourtant apparu en second, historiquement). Un peu de terminologie est là pour préciser, à chaque fois, de quoi on parle.

Définition 3.1 (Nombre complexe, affixe) *En un sens laissé volontairement vague pour le moment, un nombre complexe est un nombre de la forme $x+iy$, où x et y sont des réels. À chaque point du plan M de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $x + iy$, et on dit alors que $x + iy$ est l'affixe de M.*

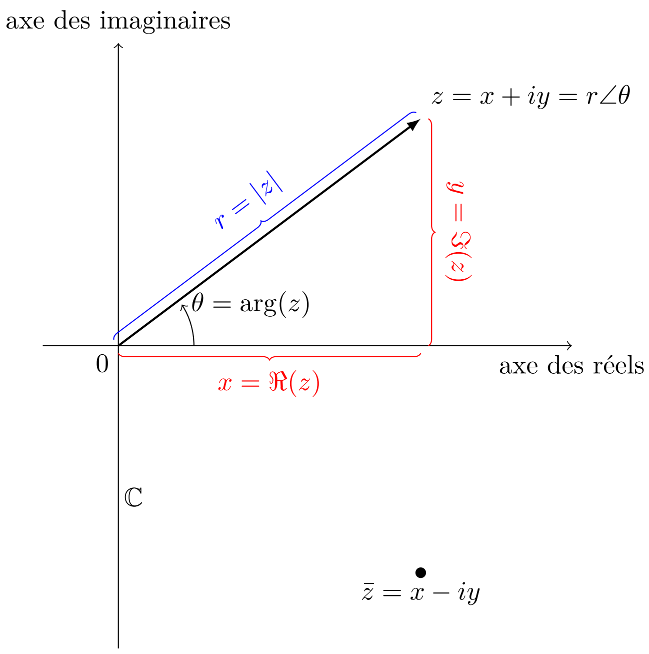
Pour que cette définition fasse sens, on fixe bien sûr un repère orthonormé du plan, sinon on ne peut pas parler de coordonnées d'un point. Même si j'ai, ici, lié les nombres complexes aux points M du plan, les opérations sur les nombres complexes se liront sur les vecteurs $\vec{OM}$, où O est l'origine du plan.

Remarquons que les nombres réels font partie des nombres complexes, ce sont ceux qui s'écrivent $x + i0$. Ils correspondent géométriquement aux points sur l'axe des abscisses. Les nombres sur l'axe des ordonnées sont appelés nombres *imaginaires purs*.

Un vocabulaire propre aux nombres complexes, et correspondant à chaque notion géométrique de base, est présenté dans ce tableau, et illustré par la figure 3.3 :

Nom	Signification	Notation
module de z	longueur r de z	$\lvert z\rvert$
argument de z	angle θ de z	$\arg(z)$
partie réelle de z	abscisse du point d'affixe z	$\Re(z)$
partie imaginaire de z	ordonnée du point d'affixe z	$\Im(z)$
axe des réels	ensemble des nombres réels	$\mathbb{R}$
axe des imaginaires	ensemble des nombres imaginaires	$i\mathbb{R}$
(complexe) conjugué de z	symétrique de z par rapport à l'axe des réels	$\bar{z}$

FIGURE 3.3 – Illustration des notions liées à un nombre complexe.



Si on voit un nombre complexe comme un vecteur, alors on peut naturellement les additionner, au même titre qu'on peut additionner deux vecteurs : si z et z' sont deux nombres complexes associés aux vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$, alors

$z + z'$ est le nombre complexe associé à $\vec{OM} + \vec{ON}$. On va momentanément parler d'addition *géométrique*.

On peut aussi définir une multiplication entre nombres complexes, afin de tenir compte d'une autre opération géométrique bien pratique : on peut définir la multiplication entre deux nombres complexes z et z' de tel sorte que la multiplication équivaille à la *somme de leurs arguments* θ et θ'. Mais pour que cette multiplication corresponde à la multiplication pour les nombres réels, on exige également qu'elle *multiplie les modules*. En résumé, si z et z' correspondent à deux vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$, alors leur produit $z \times z'$ correspond au vecteur $\vec{OP}$, où OP est de longueur $OM \times ON$ (avec les notations introduites ci-dessus, c'est aussi $|z| \times |z'|$), et l'angle entre l'axe des réels et $\vec{OP}$ est $\arg(z) + \arg(z')$; on parlera provisoirement de produit *géométrique*. La multiplication est plus compliquée que l'addition, avec ce point de vue, mais elle revêt une forme plus sympathique si on ne voit pas un point comme une abscisse et une ordonnée, mais plutôt comme une longueur et un angle. C'est ce qui justifie le paragraphe suivant.

Un nombre complexe correspond à un point (ou vecteur) du plan, lequel se décrit à l'aide de deux paramètres, car le plan a *deux dimensions*. Mais il n'y a pas qu'un seul choix pour ces deux paramètres : certes, on peut définir un point du plan à l'aide de son abscisse et de son ordonnée (ce qui donne bien deux paramètres), notées (a, b), qui sont associées au nombre complexe $a + ib$. Mais on peut aussi repérer un point M du plan à l'aide de la longueur r qui sépare ce point de l'origine, et de l'angle θ entre l'axe des réels et le vecteur $\vec{OM}$. C'est pourquoi, en plus de l'écriture $a + ib$ adoptée pour un nombre complexe (l'écriture *cartésienne*, ou *algébrique*), on peut en choisir une deuxième, à savoir $r\angle\theta$ (l'écriture *polaire*) : c'est le nombre complexe non nul qui est l'affixe d'un point M à distance r de l'origine, et tel que l'angle entre l'axe des réels positifs et $\vec{OM}$ soit θ ; cette notation est provisoire. En résumé, si on écrit $z = R\angle\theta$ et $z' = R'\angle\theta'$, alors,

$$(R\angle\theta) \times (R'\angle\theta') = (RR')\angle(\theta + \theta').$$

Exemple. Soit $i = 0 + i1$ le nombre complexe traditionnel. On voit, géométriquement, que le vecteur correspondant à i est de longueur 1 et forme un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec l'axe des réels, donc $i = 1\angle\frac{\pi}{2}$. Avec cette définition de la multiplication, on a

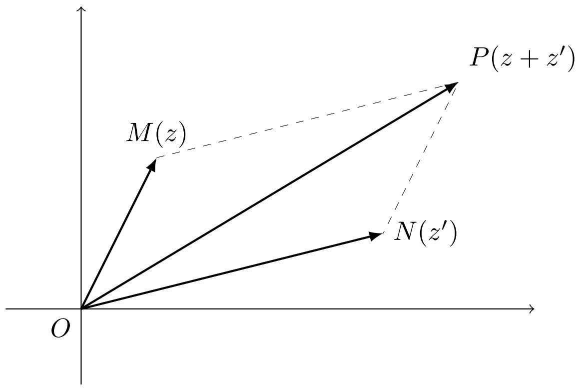
$$i^2 = i \times i = (1\angle\frac{\pi}{2}) \times (1\angle\frac{\pi}{2}) = 1\angle\pi = -1,$$

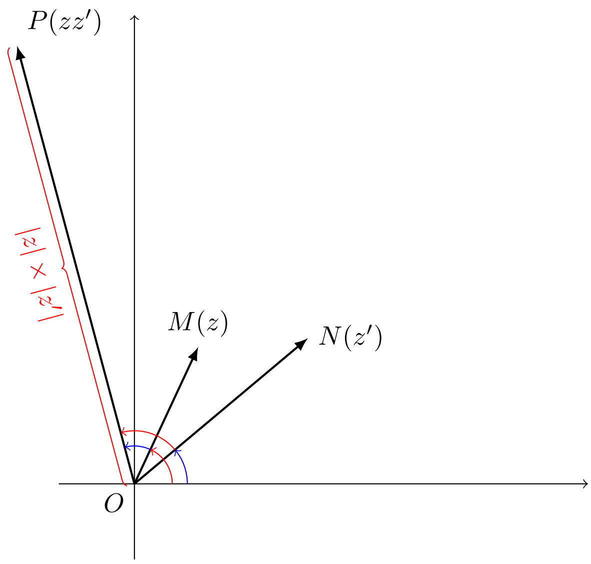
donc $i^2 = -1$: le nombre i est une racine carrée de -1 ! Vous pouvez vérifier que $-i$ est l'autre racine carrée de -1, et plus généralement, tout nombre complexe a une racine carrée : une racine carrée de $R\angle\theta$ est $\sqrt{R}\angle\frac{\theta}{2}$.

Avec le vocabulaire introduit plus haut, on a en fait $z = |z|\angle\arg(z)$. Sous forme polaire, les réels sont de la forme $R\angle 0$ (s'ils sont positifs) ou $R\angle\pi$ (s'ils sont négatifs), tandis que les imaginaires purs sont de la forme $R\angle\frac{\pi}{2}$ ou $R\angle-\frac{\pi}{2}$. Enfin, il est utile de remarquer que si $z = R\angle\theta$, alors $\bar{z} = R\angle-\theta$. Comme un angle est défini à un multiple de 2π près, on a

$$R\angle\theta = R\angle(\theta + 2\pi) = R\angle(\theta - 2\pi) = \cdots$$

Figure 3.4 – Addition et produit (géométriques) de deux nombres complexes.





Selon les opérations géométriques qu'on voudra faire avec nos nombres complexes, une écriture ou l'autre sera plus adaptée, on doit donc savoir passer de l'une à l'autre avec aisance. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors,*

$$\tan(\arg(z)) = \frac{y}{x}, \quad z = R\angle\theta = R\cos(\theta) + iR\sin(\theta).$$

Ainsi, connaissant la forme cartésienne $z = x + iy$ d'un nombre complexe, je reconstitue la tangente de l'argument de z (qui vaut $\frac{y}{x}$), puis son argument après une petite réflexion ; le module en découle, parce que

$$R^2 = R^2\cos(\theta)^2 + R^2\sin(\theta)^2 = x^2 + y^2.$$

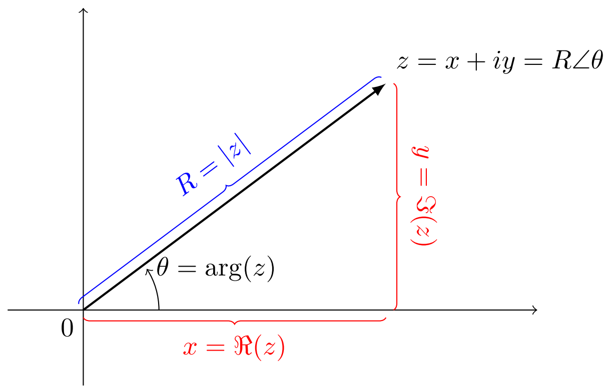
Inversement, si je connais la forme polaire $z = R\angle\theta$ d'un nombre complexe, je trouve $x = \Re(z) = R\cos(\theta)$ et $y = \Im(z) = R\sin(\theta)$.

Preuve. Soit z un nombre complexe non nul, on l'écrit $z = R\angle\theta$. Alors, les relations de trigonométrie dans le triangle T (voir figure 3.5) donnent

$$\cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{x}{R}, \qquad \sin(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{y}{R},$$

donc $x = R\cos(\theta)$, $y = R\sin(\theta)$ et $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x}$. □

FIGURE 3.5 – Illustration de la preuve de la proposition 3.2.



Exemple 1. On a $1 + i = \sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$. En effet, $\tan(\arg(1 + i)) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, donc $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ à un multiple de π près (je rappelle que la fonction tangente est périodique de période π), donc $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$. Mais $1 + i$ est dans le quadrant supérieur droit du plan, donc son argument ne peut pas être $\frac{5\pi}{4}$. Sous cette forme, il est aisé de voir que $(1 + i)^4 = -4$, car

$$\left(\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}\right)^4 = \sqrt{2}^4\angle 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 4\angle\pi = -4.$$

Exemple 2. On a $1\angle\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Notons que cet exemple a été choisi parce que la forme polaire permet de voir très aisément que ce nombre élevé à la puissance 3 donne 1. On a montré, à peu de frais, que $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^3 = 1$: il y a d'autres nombres complexes que 1 qui, élevés à la puissance 3, donnent 1, alors qu'il n'y a qu'un seul nombre réel à le vérifier ! Plus généralement, l'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions au sein des nombres complexes.

Remarque. On peut montrer géométriquement que pour tout nombre complexe non nul z, il existe un nombre complexe z' tel que zz' corresponde au point de coordonnées (1,0) (autrement dit, $zz' = 1$). On note $\frac{1}{z}$ ce nombre. Par exemple, $\frac{1}{i} = -i$. On définit alors la division d'un nombre complexe z par un nombre complexe z' comme le produit $z \times \frac{1}{z'}$, noté $\frac{z}{z'}$.

3.2 Point de vue algébrique

Les nombres complexes correspondent à des vecteurs, et les vecteurs peuvent s'additionner ; par conséquent, il est naturel de transposer cette addition aux nombres complexes. La somme de deux vecteurs s'obtient en sommant leurs abscisses et leurs ordonnées (respectivement), ce qui inspire cette loi d'addition pour les nombres complexes :

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d).$$

L'addition est plus adaptée pour l'écriture cartésienne que polaire : la somme de deux vecteurs ne revient pas à additionner leurs longueurs, ni leurs angles (du moins, pas en général). Par conséquent, il vaut mieux laisser une expression de la forme $R\angle\theta+R'\angle\theta'$ sous cette forme, on ne pourra pas mieux faire en général.

Il sera souvent utile de savoir multiplier deux nombres complexes sous leur forme cartésienne : on aura souvent plus d'information sur un nombre complexe en travaillant sur ses deux formes possibles, l'une donnant des résultats sur l'autre ; il arrive aussi, simplement, qu'on ne connaisse pas l'argument d'un nombre complexe. Il n'est donc pas acceptable de ne pas pouvoir simplifier l'expression $(a+ib)\otimes(c+id)$. Si on s'inspire de la multiplication bien connue pour les réels, alors on peut développer ce produit naïvement, et voir qu'on obtiendrait :

$$(a+ib)\otimes(c+id)=ac+i(ad+bc)+i\otimes ibd.$$

On a vu, en exemple, que $i^2=-1$ (géométriquement), donc le produit de $a+ib$ et $c+id$ vaudrait, dans un souci de cohérence :

$$(a+ib)\otimes(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

On va démontrer plus tard que le produit ainsi défini avec la forme algébrique est rigoureusement le même qu'avec la forme polaire. Notons $z^{\otimes n}=\underbrace{z\otimes z\otimes\cdots\otimes z}_{n \text{ fois}}$, pour distinguer provisoirement ce nombre de z^n.

Exemple 1. On a, encore une fois, $i^{\otimes 2}=-1=i^2$. En effet,

$$i^{\otimes 2}=(0+i1)\otimes(0+i1)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+i(0\cdot 1+1\cdot 0)=-1.$$

De la même manière, on montre très simplement que si z est réel ou imaginaire pur (autrement dit, si une des coordonnées du nombre complexe est nulle), alors $z^{\otimes n}=z^n$.

Exemple 2. On a vu dans la section précédente que $(1+i)^4=-4$ avec le produit géométrique. On peut aussi le démontrer grâce au produit algébrique, mais c'est moins direct :

$$(1+i)^{\otimes 4}=\left((1+i)^{\otimes 2}\right)^{\otimes 2}=(1+2i+\underbrace{i^{\otimes 2}}_{=-1})^{\otimes 2}=(2i)^{\otimes 2}=2^2 i^{\otimes 2}=-4.$$

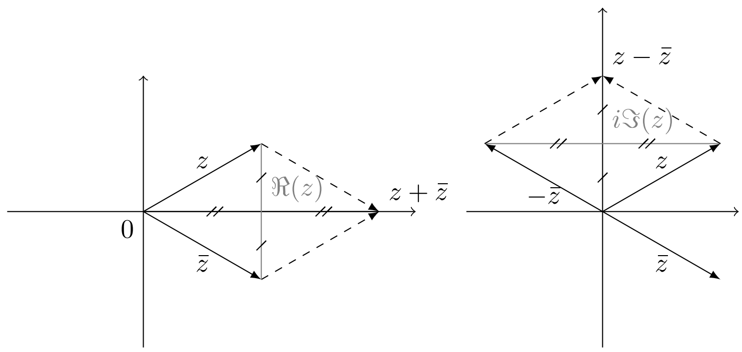
Si z est un nombre complexe non nul, il existe un nombre complexe z' tel que $z\otimes z'=1$. Pour ne pas alourdir la rédaction, je note encore une fois $z'=\frac{1}{z}$ le nombre complexe vérifiant cela.

On peut montrer, à l'aide de la forme algébrique, les propriétés suivantes ; elles sont presque évidentes sous forme géométrique, puisqu'elles découlent de vérités sur les parallélogrammes (les diagonales se coupent en leurs milieux, *etc.*). Le fait que ces propriétés soient vraies à la fois géométriquement et algébriquement donnera de la légitimité au fait que les deux points de vue soient les mêmes.

Proposition 3.3 *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On a les égalités suivantes :*

$$\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = -i\frac{z-\bar{z}}{2},$$
$$|z|^2 = z \otimes \bar{z} = x^2 + y^2, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

FIGURE 3.6 – Interprétation géométrique de la proposition 3.3.



Preuve. Par définition des parties réelle et imaginaire, si $z = x + iy$, on a $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$. Alors,

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(x+iy)+(x-iy)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \Re(z),$$

et de même :

$$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{(x+iy)-(x-iy)}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \Im(z).$$

Montrons que $z\bar{z} = x^2 + y^2$; le fait que $|z|^2$ soit égal à ces deux quantités doit passer par la géométrie, puisque c'est ainsi qu'on a défini le module. On a :

$$z \otimes \bar{z} = (x+iy) \otimes (x-iy) = (x^2 - y \cdot (-y)) + i(\cancel{-xy} + \cancel{xy}) = x^2 + y^2.$$

L'égalité $|z|^2 = x^2 + y^2$ provient (géométriquement) du théorème de Pythagore.

Enfin, partant de $\frac{1}{z}$, la multiplication aux numérateur et dénominateur par $\bar{z}$ donne le résultat voulu. □

Remarque 1. Cette proposition donne discrètement une nouvelle identité remarquable : $a^2+b^2 = (a+ib)\otimes(a-ib)$ (on applique la proposition à $z = a+ib$).

Remarque 2. Grâce à ces formules, et sous réserve que le produit géométrique et algébrique soit le même, il n'est pas difficile de voir que si $z = R\angle\theta$, alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{R}\angle-\theta$: on a

$$\frac{1}{z} = \bar{z} \times \frac{1}{|z|^2} = (R\angle-\theta) \times (\frac{1}{R^2}\angle 0) = \frac{1}{R}\angle-\theta.$$

En effet, $|z|$ étant une distance, c'est en particulier un réel positif, donc son argument est nul.

Remarque 3. On a montré que si $z = x+iy$, alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$: on sait mettre $\frac{1}{z}$ sous forme algébrique.

Corollaire 3.4 *Un nombre complexe z est réel si, et seulement si $z = \bar{z}$. Il est imaginaire pur si, et seulement si $z = -\bar{z}$.*

Preuve. Un nombre complexe z est réel si, et seulement si $\Im(z) = 0$, si et seulement si $\frac{z-\bar{z}}{2i} = 0$, si et seulement si $z = \bar{z}$. On procède de même pour les autres égalités.

Corollaire 3.5 *Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales.*

Preuve. Il est clair que si $\Re(z) = \Re(z')$ et $\Im(z) = \Im(z')$, alors $z = z'$. Inversement, si $z = z'$, alors $\bar{z} = \bar{z'}$ (ce sont les mêmes coordonnées que z et z' au signe près), donc

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z' + \bar{z'}}{2} = \Re(z'),$$

et de même pour $\Im(z)$. □

Enfin, on résume rapidement les propriétés vérifiées par la conjugaison et le module. Géométriquement, les propriétés de la conjugaison découlent toutes des propriétés des symétries axiales, et toujours géométriquement, la relation $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ est évidente, car on a défini la multiplication de sorte qu'elle multiplie les longueurs (en plus d'ajouter les angles).

Proposition 3.6 (Propriétés de la conjugaison) *Soient z et z' deux nombres complexes. On a $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{z \otimes z'} = \bar{z}\bar{z'}$, et $|\bar{z}| = |z|$.*

Proposition 3.7 (Propriétés du module) *En plus de la propriété $|z|^2 = z \otimes \bar{z}$ déjà citée, on a pour tous nombres complexes z et z' :*
- *$|z \otimes z'| = |z| \cdot |z|'$, et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;*
- *$|z| = 0$ si, et seulement si $z = 0$;*
- *$|z \pm z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).*

Preuve. Seule l'inégalité triangulaire est difficile à démontrer algébriquement, et découle de $\Re(z \otimes z') \leq |z| \cdot |z'|$. Le lecteur en exercice s'amusera à la démontrer. □

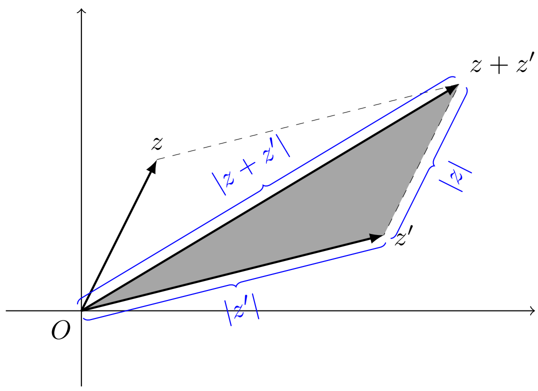
3.3 Coïncidence des deux points de vue

Le but de cette section est de montrer qu'en faisant nos calculs géométriquement et algébriquement, on obtient exactement les mêmes résultats.

Proposition 3.8 *L'addition et la multiplication algébriques coïncident avec l'addition et la multiplication géométriques : si z et z' sont deux nombres complexes, alors $z \times z' = z \otimes z'$.*

On n'a donc plus besoin de préciser si le calcul qu'on fait est algébrique et géométrique, puisque ça conduit aux mêmes résultats ; on oubliera la notation $\otimes$ pour garder uniquement $\times$. C'est cette équivalence qui va faire la force des nombres

FIGURE 3.7 – Inégalité triangulaire.



complexes : un problème purement géométrique va se traduire en énoncé algébrique, de nature calculatoire.

Preuve. Elle est en deux étapes. D'abord, on montre que les propriétés algébriques de la multiplication ne sont en fait qu'une traduction des propriétés du produit géométrique. Ensuite, on montre que l'interprétation géométrique du produit (« multiplier par z revient à dilater avec un coefficient $|z|$ et tourner d'un angle $\arg(z)$ ») se retrouve à travers la multiplication algébrique.

Première étape : montrer que le produit algébrique se déduit du produit géométrique.

Rappelons que pour définir $(a+ib)\otimes(c+id)$, on a fait les calculs et suggestions suivantes :

$$\begin{aligned}(a+ib)\otimes(c+id) &= ac+iad+ibc+(i\otimes i)bd \quad \text{(on veut développer le produit)}\\ &= (ac-bd)+i(ad+bc) \quad \text{(on veut } i^{\otimes 2}=-1).\end{aligned}$$

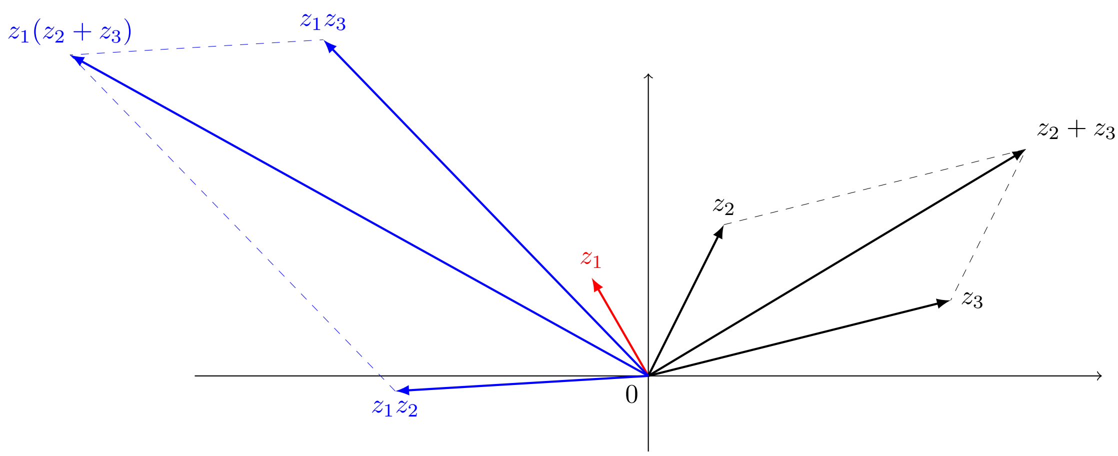
Le deuxième point se justifie d'un point de vue géométrique, comme on l'a vu : on a déjà montré que $i^2=-1$. Du coup, en posant $i^{\otimes 2}=-1$, le produit algébrique est bien dans la continuité du produit géométrique. Il reste donc à prouver que le développement du produit est cohérent avec le produit géométrique, au sens où le produit géométrique le vérifie aussi (je reviendrai là-dessus). Autrement dit, on doit vérifier qu'on a bien

$$z_1\times(z_2+z_3)=z_1\times z_2+z_1\times z_3,$$

si z_1, z_2 et z_3 sont trois nombres complexes. Abrégeons $z\times z'$ en zz' pour un souci de rédaction. Comme la somme $\vec{u}+\vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'obtient en formant un parallélogramme à partir de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il suffirait alors de montrer que $z_1(z_2+z_3)$ complète bel et bien le parallélogramme formé à partir de z_1z_2 et z_1z_3 (on prend $\vec{u}$ d'affixe z_1z_2 et $\vec{v}$ d'affixe z_1z_3) ; puisque c'est $z_1z_2+z_1z_3$ qui est censé compléter ce parallélogramme, on en déduirait l'égalité.

L'observation cruciale est que les dilatations et rotations conservent les parallélogrammes. Or, la multiplication par z_1 est une rotation suivie d'une dilatation (ou dans l'autre sens). De fait, le parallélogramme de sommets 0, z_2,

FIGURE 3.8 – Effet d'une multiplication par z_1 sur un parallélogramme.



z_3 et $z_2 + z_3$ est envoyé par la multiplication par z_1 sur le parallélogramme de sommets 0, z_1z_2, z_1z_3 et $z_1(z_2 + z_3)$. Ce parallélogramme est censé être complété par $z_1z_2+z_1z_3$ (par définition de la somme de deux vecteurs, et donc de la somme de deux nombres complexes), donc $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$; tout ceci apparait sur la figure 3.8. Le produit géométrique vérifie donc le développement du produit et $i^2 = -1$, donc

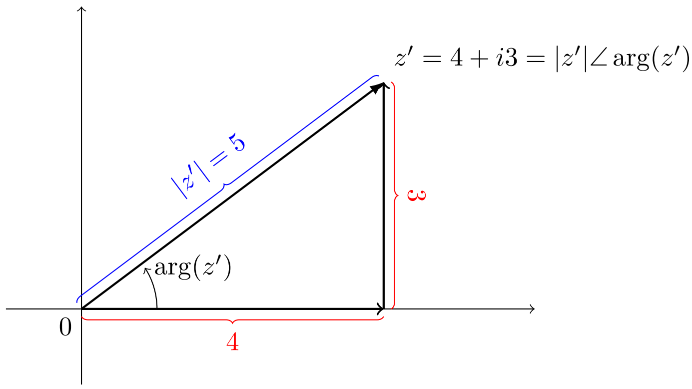
$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac+iad+ibc+i^2ad \text{ (on vient de le prouver)}\\ &= (ac-ad)+i(ad+bc) \text{ (car } i^2=-1)\\ &= (a+ib)\otimes(c+id).\end{aligned}$$

Deuxième étape : montrer que le produit géométrique se déduit du produit algébrique.

On ne peut pas s'affranchir de cette étape, parce que pour montrer l'égalité entre les deux produits dans la première étape, on a dû supposer que si la multiplication a l'effet d'une dilatation et d'une rotation, alors $\times$ coincide avec $\otimes$. Mais pour l'instant, on ne peut pas exclure que si on commençait par définir le produit algébrique, alors certaines multiplications ne reviendraient pas à dilater et à tourner, si bien qu'on ne pourrait pas reproduire le raisonnement ci-dessus pour avoir l'égalité.

En conséquence, supposons avoir défini d'abord le produit algébrique, et voyons comment le produit géométrique en est conséquence. Soient z et z' deux nombres complexes dont je veux étudier le produit, et écrivons $z = x + iy$, $z' = a + ib$. Tout d'abord, si $a = 0$ et $b = 1$ (autrement dit, si $z' = i$), alors $(x+iy)\otimes z' = i\otimes x + i^{\otimes 2}y = -y+ix$. Or, les vecteurs de coordonnées (x, y) et $(-y, x)$ sont orthogonaux (et de même norme), car leur produit scalaire égale $x\cdot(-y)+y\cdot x = 0$. Le second est donc bien l'image du premier après une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, et on vient de montrer que multiplier par i revient bien à tourner d'un angle $\frac{\pi}{2}$ (et à dilater d'un coefficient 1, c'est-à-dire pas du tout).

FIGURE 3.9 – Représentation de $z' = 4 + i3$ (exemple).

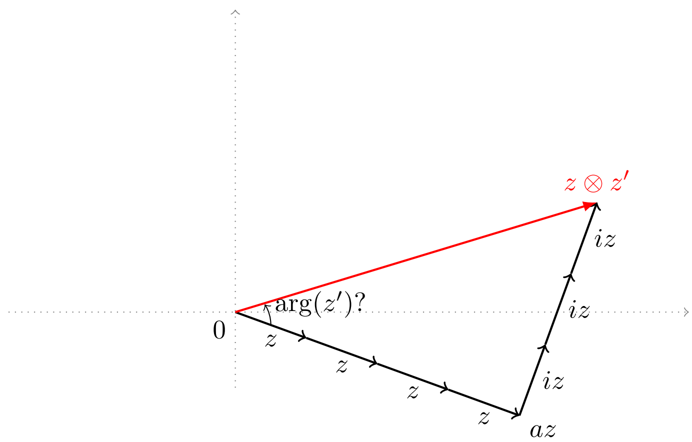


Prenons maintenant un z' quelconque, toujours sous la forme $a + ib$ (a et b sont réels). On peut le représenter sur la figure 3.9 (j'ai pris $z' = 4 + i3$ sur cette figure). La multiplication de z par z' donne

$$z \otimes z' = z \otimes a + z \otimes ib = az + \left(bz \text{ tourné d'un angle } \frac{\pi}{2}\right),$$

d'après le paragraphe précédent. La construction de $z \otimes z'$ sur le plan complexe s'effectue donc suivant la figure 3.10, on obtient un triangle de sommets d'affixes 0, az et $z \otimes z'$.

FIGURE 3.10 – Construction géométrique du produit algébrique par $z' = 4 + i3$ (exemple).



Si on montre que l'angle en 0 égale $\arg(z')$, on aura bien montré que multiplier algébriquement z par z' revient à tourner d'un angle $\arg(z')$ (le fait que $z \otimes z'$ soit de module $|z| \cdot |z'|$ est évident et déjà établi même algébriquement), c'est-à-dire à multiplier géométriquement : on aura bien $z \otimes z' = zz'$, et la preuve se termine. Or, les triangles des figures 3.9 et 3.10 sont semblables, car le second s'obtient à partir du premier en multipliant les longueurs de chaque côté par $|z|$, donc les angles de ces deux triangles se correspondent, et l'angle en 0 sur la figure 3.10 est bien $\arg(z')$, d'où le résultat. $\square$

Exemple. Grâce à cette proposition, on peut trouver un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{8}$ sous sa forme algébrique, et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Soit $z = 1\angle\frac{\pi}{8} = x + iy$. On a

$$z^2 = 1\angle\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right),$$

mais aussi,

$$z^{\otimes 2} = (x+iy)^{\otimes 2} = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

Comme $z^2 = z^{\otimes 2}$, on a égalité entre $x^2 - y^2 + i(2xy)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, donc on a aussi égalité entre leurs parties réelles et imaginaires, ce dont on déduit $x^2 - y^2 = 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}$. La résolution de ce système donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4x}\right)^2 & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y & = & \frac{\sqrt{2}}{4x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^4 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{1}{8} & = & 0 \\ y & = & \frac{\sqrt{2}}{4x} \end{array}\right.$$

La résolution de la première équation en x aboutit à

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = x = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Le sinus s'obtient grâce à la relation de Pythagore (ou l'égalité $y = \frac{\sqrt{2}}{4x}$), et vaut $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. On reviendra sur ce genre d'exemple plus tard, notamment en exercice.

3.4 Exponentielle complexe

Nous avons vu la définition de l'exponentielle pour un nombre réel. Loin de moi l'intention de la définir pour tout nombre complexe. Néanmoins, on peut définir l'exponentielle pour un nombre imaginaire pur.

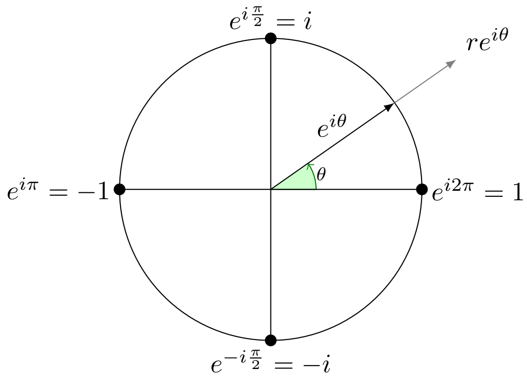
Définition 3.9 *Il existe une unique fonction f dérivable, définie sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout x réel, $f'(x) = i \cdot f(x)$, et $f(0) = 1$. On note $x \mapsto e^{ix}$ la fonction vérifiant ces conditions.*

On a vu, lorsqu'on traitait l'exponentielle réelle, que toutes ses propriétés découlaient de cette définition comme solution de cette équation. Je ne vais pas le redémontrer, mais on a encore cette formule :

Proposition 3.10 *Soient ϕ et θ deux réels. On a $e^{i(\phi+\theta)} = e^{i\phi}e^{i\theta}$.*

Alors, le théorème suivant permet de laisser tomber la notation $R\angle\theta$ pour une bien meilleure.

Figure 3.11 – Formule d'Euler illustrée.



Théorème 3.11 (Formule d'Euler) *Soit θ un nombre réel. On a*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Preuve. La preuve revient à démontrer l'unicité annoncée dans la définition, on va la démontrer. Soit $f(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}$. La fonction f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables (à noter que le dénominateur ne s'annule jamais). On a

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{i \cdot e^{i\theta}(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) - e^{i\theta}(-\sin(\theta) + i\cos(\theta))}{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2} \\ &= \frac{e^{i\theta}(\cancel{i\cos(\theta)} + i^2\sin(\theta) + \sin(\theta) - \cancel{i\cos(\theta)})}{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2} \\ &= \frac{e^{i\theta}(-\sin(\theta) + \sin(\theta))}{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2} = 0. \end{aligned}$$

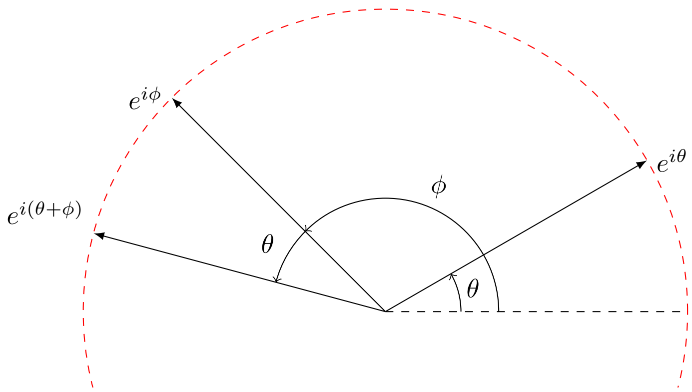
Donc f est une fonction constante, toujours égale à $f(0) = 1$. Ceci prouve que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. $\square$

Comme illustré sur la figure 3.13, cette formule dit que $e^{i\theta}$ est le nombre complexe correspondant au point M du cercle trigonométrique tel que l'angle entre l'axe des réels positifs et $\vec{OM}$ soit θ. Au lieu d'écrire un nombre complexe sous la forme $z = R\angle\theta$ (notation bien pratique mais qui n'était qu'une notation, vu que ce n'est pas de la forme $a + ib$ comme on l'a demandé en définition), on peut dorénavant écrire $z = Re^{i\theta}$: c'est la *forme exponentielle* d'un nombre complexe non nul (ici $R = |z|$ et $\theta = \arg(z)$). Concrètement, pour atteindre z, on doit prendre le vecteur du cercle trigonométrique correspondant à $e^{i\theta}$ dirigé vers z, et multiplier ce vecteur par la longueur de z. Avec cette représentation, la formule de multiplication géométrique pour les nombres complexes devient presque évidente :

$$(Re^{i\phi}) \times (re^{i\theta}) = Rre^{i(\theta+\phi)}.$$

La forme exponentielle est presque caractérisée par le nombre qu'elle représente :

FIGURE 3.12 – Illustration de la formule $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$.



Proposition 3.12 *Soient z et z' deux nombres complexes. Alors,*

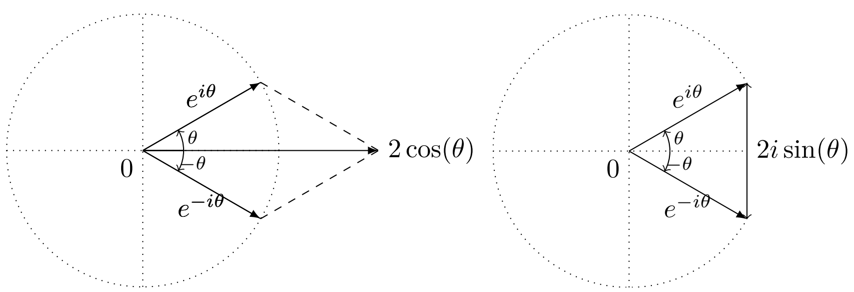
$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \ \textit{et} \ \arg(z) = \arg(z') \mod 2\pi.$$

Autrement dit, si $Re^{i\theta} = R'e^{i\theta'}$ avec R et $R' > 0$, alors $R = R'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$ avec k un entier relatif.

Les formules très intéressantes de l'exponentielle en induisent d'autres avec grande facilité. Une conséquence importante de la formule d'Euler est qu'en fait, les fonctions cosinus et sinus peuvent être définies à partir de la fonction exponentielle. Plus précisément, les formules $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ vues précédemment donnent, grâce à la relation $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$:

Proposition 3.13 *Pour tout réel θ, on a* $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, *et* $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

FIGURE 3.13 – Liens entre cos, sin et exp.



Mais surtout, toutes les identités trigonométriques vues au premier chapitre peuvent se déduire des propriétés de l'exponentielle complexe et de la multiplication algébrique. Je ne compte pas les redémontrer, sauf en exercice, par contre on peut en produire de nouvelles bien utiles. Par exemple, l'exponentielle permet d'exprimer $\cos(\theta+\phi)$ et $\sin(\theta+\phi)$ à l'aide des cosinus et sinus de θ et ϕ. Comme les fonctions cosinus et sinus sont nettement moins agréables à manier que l'exponentielle, c'est par elle qu'on passe pour tirer quelque identité. On a :

$$e^{i(\theta+\phi)} = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi),$$

mais aussi,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\phi)} &= e^{i\theta}e^{i\phi} \\ &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \\ &= (\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)) + i(\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)). \end{aligned}$$

On en déduit, par unicité des parties réelle et imaginaire :

$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi), \quad \sin(\theta+\phi) = \cos(\theta)\sin(\phi) + \cos(\phi)\sin(\theta).$$

Il faut connaître ces formules par cœur, et si on ne les connaît pas par cœur, il faut savoir les retrouver. Cet exemple illustre une grande force des nombres complexes sur laquelle je ne cesse et ne cesserai d'insister : en une seule équation, on obtient deux informations à la fois. De ces deux égalités, en prenant $\phi = \theta$, on déduit les deux identités suivantes, très classiques :

Proposition 3.14 *Pour tout réel θ, on a*

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = 2\cos(\theta)^2 - 1 = 1 - 2\sin(\theta)^2,$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta).$$

La première égalité est bien commode pour, par exemple, remplacer un embêtant $1 - \cos(\theta)$ par un $2\sin(\theta/2)^2$.

Toujours grâce à l'exponentielle, on peut exprimer simplement $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction des cosinus et sinus de θ. Pour cela, on considère cette fois $e^{i3\theta}$. On a d'une part,

$$e^{i3\theta} = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta),$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} e^{i3\theta} &= (e^{i\theta})^3 \\ &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 \\ &= (\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2) + i(3\cos(\theta)^2\sin(\theta) - \sin(\theta)^3), \end{aligned}$$

après un développement que le lecteur en exercice se chargera de faire. On en déduit que

$$\cos(3\theta) = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta), \quad \sin(3\theta) = -4\sin(\theta)^3 + 3\sin(\theta).$$

On vient d'exprimer des fonctions trigonométriques évaluées en un multiple de θ à l'aide de puissances de fonctions trigonométriques évaluées en θ. On peut aussi faire le chemin inverse. Par exemple, imaginons vouloir exprimer $\cos(\theta)^4$ à l'aide de multiples de θ. Comme $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, on a

$$\begin{aligned} 2^4\cos(\theta)^4 &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 \\ &= (e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}) + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6 \\ &= 2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6, \end{aligned}$$

Alors,
$$\cos(\theta)^4 = \frac{1}{8}\left(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right).$$
On procède de même pour les sinus. La méthode pour déterminer $\cos(\theta)^n$ est, essentiellement, de développer $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$ et de regrouper les exponentielles conjuguées (exercice : pourquoi peut-on être sûr de ne pas avoir une exponentielle « seule » ?), pour y reconnaître des cosinus. Le plaisir se prolongera en exercice.

Notons, enfin, une méthode similaire pour traiter les tangentes. Si, par exemple, je veux exprimer $\tan(3\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$, je considère le nombre complexe $z = 1 + i\tan(\theta)$. Ce nombre a l'intérêt d'avoir pour argument θ, d'après la proposition 3.2. Si z a pour argument θ, alors z^3 a pour argument 3θ, puisque c'est ainsi qu'on a défini le produit géométrique, et la proposition 3.2 donne, encore une fois, que $\tan(3\theta) = \frac{\Im(z^3)}{\Re(z^3)}$. Calculons donc z^3 :
$$z^3 = (1 + i\tan(\theta))^3 = (1 - 3\tan(\theta)^2) + i(3\tan(\theta) - \tan(\theta)^3),$$
donc :
$$\tan(3\theta) = \frac{3\tan(\theta) - \tan(\theta)^3}{1 - 3\tan(\theta)^2}.$$

Avant de conclure cette section, plusieurs remarques :

— On a évidemment, presque par définition, que $\arg(Re^{i\theta}) = \theta$ (le R compte pour du beurre, *pourvu qu'il corresponde bien au module d'un nombre complexe, c'est-à-dire à une quantité positive*). Ainsi, on peut retrouver plusieurs propriétés de l'argument en écrivant d'abord les nombres complexes évalués sous forme exponentielle. Par exemple, pour retrouver que $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$, on écrit que $z = Re^{i\theta}$, et on utilise les propriétés de l'exponentielle pour trouver que
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg\left(\frac{1}{Re^{i\theta}}\right) = \arg\left(\frac{1}{R}e^{-i\theta}\right) = -\theta = -\arg(z).$$
De la même manière, on retrouve que $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$, ou $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.

— Dans les calculs, il est bon de savoir écrire $ze^{i\theta}$, où z est un nombre complexe, sous la forme exponentielle $Re^{i\phi}$, en écrivant z sous sa forme exponentielle. Ça peut parfois simplifier des calculs ; on tombe par exemple très souvent sur $-e^{i\theta}$ (qui se réécrit $e^{i(\theta+\pi)}$), ou $ie^{i\theta}$ (qui se réécrit $e^{i(\theta+\pi/2)}$).

3.5 Les complexes simplifient la vie

Le but de la section, qui se prolongera dans les exercices, est de montrer à quel point le traitement algébrique de problèmes géométriques (*via* les nombres complexes) est puissant. Une raison potentielle à cette efficacité redoutable est le fait que dans *un seul* nombre complexe, on ait toujours *deux* informations, à savoir une longueur et un angle. Et il est souvent assez facile de calculer plutôt que de raisonner géométriquement ; même une machine peut s'en charger.

Pour ce faire, on va rapidement traduire en termes de nombres complexes les principaux sujets géométriques.

Proposition 3.15 (Affixe d'un vecteur) *Soient A et B deux points du plan, d'affixes respectives a et b. Alors, on a $\vec{AB} = \vec{OM}$ pour M d'affixe $b - a$.*

Autrement dit, si on veut travailler sur le vecteur $\vec{AB}$ avec le point de vue des nombres complexes, on doit traduire $\vec{AB}$ en $b - a$.

Preuve. Si $\vec{OM} = \vec{AB}$, alors $\vec{OM} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$ par la relation de Chasles. Comme $\vec{OA}$ a pour affixe a, et $\vec{OB}$ pour affixe b, on en déduit que $\vec{OM}$ a pour affixe $-a + b$. □

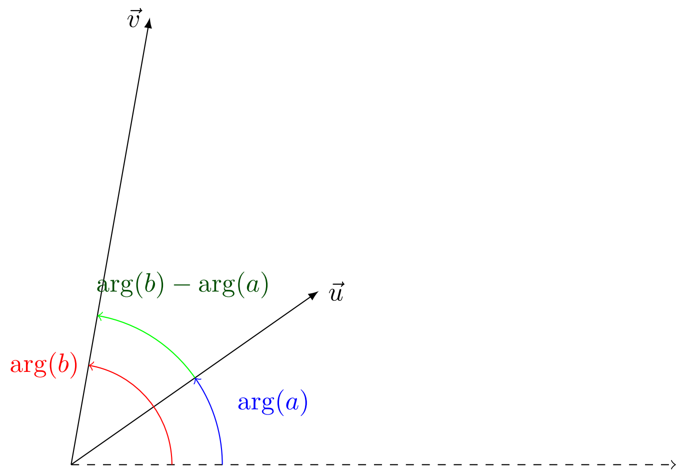
Proposition 3.16 (Norme d'un vecteur) *Soient A et B deux points du plan. Alors, la norme de $\vec{AB}$ est $|b - a|$.*

Preuve. C'est évident, grâce à la proposition précédente et la définition du module d'un nombre complexe. □

Proposition 3.17 (Angle entre deux vecteurs) *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, d'affixes a et b. Alors, l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à $\arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg(b) - \arg(a)$.*

Preuve. On peut toujours supposer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour extrémité O. Un dessin rend alors clair que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ égale $\arg(b) - \arg(a)$, et ceci égale $\arg\left(\frac{b}{a}\right)$ grâce aux propriétés de la multiplication complexe. □

FIGURE 3.14 – Angle entre deux vecteurs.



Enfin, il est souvent utile de savoir reconnaitre l'équation d'un cercle.

Proposition 3.18 (Équation d'un cercle) *Soit I un point d'affixe ω, et R un réel positif. Les points M d'affixe z qui sont sur le cercle de centre I et de rayon R vérifient :*

$$|z - \omega| = R.$$

Preuve. Être sur un tel cercle signifie que $IM = R$, et donc, grâce à la proposition 3.16, que $|z - \omega| = R$. □

Exemple 1. À la lumière de tout ce qui précède, pour montrer qu'un angle particulier dans un triangle égale, par exemple, $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{3}$ (selon ce qu'on veut démontrer), on utilise la proposition 3.17. Pour fixer les idées, si A, B et C sont trois sommets d'un triangle, et qu'on veut montrer que le triangle est rectangle en A, on calcule l'angle entre $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et on regarde s'il vaut $\pm\frac{\pi}{2}$. C'est-à-dire, comme les affixes de ces vecteurs sont respectivement $b - a$ et $c - a$, on calcule $\frac{c-a}{b-a}$ et on en déduit son argument, qui est l'angle désiré. Le module peut aussi informer sur la longueur des triangles : si $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$, on en déduit que $|c-a| = |b-a|$, et donc que $AC = AB$: le triangle est isocèle en A. Un exemple de tel triangle est le triangle dont les sommets ont pour affixes $a = 2 + i12$, $b = (-7 - 5\sqrt{3}) + i(-3 + 3\sqrt{3})$ et $c = (-7 + 5\sqrt{3}) + i\left(-3 - 3\sqrt{3}\right)$. En effet, le calcul montre que

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-9 + 5\sqrt{3} - i(15 - 3\sqrt{3})}{-9 - 5\sqrt{3} - i(15 - \sqrt{3}},$$

et on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur pour faire disparaître les nombres complexes au dénominateur (qui sera remplacé par le module au carré du dénominateur, c'est-à-dire un réel positif). On arrive alors à

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{204 + i204\sqrt{3}}{408},$$

dont le module est

$$\frac{\sqrt{204^2 + 3 \cdot 204^2}}{408} = \frac{\sqrt{4 \cdot 204^2}}{408} = \frac{408}{408} = 1.$$

Donc $AB = AC$ et ABC est isocèle en A. Par ailleurs, $\tan\left(\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\right) = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$, donc cet angle vaut $\frac{\pi}{3}$ ou $4\frac{\pi}{3}$ modulo 2π. Le fait que la partie réelle de ce quotient soit positive implique que l'angle vaut $\frac{\pi}{3}$. En fait, on peut montrer que ce triangle est équilatéral : on a $AB = AC = BC$; on peut le déduire immédiatement du fait qu'il soit isocèle en A et que l'angle en A soit $\frac{\pi}{3}$.

Exemple 2. Avec les nombres complexes, vérifier que trois points distincts A, B et C (d'affixes respectives a, b et c) sont alignés revient à démontrer que l'angle $\widehat{BAC}$ égale 0 ou $\pm\pi$ (ou l'angle $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$... peu importe). Ceci est équivalent à la condition que $\frac{c-a}{b-a}$ soit d'argument 0 ou $\pm\pi$, ce qui équivaut à la condition que $\frac{c-a}{b-a}$ soit réel. Par exemple, les points d'affixes respectives 2, $4 + i2$, $7 + i5$ sont alignés : on a

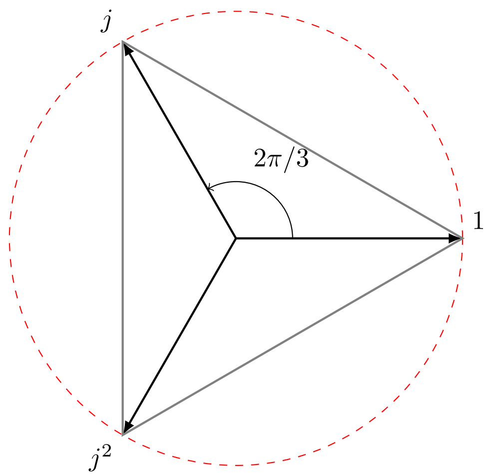
$$\frac{(7+i5) - 2}{(4+i2) - 2} = \frac{5 + i5}{2 + i2} = \frac{5\cancel{(1+i)}}{2\cancel{(1+i)}} = \frac{5}{2} \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3. Soit $j = e^{i2\pi/3}$. Remarquons d'abord que ce nombre est très intéressant : on a $j^3 = (e^{i2\pi/3})^3 = e^{i2\pi} = 1$. Par conséquent,

$$1 + j + j^2 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = 0,$$

en tant que somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison j. Géométriquement, cela se traduit par le fait que les vecteurs associés à 1, j et j^2 s'annulent : c'est une traduction du fait que O soit le centre de gravité du triangle dont les sommets ont pour affixes 1, j et j^2 (c'est-à-dire : l'isobarycentre).

FIGURE 3.15 – Illustration de $1 + j + j^2 = 0$.



Exemple 4. À présent, on considère un triangle ABC, et les points A, B et C sont associés à des nombres complexes a, b et c. Alors, on peut démontrer que

$$ABC \text{ est un triangle équilatéral } \Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0.$$

Autrement dit, toute l'essence de la définition de triangle équilatéral est réunie dans une seule équation, à l'aide des nombres complexes !

Pour prouver ceci, remarquons que si ABC est un triangle équilatéral, alors $AB = AC$, et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Réciproquement, ces deux conditions suffisent à prouver que ABC est équilatéral : si $AB = AC$, alors ABC est isocèle en A, et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux. Comme la somme des angles d'un triangle égale π et que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, on en déduit que tous les angles égalent $\frac{\pi}{3}$, et donc que le triangle est équilatéral.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour être équilatéral invoque une condition sur les longueurs et une autre sur un angle ; c'est typiquement ce qui peut être contenu en un seul nombre complexe : $AB = AC$ se traduit en $|b - a| = |c - a|$. Comme $\frac{c-a}{b-a}$ est de module 1 d'après cette égalité, et on a vu que

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3},$$

donc finalement $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$. Ceci conduit à

$$c-a = e^{i\pi/3}(b-a) \Leftrightarrow c-a+ae^{i\pi/3}-be^{i\pi/3} = 0 \overset{[-1=e^{i\pi}]}{\Longleftrightarrow} c+a(e^{i\pi/3}-1)+be^{i4\pi/3} = 0.$$

On a $e^{i4\pi/3} = j^2$, donc on est proche de l'expression désirée, quitte à échanger a, b et c qui jouent des rôles symétriques, mais le terme $e^{i\pi/3} - 1$ nous embête. Pour montrer qu'il égale j, il y a plusieurs solutions :

— on le voit géométriquement : il s'avère que $e^{i\pi/3}$ est le symétrique par rapport à l'axe des imaginaires de j ; alors, on peut en déduire que la distance entre ces deux points est $2\Re(e^{i\pi/3}) = 2\cos(\pi/3) = 1$, donc $e^{i\pi/3} - 1 = j$;

— on sait écrire $e^{i\pi/3} - 1$ sous sa forme algébrique : on a $e^{i\pi/3} - 1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$;

— on utilise un procédé qui peut devenir un classique du genre quand on a affaire à une somme ou différence d'exponentielles : on factorise par l'exponentielle de la moyenne des arguments ; ce procédé fera nécessairement apparaître le produit d'une exponentielle et d'un cosinus ou sinus, grâce aux propriétés de l'exponentielle. Ici, on a

$$\begin{aligned} e^{i\pi/3} - 1 &= e^{i\pi/6}\left(e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6}\right) \\ &= 2ie^{i\pi/6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= ie^{i\pi/6} = e^{i\pi/2}e^{i\pi/6} = e^{2i\pi/3} = j. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on trouve $c + aj + bj^2 = 0$, donc $a + bj + cj^2 = 0$ après multiplication de l'égalité par j^2, en se souvenant que $j^3 = 1$. Ainsi, par exemple, le triangle de la figure 3.15 est équilatéral, car $j^2 + 1 \cdot j + j \cdot j^2 = j^2 + j + 1 = 0$.

Exemple 5. Soit $\mathcal{Q}$ un quadrilatère quelconque, et construisons des carrés sur les côtés de ce quadrilatère, comme indiqué sur la figure 3.16.

On va prouver que les segments joignant les centres des carrés opposés sont perpendiculaires, et sont de même longueur, comme cela semble être le cas sur la figure. Ce résultat impressionnant nécessiterait énormément d'ingéniosité pour être démontré par la pure géométrie (ça peut faire figure d'exercice), par contre avec les nombres complexes c'est très direct : pour se simplifier la vie, écrivons $2a$, $2b$, $2c$ et $2d$ les affixes des vecteurs formant les côtés du quadrilatère. Le fait que ces vecteurs forment un quadrilatère se traduit mathématiquement par le fait que la somme de ces vecteurs soit nulle, c'est-à-dire

$$a + b + c + d = 0.$$

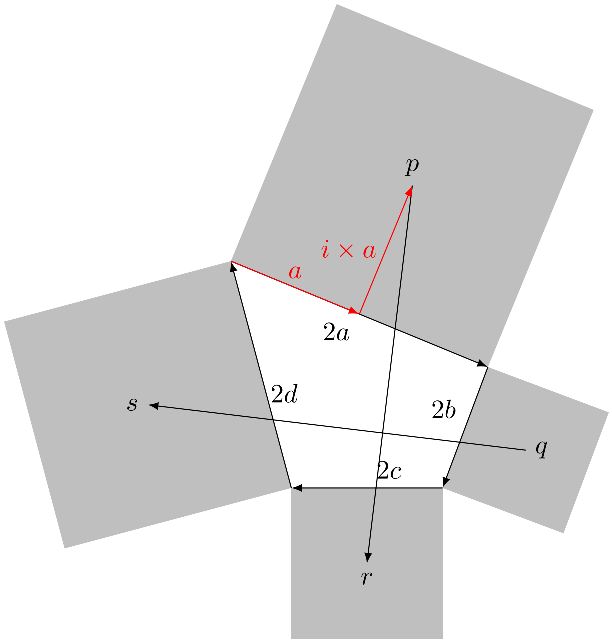
Choisissons, quitte à translater la figure, comme origine du repère le sommet où $2a$ commence. Pour atteindre le centre p du carré construit de ce côté, on se déplace d'un vecteur a, puis on se déplace encore selon le vecteur a après avoir toutefois tourné d'un angle droit (ce qui correspond à la multiplication de a par $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$) ; autrement dit,

$$p = a + i \times a = a(1 + i)$$

De la même manière, on trouve

$$q = 2a + (1 + i)b, r = 2a + 2b + (1 + i)c, \text{ et enfin } s = 2a + 2b + 2c + (1 + i)d.$$

FIGURE 3.16 – Un quadrilatère et ses carrés adjacents



Les vecteurs joignant les sommets des carrés opposés ont pour affixes respectives

$$A = s - q = (b + 2c + d) + i(d - b), \text{ et } B = (a + 2b + c) + i(c - a).$$

On veut montrer que A et B sont perpendiculaires et de norme égale (c'est-à-dire $|A| = |B|$) ; ceci revient à vérifier que $\arg(\frac{B}{A}) = \pm\frac{\pi}{2}$ et $\left|\frac{B}{A}\right| = 1$, c'est-à-dire $\frac{B}{A} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$, et $B = \pm iA$. Cette vérification est immédiate, car :

$$A + iB = (a + b + c + d) + i(a + b + c + d) = 0,$$

donc $A = -iB$.

3.6 Exercices

Exercice 1. À l'aide de l'exponentielle complexe, redémontrer les identités trigonométriques suivantes :

1. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$;
2. $\cos(\theta \pm \pi) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\theta \pm \pi) = -\sin(\theta)$;
3. $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$;
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$;
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$;
6. $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$, et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$.

Exercice 2. Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $ad - bc = 1$. Soit z un nombre complexe qui n'est pas réel. Calculer la partie imaginaire de $\frac{az+b}{cz+d}$ (en vérifiant que ce nombre est bien défini) à l'aide de celle de z.

Exercice 3. Donner les solutions générales d'une équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue z complexe. Appliquer cette méthode à

$$4z^2 - 16z + 11 - 12 = 0, \quad z^2 - 5z + 4 + 10i = 0, \quad z^4 - 3z^2 + 2 = 0.$$

Exercice 4. On veut calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Pour cela, montrer que $z = \exp(i2\pi/5)$ vérifie $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, puis que $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 5. Écrire $\cos(5x)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 6. Soit ω une racine n-ième de l'unité, c'est-à-dire $\omega^n = 1$. Montrer que ω s'écrit $e^{i2\pi k/n}$ pour un certain entier k. Représenter les différents ω possibles sur un dessin. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i2\pi k/n} \text{ et } \prod_{k=0}^{n-1} e^{i2\pi k/n}.$$

Exercice 7. Démontrer à l'aide des nombres complexes que la somme des angles d'un triangle égale π.

Exercice 8. Soient u et v deux nombres complexes. Montrer que

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Comment interpréter géométriquement ce résultat ?

Exercice 9. Déterminer le module et un argument de $\frac{1+2i}{3+4i}$ et $(\sqrt{3} + 3i)^{19}$.

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^3 = 3i$, puis $z^n = 1$. En déduire les solutions des équations $(z+2)^3 = 3i$ et $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

Exercice 11. Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\frac{3+6i}{3-4i}; \qquad \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}; \qquad 4e^{2i\pi/3}; \qquad 8e^{3i\pi/4} - 5e^{i\pi/3}.$$

Exercice 12. Mettre sous forme exponentielle les nombres suivants :

$$\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \qquad (1-i), \qquad \frac{3}{1-i}, \qquad \sqrt{3} + i, \qquad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 13. Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 + 2z + 3$ est réel.

Exercice 14. Dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, quand est-ce que $(1+i)^n \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, calculer le module et l'argument de $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$. En déduire une expression de $\cos(\theta)+\cos(\theta')$ et de $\sin(\theta)+\sin(\theta')$ en fonction de $\theta+\theta'$ et $\theta-\theta'$.

Exercice 16. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 17. Soient a et b deux nombres réels non tous nuls. Justifier l'existence d'un réel ϕ tel que $\cos(\phi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\phi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. En déduire comment résoudre une équation de la forme $a\cos(\theta)+b\sin(\theta) = c$ d'inconnue θ ; le faire concrètement pour $\cos(\theta)+\sin(\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 18. Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives a et b, et Δ la médiatrice de $[AB]$. Montrer qu'un point M d'affixe z est sur la médiatrice si, et seulement si $|z-a| = |z-b|$.

Exercice 19. Écrire, en termes de nombres complexes, le résultat sur z d'une rotation de centre I (d'affixe ω) et d'angle θ.

Exercice 20. Cet exercice a pour but de déterminer l'ensemble des solutions complexes de l'équation $x^3 - 3px - 2q = 0$.

1. Soit x une solution, et posons $x = s+t$. Montrer que $st = p$, et $s^3+t^3 = 2q$.
2. Trouver une équation du second degré vérifiée par s^3.
3. Résoudre cette équation, et en déduire les valeurs possibles pour s^3. Quelles sont les valeurs possibles pour t^3 ?
4. Sachant que $s^3+t^3 = 2q$, démontrer que
$$x = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}.$$
5. À présent, comment résoudre une équation de la forme $x^3+ax^2+bx+c = 0$?
6. Application : résoudre $x^3 = 15x+4$.

Exercice 21. Soient a et b deux nombres complexes, tels que $a \neq 0$. On étudie l'application $f : z \mapsto az+b$. Une application de cette forme s'appelle une similitude.

1. Si $a = 1$, montrer que f est une translation.
2. Supposons à présent $a \neq 1$. Montrer qu'il existe un nombre complexe ω tel que $f(\omega) = \omega$.
3. En déduire que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie, toutes deux de centre d'affixe ω. La rotation est d'angle $\arg(a)$ et l'homothétie de rapport $|a|$.

4. Montrer que f conserve les angles : si u, v et w sont trois nombres complexes distincts, $\arg\left(\frac{w-u}{v-u}\right) = \arg\left(\frac{f(w)-f(u)}{f(v)-f(u)}\right)$.
5. On remplace f par $z \mapsto a\bar{z} + b$. Que dire de f à présent ?