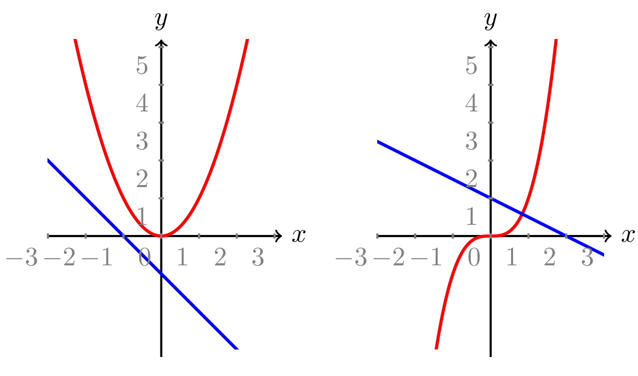
Chapitre 3

Nombres complexes

On considère souvent que le premier inventeur (ou découvreur...) des nombres complexes est Tartaglia, mathématicien italien du XVIᵉ siècle, qui en avait besoin pour résoudre des équations polynomiales du troisième degré. Ceci peut paraître surprenant, puisqu'on les voit habituellement lors de la résolution d'équations polynomiales du second degré dont le discriminant serait négatif. Il s'avère qu'un blocage psychologique empêchait de considérer de tels nombres, qualifiés « d'impossibles » à leurs débuts, mais leur usage pour les équations du troisième degré paraissait plus raisonnables puisque même avec leur apparition, on retombait sur des solutions réelles en fin de calcul. On peut voir cela plus géométriquement sur la figure 3.1 : une solution à l'équation $x^2 = -x - 1$ correspondrait à l'abscisse d'un point d'intersection entre la droite et la parabole sur la première figure, et il n'y a rien de choquant à considérer qu'il n'y a pas de solutions dans ce cas-là, donc l'invention de solutions imaginaires n'a pas un intérêt évident.

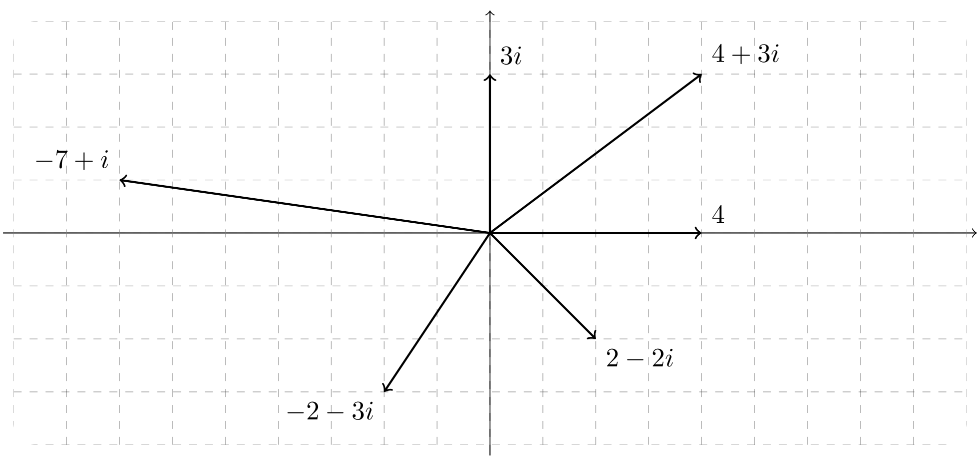
FIGURE 3.1 – Intersection d'une droite et d'une parabole ou cubique.



Par contre, la courbe d'équation $y = x^3$ et une droite d'équation de la forme $y = px + q$ se coupent toujours, et le fait qu'une solution de l'équation $x^3 = px + q$, qui existe nécessairement, soit obligatoirement écrite à l'aide de nombres complexes leur donne du crédit. Néanmoins, les nombres complexes n'étaient vus que comme des artifices intermédiaires dans les calculs. En 1702, Leibniz disait du nombre complexe i, défini comme racine carrée de -1, qu'il était amphibien, dans un statut entre l'existence et l'inexistence. Tant qu'on ne pouvait pas trancher exactement sur ce qu'*est* un nombre complexe, on était incapable de passer ce cap psychologique et de développer la théorie des nombres complexes.

À ce titre, l'interprétation nouvelle par Gauss, à la fin du XVIII$^{\text{e}}$ siècle, a apporté une réponse satisfaisante à cette question, et a complètement révolutionné les mathématiques. Il s'agissait d'une interprétation *géométrique* des nombres complexes, en tant que points (ou vecteurs) du plan : la quantité mystérieuse $x + iy$ pouvait être vue comme le point du plan de coordonnées (x, y), ou le vecteur liant l'origine et ce point. De ce point de vue, le plan est noté $\mathbb{C}$, et est nommé *plan complexe.*

FIGURE 3.2 – Plan complexe $\mathbb{C}$.



L'addition et la multiplication des nombres complexes prend alors un sens géométrique, comme nous allons le voir. Ceci permet d'alterner entre géométrie et algèbre, puis de résoudre des problèmes géométriques par le pur calcul, profitant du fait qu'un nombre complexe contient à la fois deux informations sur un point (une longueur et un angle). Et ce n'est que le sommet de l'iceberg.

3.1 Point de vue géométrique

C'est le moment de décrire les nombres complexes, avec le point de vue qui les rend naturels, à savoir le point de vue géométrique (pourtant apparu en second, historiquement). Un peu de terminologie est là pour préciser, à chaque fois, de quoi on parle.

Définition 21 (Nombre complexe, affixe) *En un sens laissé volontairement vague pour le moment, un nombre complexe est un nombre de la forme $x+iy$, où x et y sont des réels. À chaque point du plan M de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $x + iy$, et on dit alors que $x + iy$ est l'affixe de M.*

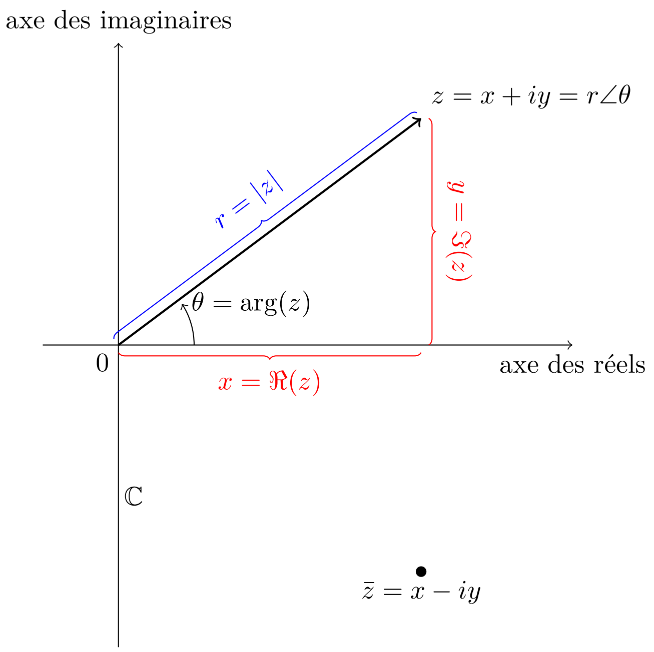
Pour que cette définition fasse sens, on fixe bien sûr un repère orthonormé du plan, sinon on ne peut pas parler de coordonnées d'un point. Même si j'ai, ici, lié les nombres complexes aux points M du plan, les opérations sur les nombres complexes se liront sur les vecteurs $\vec{OM}$, où O est l'origine du plan.

Remarquons que les nombres réels font partie des nombres complexes, ce sont ceux qui s'écrivent $x + i0$. Ils correspondent géométriquement aux points sur l'axe des abscisses. Les nombres sur l'axe des ordonnées sont appelés nombres *imaginaires purs*.

Un vocabulaire propre aux nombres complexes, et correspondant à chaque notion géométrique de base, est présenté dans ce tableau, et illustré par la figure 3.3 :

Nom	Signification	Notation
module de z	longueur r de z	$\lvert z \rvert$
argument de z	angle θ de z	$\arg(z)$
partie réelle de z	abscisse du point d'affixe z	$\Re(z)$
partie imaginaire de z	ordonnée du point d'affixe z	$\Im(z)$
axe des réels	ensemble des nombres réels	$\mathbb{R}$
axe des imaginaires	ensemble des nombres imaginaires	$i\mathbb{R}$
(complexe) conjugué de z	symétrique de z par rapport à l'axe des réels	$\bar{z}$

FIGURE 3.3 – Illustration des notions liées à un nombre complexe.



Si on voit un nombre complexe comme un vecteur, alors on peut naturellement les additionner, au même titre qu'on peut additionner deux vecteurs : si z et z' sont deux nombres complexes associés aux vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$, alors

$z + z'$ est le nombre complexe associé à $\vec{OM} + \vec{ON}$. On va momentanément parler d'addition *géométrique*.

On peut aussi définir une multiplication entre nombres complexes, afin de tenir compte d'une autre opération géométrique bien pratique : on peut définir la multiplication entre deux nombres complexes z et z' de tel sorte que la multiplication équivaille à la *somme de leurs arguments* θ et θ'. Mais pour que cette multiplication corresponde à la multiplication pour les nombres réels, on exige également qu'elle *multiplie les modules*. En résumé, si z et z' correspondent à deux vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$, alors leur produit $z \times z'$ correspond au vecteur $\vec{OP}$, où OP est de longueur $OM \times ON$ (avec les notations introduites ci-dessus, c'est aussi $|z| \times |z'|$), et l'angle entre l'axe des réels et $\vec{OP}$ est $\arg(z) + \arg(z')$; on parlera provisoirement de produit *géométrique*. La multiplication est plus compliquée que l'addition, avec ce point de vue, mais elle revêt une forme plus sympathique si on ne voit pas un point comme une abscisse et une ordonnée, mais plutôt comme une longueur et un angle. C'est ce qui justifie le paragraphe suivant.

Un nombre complexe correspond à un point (ou vecteur) du plan, lequel se décrit à l'aide de deux paramètres, car le plan a *deux dimensions*. Mais il n'y a pas qu'un seul choix pour ces deux paramètres : certes, on peut définir un point du plan à l'aide de son abscisse et de son ordonnée (ce qui donne bien deux paramètres), notées (a, b), qui sont associées au nombre complexe $a + ib$. Mais on peut aussi repérer un point M du plan à l'aide de la longueur r qui sépare ce point de l'origine, et de l'angle θ entre l'axe des réels et le vecteur $\vec{OM}$. C'est pourquoi, en plus de l'écriture $a + ib$ adoptée pour un nombre complexe (l'écriture *cartésienne*, ou *algébrique*), on peut en choisir une deuxième, à savoir $r\angle\theta$ (l'écriture *polaire*) : c'est le nombre complexe non nul qui est l'affixe d'un point M à distance r de l'origine, et tel que l'angle entre l'axe des réels positifs et $\vec{OM}$ soit θ ; cette notation est provisoire. En résumé, si on écrit $z = R\angle\theta$ et $z' = R'\angle\theta'$, alors,

$$(R\angle\theta) \times (R'\angle\theta') = (RR')\angle(\theta + \theta').$$

Exemple. Soit $i = 0 + i1$ le nombre complexe traditionnel. On voit, géométriquement, que le vecteur correspondant à i est de longueur 1 et forme un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec l'axe des réels, donc $i = 1\angle\frac{\pi}{2}$. Avec cette définition de la multiplication, on a

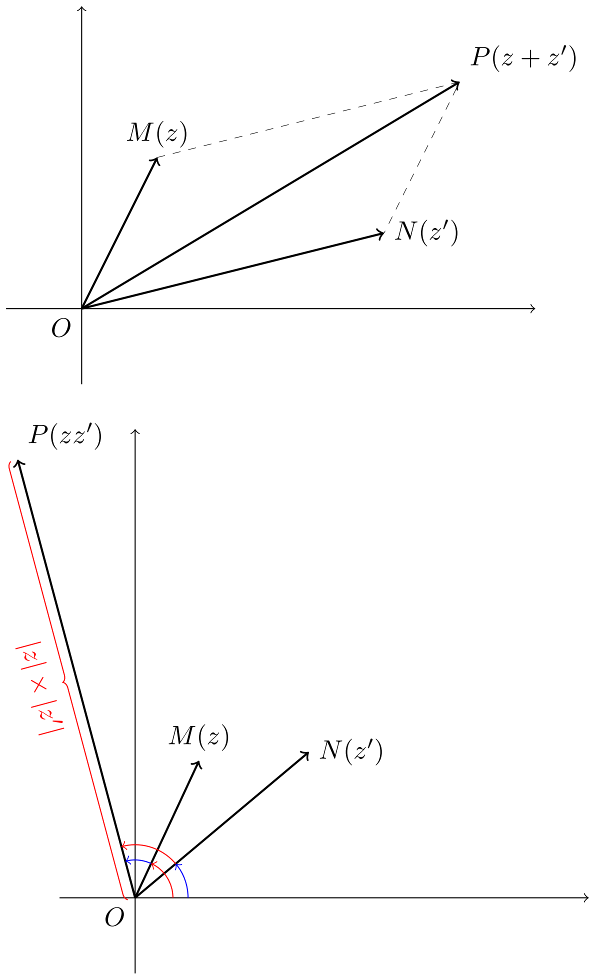
$$i^2 = i \times i = (1\angle\frac{\pi}{2}) \times (1\angle\frac{\pi}{2}) = 1\angle\pi = -1,$$

donc $i^2 = -1$: le nombre i est une racine carrée de -1 ! Vous pouvez vérifier que $-i$ est l'autre racine carrée de -1, et plus généralement, tout nombre complexe a une racine carrée : une racine carrée de $R\angle\theta$ est $\sqrt{R}\angle\frac{\theta}{2}$.

Avec le vocabulaire introduit plus haut, on a en fait $z = |z|\angle\arg(z)$. Sous forme polaire, les réels sont de la forme $R\angle 0$ (s'ils sont positifs) ou $R\angle\pi$ (s'ils sont négatifs), tandis que les imaginaires purs sont de la forme $R\angle\frac{\pi}{2}$ ou $R\angle-\frac{\pi}{2}$. Enfin, il est utile de remarquer que si $z = R\angle\theta$, alors $\bar{z} = R\angle-\theta$. Comme un angle est défini à un multiple de 2π près, on a

$$R\angle\theta = R\angle(\theta + 2\pi) = R\angle(\theta - 2\pi) = \cdots$$

FIGURE 3.4 – Addition et produit (géométriques) de deux nombres complexes.



Selon les opérations géométriques qu'on voudra faire avec nos nombres complexes, une écriture ou l'autre sera plus adaptée, on doit donc savoir passer de l'une à l'autre avec aisance. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 22 *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors,*

$$\tan(\arg(z)) = \frac{y}{x}, \quad z = R\angle\theta = R\cos(\theta) + iR\sin(\theta).$$

Ainsi, connaissant la forme cartésienne $z = x + iy$ d'un nombre complexe, je reconstitue la tangente de l'argument de z (qui vaut $\frac{y}{x}$), puis son argument après une petite réflexion ; le module en découle, parce que

$$R^2 = R^2\cos(\theta)^2 + R^2\sin(\theta)^2 = x^2 + y^2.$$

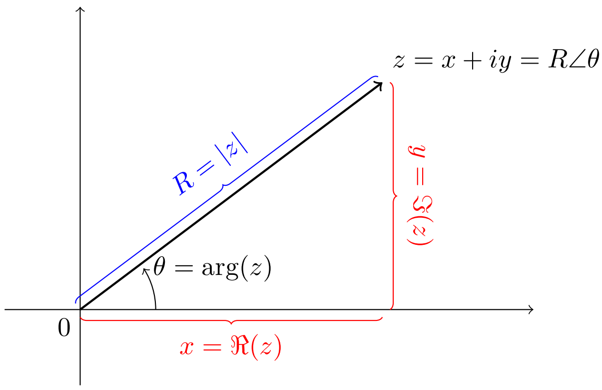
Inversement, si je connais la forme polaire $z = R\angle\theta$ d'un nombre complexe, je trouve $x = \Re(z) = R\cos(\theta)$ et $y = \Im(z) = R\sin(\theta)$.

Preuve. Soit z un nombre complexe non nul, on l'écrit $z = R\angle\theta$. Alors, les relations de trigonométrie dans le triangle T (voir figure 3.5) donnent

$$\cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{x}{R}, \qquad \sin(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{y}{R},$$

donc $x = R\cos(\theta)$, $y = R\sin(\theta)$ et $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x}$. $\square$

FIGURE 3.5 – Illustration de la preuve de la proposition 22.



Exemple 1. On a $1 + i = \sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$. En effet, $\tan(\arg(1 + i)) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, donc $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ à un multiple de π près (je rappelle que la fonction tangente est périodique de période π), donc $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$. Mais $1 + i$ est dans le quadrant supérieur droit du plan, donc son argument ne peut pas être $\frac{5\pi}{4}$. Sous cette forme, il est aisé de voir que $(1 + i)^4 = -4$, car

$$\left(\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}\right)^4 = \sqrt{2}^4\angle 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 4\angle\pi = -4.$$

Exemple 2. On a $1\angle\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Notons que cet exemple a été choisi parce que la forme polaire permet de voir très aisément que ce nombre élevé à la puissance 3 donne 1. On a montré, à peu de frais, que $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^3 = 1$: il y a d'autres nombres complexes que 1 qui, élevés à la puissance 3, donnent 1, alors qu'il n'y a qu'un seul nombre réel à le vérifier ! Plus généralement, l'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions au sein des nombres complexes.

Remarque. On peut montrer géométriquement que pour tout nombre complexe non nul z, il existe un nombre complexe z' tel que zz' corresponde au point de coordonnées (1,0) (autrement dit, $zz' = 1$). On note $\frac{1}{z}$ ce nombre. Par exemple, $\frac{1}{i} = -i$. On définit alors la division d'un nombre complexe z par un nombre complexe z' comme le produit $z \times \frac{1}{z'}$, noté $\frac{z}{z'}$.

3.2 Point de vue algébrique

Les nombres complexes correspondent à des vecteurs, et les vecteurs peuvent s'additionner ; par conséquent, il est naturel de transposer cette addition aux nombres complexes. La somme de deux vecteurs s'obtient en sommant leurs abscisses et leurs ordonnées (respectivement), ce qui inspire cette loi d'addition pour les nombres complexes :

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d).$$

L'addition est plus adaptée pour l'écriture cartésienne que polaire : la somme de deux vecteurs ne revient pas à additionner leurs longueurs, ni leurs angles (du moins, pas en général). Par conséquent, il vaut mieux laisser une expression de la forme $R\angle\theta+R'\angle\theta'$ sous cette forme, on ne pourra pas mieux faire en général.

Il sera souvent utile de savoir multiplier deux nombres complexes sous leur forme cartésienne : on aura souvent plus d'information sur un nombre complexe en travaillant sur ses deux formes possibles, l'une donnant des résultats sur l'autre ; il arrive aussi, simplement, qu'on ne connaisse pas l'argument d'un nombre complexe. Il n'est donc pas acceptable de ne pas pouvoir simplifier l'expression $(a+ib)\otimes(c+id)$. Si on s'inspire de la multiplication bien connue pour les réels, alors on peut développer ce produit naïvement, et voir qu'on obtiendrait :

$$(a+ib)\otimes(c+id)=ac+i(ad+bc)+i\otimes ibd.$$

On a vu, en exemple, que $i^2=-1$ (géométriquement), donc le produit de $a+ib$ et $c+id$ vaudrait, dans un souci de cohérence :

$$(a+ib)\otimes(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

On va démontrer plus tard que le produit ainsi défini avec la forme algébrique est rigoureusement le même qu'avec la forme polaire. Notons $z^{\otimes n}=\underbrace{z\otimes z\otimes\cdots\otimes z}_{n\text{ fois}}$, pour distinguer provisoirement ce nombre de z^n.

Exemple 1. On a, encore une fois, $i^{\otimes 2}=-1=i^2$. En effet,

$$i^{\otimes 2}=(0+i1)\otimes(0+i1)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+i(0\cdot 1+1\cdot 0)=-1.$$

De la même manière, on montre très simplement que si z est réel ou imaginaire pur (autrement dit, si une des coordonnées du nombre complexe est nulle), alors $z^{\otimes n}=z^n$.

Exemple 2. On a vu dans la section précédente que $(1+i)^4=-4$ avec le produit géométrique. On peut aussi le démontrer grâce au produit algébrique, mais c'est moins direct :

$$(1+i)^{\otimes 4}=\left((1+i)^{\otimes 2}\right)^{\otimes 2}=(1+2i+\underbrace{i^{\otimes 2}}_{=-1})^{\otimes 2}=(2i)^{\otimes 2}=2^2 i^{\otimes 2}=-4.$$

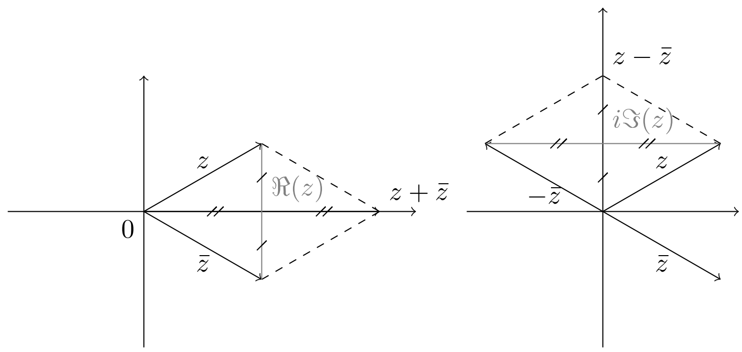
Si z est un nombre complexe non nul, il existe un nombre complexe z' tel que $z\otimes z'=1$. Pour ne pas alourdir la rédaction, je note encore une fois $z'=\frac{1}{z}$ le nombre complexe vérifiant cela.

On peut montrer, à l'aide de la forme algébrique, les propriétés suivantes ; elles sont presque évidentes sous forme géométrique, puisqu'elles découlent de vérités sur les parallélogrammes (les diagonales se coupent en leurs milieux, *etc.*). Le fait que ces propriétés soient vraies à la fois géométriquement et algébriquement donnera de la légitimité au fait que les deux points de vue soient les mêmes.

Proposition 23 *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On a les égalités suivantes :*

$$\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = -i\frac{z-\bar{z}}{2},$$
$$|z|^2 = z \otimes \bar{z} = x^2 + y^2, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

FIGURE 3.6 – Interprétation géométrique de la proposition 23.



Preuve. Par définition des parties réelle et imaginaire, si $z = x + iy$, on a $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$. Alors,

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(x+iy)+(x-iy)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \Re(z),$$

et de même :

$$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{(x+iy)-(x-iy)}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \Im(z).$$

Montrons que $z\bar{z} = x^2 + y^2$; le fait que $|z|^2$ soit égal à ces deux quantités doit passer par la géométrie, puisque c'est ainsi qu'on a défini le module. On a :

$$z \otimes \bar{z} = (x+iy) \otimes (x-iy) = (x^2 - y \cdot (-y)) + i(\cancel{-xy} + \cancel{xy}) = x^2 + y^2.$$

L'égalité $|z|^2 = x^2 + y^2$ provient (géométriquement) du théorème de Pythagore.

Enfin, partant de $\frac{1}{z}$, la multiplication aux numérateur et dénominateur par $\bar{z}$ donne le résultat voulu. □

Remarque 1. Cette proposition donne discrètement une nouvelle identité remarquable : $a^2+b^2 = (a+ib)\otimes(a-ib)$ (on applique la proposition à $z = a+ib$).

Remarque 2. Grâce à ces formules, et sous réserve que le produit géométrique et algébrique soit le même, il n'est pas difficile de voir que si $z = R\angle\theta$, alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{R}\angle -\theta$: on a

$$\frac{1}{z} = \bar{z} \times \frac{1}{|z|^2} = (R\angle -\theta) \times (\frac{1}{R^2}\angle 0) = \frac{1}{R}\angle -\theta.$$

En effet, $|z|$ étant une distance, c'est en particulier un réel positif, donc son argument est nul.

Remarque 3. On a montré que si $z = x+iy$, alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$: on sait mettre $\frac{1}{z}$ sous forme algébrique.

Corollaire 24 *Un nombre complexe z est réel si, et seulement si $z = \bar{z}$. Il est imaginaire pur si, et seulement si $z = -\bar{z}$.*

Preuve. Un nombre complexe z est réel si, et seulement si $\Im(z) = 0$, si et seulement si $\frac{z-\bar{z}}{2i} = 0$, si et seulement si $z = \bar{z}$. On procède de même pour les autres égalités.

Corollaire 25 *Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leurs parties réelle et imaginaire sont égales.*

Preuve. Il est clair que si $\Re(z) = \Re(z')$ et $\Im(z) = \Im(z')$, alors $z = z'$. Inversement, si $z = z'$, alors $\bar{z} = \bar{z'}$ (ce sont les mêmes coordonnées que z et z' au signe près), donc

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z' + \bar{z'}}{2} = \Re(z'),$$

et de même pour $\Im(z)$. □

Enfin, on résume rapidement les propriétés vérifiées par la conjugaison et le module. Géométriquement, les propriétés de la conjugaison découlent toutes des propriétés des symétries axiales, et toujours géométriquement, la relation $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ est évidente, car on a défini la multiplication de sorte qu'elle multiplie les longueurs (en plus d'ajouter les angles).

Proposition 26 (Propriétés de la conjugaison) *Soient z et z' deux nombres complexes. On a $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{z \otimes z'} = \bar{z}\bar{z'}$, et $|\bar{z}| = |z|$.*

Proposition 27 (Propriétés du module) *En plus de la propriété $|z|^2 = z \otimes \bar{z}$ déjà citée, on a pour tous nombres complexes z et z' :*

- $|z \otimes z'| = |z| \cdot |z|'$, *et si* $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;
- $|z| = 0$ *si, et seulement si* $z = 0$;
- $|z \pm z'| \leq |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire).*

Preuve. Seule l'inégalité triangulaire est difficile à démontrer algébriquement, et découle de $\Re(z \otimes z') \leq |z| \cdot |z'|$. Le lecteur en exercice s'amusera à la démontrer.

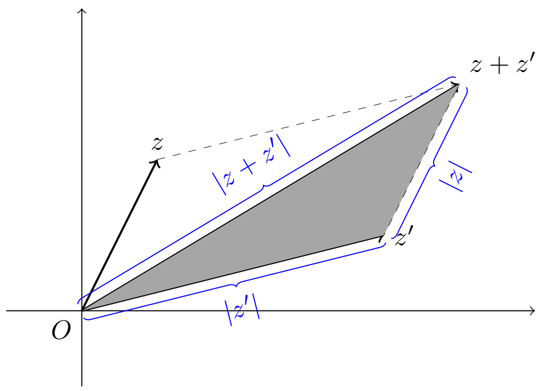
3.3 Coïncidence des deux points de vue

Le but de cette section est de montrer qu'en faisant nos calculs géométriquement et algébriquement, on obtient exactement les mêmes résultats.

Proposition 28 *L'addition et la multiplication algébriques coïncident avec l'addition et la multiplication géométriques : si z et z' sont deux nombres complexes, alors $z \times z' = z \otimes z'$.*

On n'a donc plus besoin de préciser si le calcul qu'on fait est algébrique et géométrique, puisque ça conduit aux mêmes résultats ; on oubliera la notation $\otimes$ pour garder uniquement $\times$. C'est cette équivalence qui va faire la force des nombres complexes : un problème purement géométrique va se traduire en énoncé algébrique, de nature calculatoire.

FIGURE 3.7 – Inégalité triangulaire.



Preuve. Elle est en deux étapes. D'abord, on montre que les propriétés algébriques de la multiplication ne sont en fait qu'une traduction des propriétés du produit géométrique. Ensuite, on montre que l'interprétation géométrique du produit (« multiplier par z revient à dilater avec un coefficient $|z|$ et tourner d'un angle $\arg(z)$ ») se retrouve à travers la multiplication algébrique.

Première étape : montrer que le produit algébrique se déduit du produit géométrique.

Rappelons que pour définir $(a+ib)\otimes(c+id)$, on a fait les calculs et suggestions suivantes :

$$\begin{aligned}(a+ib)\otimes(c+id) &= ac+iad+ibc+(i\otimes i)bd \quad \text{(on veut développer le produit)}\\ &= (ac-bd)+i(ad+bc) \quad \text{(on veut } i^{\otimes 2}=-1\text{)}.\end{aligned}$$

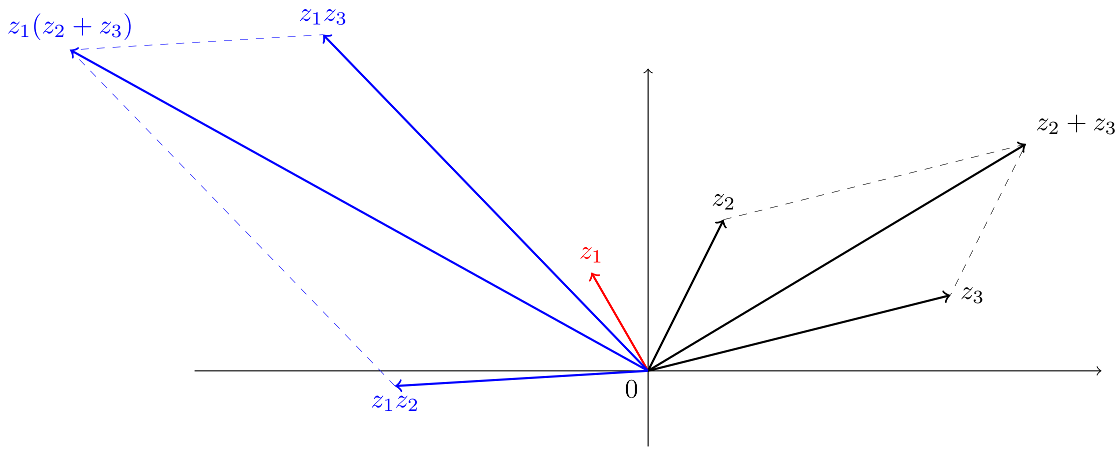
Le deuxième point se justifie d'un point de vue géométrique, comme on l'a vu : on a déjà montré que $i^2=-1$. Du coup, en posant $i^{\otimes 2}=-1$, le produit algébrique est bien dans la continuité du produit géométrique. Il reste donc à prouver que le développement du produit est cohérent avec le produit géométrique, au sens où le produit géométrique le vérifie aussi (je reviendrai là-dessus). Autrement dit, on doit vérifier qu'on a bien

$$z_1 \times (z_2+z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3,$$

si z_1, z_2 et z_3 sont trois nombres complexes. Abrégeons $z \times z'$ en zz' pour un souci de rédaction. Comme la somme $\vec{u}+\vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'obtient en formant un parallélogramme à partir de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il suffirait alors de montrer que $z_1(z_2+z_3)$ complète bel et bien le parallélogramme formé à partir de z_1z_2 et z_1z_3 (on prend $\vec{u}$ d'affixe z_1z_2 et $\vec{v}$ d'affixe z_1z_3) ; puisque c'est $z_1z_2+z_1z_3$ qui est censé compléter ce parallélogramme, on en déduirait l'égalité.

L'observation cruciale est que les dilatations et rotations conservent les parallélogrammes. Or, la multiplication par z_1 est une rotation suivie d'une dilatation (ou dans l'autre sens). De fait, comme le parallélogramme de sommets 0, z_2, z_3 et z_2+z_3 est envoyé par la multiplication par z_1 sur le parallélogramme de sommets 0, z_1z_2, z_1z_3 et $z_1(z_2+z_3)$. Ce parallélogramme est censé être complété

FIGURE 3.8 – Effet d'une multiplication par z_1 sur un parallélogramme.



par $z_1z_2 + z_1z_3$ (par définition de la somme de deux vecteurs, et donc de la somme de deux nombres complexes), donc $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$; tout ceci apparait sur la figure 3.8. Le produit géométrique vérifie donc le développement du produit et $i^2 = -1$, donc

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac + iad + ibc + i^2ad \text{ (on vient de le prouver)}\\ &= (ac-ad) + i(ad+bc) \text{ (car } i^2 = -1)\\ &= (a+ib)\otimes(c+id).\end{aligned}$$

Deuxième étape : montrer que le produit géométrique se déduit du produit algébrique.

On ne peut pas s'affranchir de cette étape, parce que pour montrer l'égalité entre les deux produits dans la première étape, on a dû supposer que si la multiplication a l'effet d'une dilatation et d'une rotation, alors $\times$ coincide avec $\otimes$. Mais pour l'instant, on ne peut pas exclure que si on commençait par définir le produit algébrique, alors certaines multiplications ne reviendraient pas à dilater et à tourner, si bien qu'on ne pourrait pas reproduire le raisonnement ci-dessus pour avoir l'égalité.

En conséquence, supposons avoir défini d'abord le produit algébrique, et voyons comment le produit géométrique en est conséquence. Soient z et z' deux nombres complexes dont je veux étudier le produit, et écrivons $z = x + iy$, $z' = a + ib$. Tout d'abord, si $a = 0$ et $b = 1$ (autrement dit, si $z' = i$, alors $(x+iy)\otimes z' = i\otimes x + i^{\otimes 2}y = -y + ix$. Or, les vecteurs de coordonnées (x, y) et $(-y, x)$ sont orthogonaux (et de même norme), car leur produit scalaire égale $x\cdot(-y)+y\cdot x = 0$. Le second est donc bien l'image du premier après une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, et on vient de montrer que multiplier par i revient bien à tourner d'un angle $\frac{\pi}{2}$ (et à dilater d'un coefficient 1, c'est-à-dire pas du tout).

Prenons maintenant un z' quelconque, toujours sous la forme $a + ib$ (a et b sont réels). On peut le représenter sur la figure 3.9 (j'ai pris $z' = 4 + i3$ sur cette

FIGURE 3.9 – Représentation de $z' = 4 + i3$ (exemple).

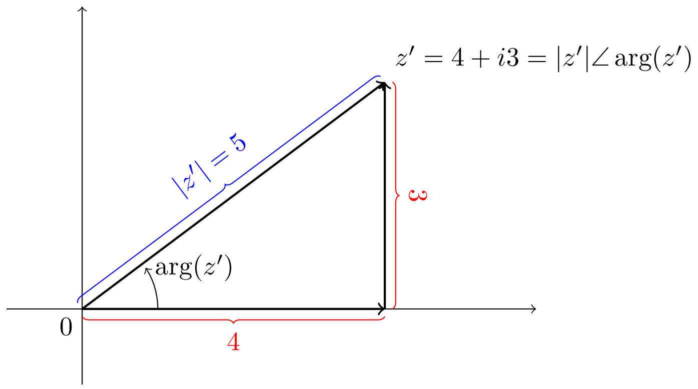
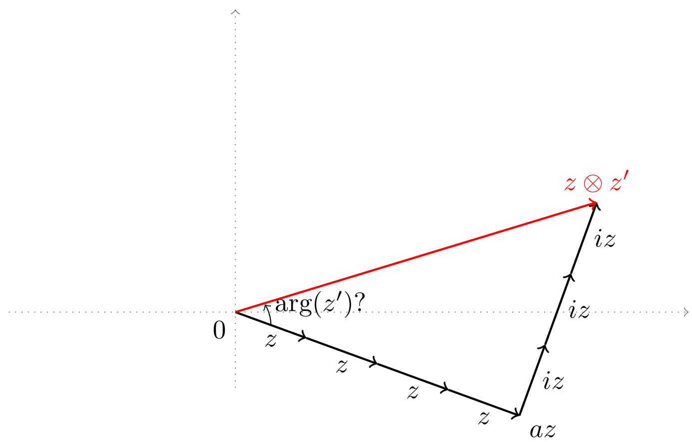


figure). La multiplication de z par z' donne

$$z \otimes z' = z \otimes a + z \otimes ib = az + \left(bz \text{ tourné d'un angle } \frac{\pi}{2}\right),$$

d'après le paragraphe précédent. La construction de $z \otimes z'$ sur le plan complexe s'effectue donc suivant la figure 3.10, on obtient un triangle de sommets d'affixes 0, az et $z \otimes z'$.

FIGURE 3.10 – Construction géométrique du produit algébrique par $z' = 4 + i3$ (exemple).



Si on montre que l'angle en 0 égale $\arg(z')$, on aura bien montré que multiplier algébriquement z par z' revient à tourner d'un angle $\arg(z')$ (le fait que $z \otimes z'$ soit de module $|z| \cdot |z'|$ est évident et déjà établi même algébriquement), c'est-à-dire à multiplier géométriquement : on aura bien $z \otimes z' = zz'$, et la preuve se termine. Or, les triangles des figures 3.9 et 3.10 sont semblables, car le second s'obtient à partir du premier en multipliant les longueurs de chaque côté par $|z|$, donc les angles de ces deux triangles se correspondent, et l'angle en 0 sur la figure 3.10 est bien $\arg(z')$, d'où le résultat. □

Exemple. Grâce à cette proposition, on peut trouver un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{8}$ sous sa forme algébrique, et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Soit $z = 1\angle\frac{\pi}{8} = x + iy$. On a

$$z^2 = 1\angle\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i)\,,$$

mais aussi,

$$z^{\otimes 2} = (x+iy)^{\otimes 2} = (x^2-y^2) + i(2xy).$$

Comme $z^2 = z^{\otimes 2}$, on a égalité entre $x^2 - y^2 + i(2xy)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i)$, donc on a aussi égalité entre leurs parties réelle et imaginaire, ce dont on déduit $x^2 - y^2 = 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}$. La résolution de ce système donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4x}\right)^2 & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y & = & \frac{\sqrt{2}}{4x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^4-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\frac{1}{8} & = & 0 \\ y & = & \frac{\sqrt{2}}{4x} \end{array}\right.$$

La résolution de la première équation en x aboutit à

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = x = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Le sinus s'obtient grâce à la relation de Pythagore (ou l'égalité $y = \frac{\sqrt{2}}{4x}$), et vaut $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. On reviendra sur ce genre d'exemple plus tard, notamment en exercice.

3.4 Exponentielle complexe

Nous avons vu la définition de l'exponentielle pour un nombre réel. Loin de moi l'intention de la définir pour tout nombre complexe. Néanmoins, on peut définir l'exponentielle pour un nombre imaginaire pur.

Définition 29 *Il existe une unique fonction f dérivable, définie sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout x réel, $f'(x) = i \cdot f(x)$, et $f(0) = 1$. On note $x \mapsto e^{ix}$ la fonction vérifiant ces conditions.*

On a vu, lorsqu'on traitait l'exponentielle réelle, que toutes ses propriétés découlaient de cette définition comme solution de cette équation. Je ne vais pas le redémontrer, mais on a encore cette formule :

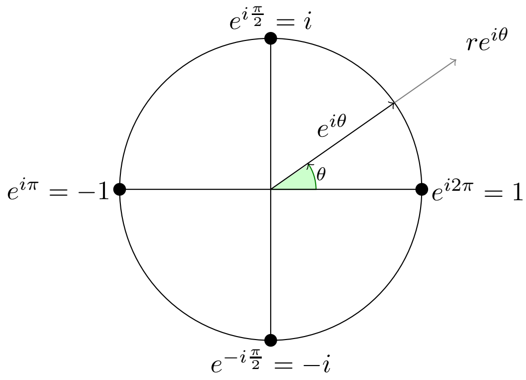
Proposition 30 *Soient ϕ et θ deux réels. On a $e^{i(\phi+\theta)} = e^{i\phi}e^{i\theta}$.*

Alors, le théorème suivant permet de laisser tomber la notation $R\angle\theta$ pour une bien meilleure.

Théorème 31 (Formule d'Euler) *Soit θ un nombre réel. On a*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

FIGURE 3.11 – Formule d'Euler illustrée.



Preuve. La preuve revient à démontrer l'unicité annoncée dans la définition, on va la démontrer. Soit $f(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}$. La fonction f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables (à noter que le dénominateur ne s'annule jamais). On a

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{i \cdot e^{i\theta}(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) - e^{i\theta}(-\sin(\theta) + i\cos(\theta))}{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2} \\ &= \frac{e^{i\theta}(\cancel{i\cos(\theta)} + i^2\sin(\theta) + \sin(\theta) - \cancel{i\cos(\theta)})}{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2} \\ &= \frac{e^{i\theta}(-\sin(\theta) + \sin(\theta))}{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2} = 0. \end{aligned}$$

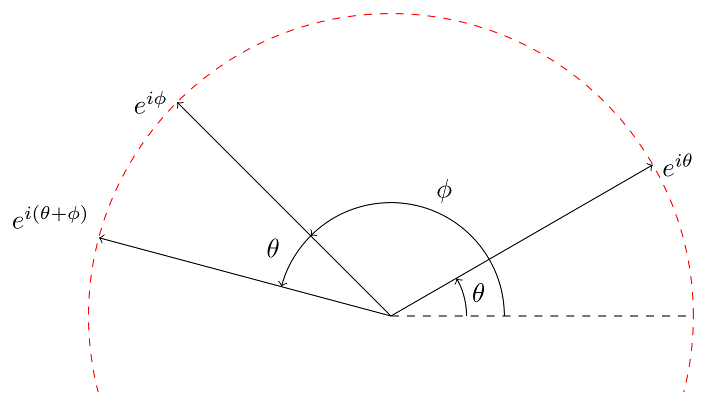
Donc f est une fonction constante, toujours égale à $f(0) = 1$. Ceci prouve que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. $\square$

Comme illustré sur la figure 3.13, cette formule dit que $e^{i\theta}$ est le nombre complexe correspondant au point M du cercle trigonométrique tel que l'angle entre l'axe des réels positifs et $\vec{OM}$ soit θ. Au lieu d'écrire un nombre complexe sous la forme $z = R\angle\theta$ (notation bien pratique mais qui n'était qu'une notation, vu que ce n'est pas de la forme $a + ib$ comme on l'a demandé en définition), on peut dorénavant écrire $z = Re^{i\theta}$: c'est la *forme exponentielle* d'un nombre complexe non nul. Concrètement, pour atteindre z, on doit prendre le vecteur du cercle trigonométrique correspondant à $e^{i\theta}$ dirigé vers z, et multiplier ce vecteur par la longueur de z. Avec cette représentation, la formule de multiplication géométrique pour les nombres complexes devient presque évidente :

$$(Re^{i\phi}) \times (re^{i\theta}) = Rre^{i(\theta+\phi)}.$$

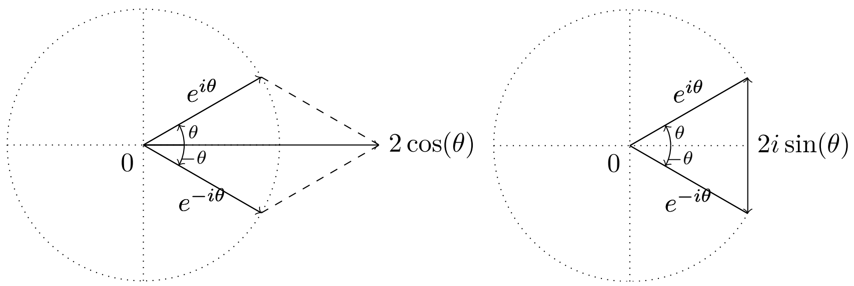
Les formules très intéressantes de l'exponentielle en induisent d'autres avec grande facilité. Une conséquence importante de la formule d'Euler est qu'en fait, les fonctions cosinus et sinus peuvent être définies à partir de la fonction exponentielle. Plus précisément, les formules $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ vues précédemment donnent, grâce à la relation $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$:

FIGURE 3.12 – Illustration de la formule $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$.



Proposition 32 *Pour tout réel θ, on a* $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, *et* $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

FIGURE 3.13 – Liens entre cos, sin et exp.



Mais surtout, toutes les identités trigonométriques vues au premier chapitre peuvent se déduire des propriétés de l'exponentielle complexe et de la multiplication algébrique. Je ne compte pas les redémontrer, sauf en exercice, par contre on peut en produire de nouvelles bien utiles. Par exemple, l'exponentielle permet d'exprimer $\cos(\theta+\phi)$ et $\sin(\theta+\phi)$ à l'aide des cosinus et sinus de θ et ϕ. Comme les fonctions cosinus et sinus sont nettement moins agréables à manier que l'exponentielle, c'est par elle qu'on passe pour tirer quelque identité. On a :

$$e^{i(\theta+\phi)} = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi),$$

mais aussi,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\phi)} &= e^{i\theta}e^{i\phi} \\ &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \\ &= (\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)) + i(\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)). \end{aligned}$$

On en déduit, par égalité des parties réelle et imaginaire :

$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi), \quad \sin(\theta+\phi) = \cos(\theta)\sin(\phi) + \cos(\phi)\sin(\theta).$$

Il faut connaître ces formules par cœur, et si on ne les connaît pas par cœur, il faut savoir les retrouver. Cet exemple illustre une grande force des nombres complexes sur laquelle je ne cesse et ne cesserai d'insister : en une seule équation, on obtient deux informations à la fois. De ces deux égalités, en prenant $\phi = \theta$, on déduit les deux identités suivantes, très classiques :

Proposition 33 *Pour tout réel θ, on a*

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = 2\cos(\theta)^2 - 1 = 1 - 2\sin(\theta)^2,$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta).$$

La première égalité est bien commode pour, par exemple, remplacer un embêtant $1 - \cos(\theta)$ par un $\frac{\sin(\theta/2)^2}{2}$.

Toujours grâce à l'exponentielle, on peut exprimer simplement $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction des cosinus et sinus de θ. Pour cela, on considère cette fois $e^{i3\theta}$. On a d'une part,

$$e^{i3\theta} = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta),$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} e^{i3\theta} &= (e^{i\theta})^3 \\ &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 \\ &= (\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2) + i(3\cos(\theta)^2\sin(\theta) - \sin(\theta)^3), \end{aligned}$$

après un développement que le lecteur en exercice se chargera de faire. On en déduit que

$$\cos(3\theta) = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta), \quad \sin(3\theta) = -4\sin(\theta)^3 + 3\sin(\theta).$$

On vient d'exprimer des fonctions trigonométriques évaluées en un multiple de θ à l'aide de puissances de fonctions trigonométriques évaluées en θ. On peut aussi faire le chemin inverse. Par exemple, imaginons vouloir exprimer $\cos(\theta)^4$ à l'aide de multiples de θ. Comme $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, on a

$$\begin{aligned} 2^4\cos(\theta)^4 &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 \\ &= (e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}) + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6 \\ &= 2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6, \qquad (3.1) \end{aligned}$$

Alors,

$$\cos(\theta)^4 = \frac{1}{8}\left(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right).$$

On procède de même pour les sinus. La méthode pour déterminer $\cos(\theta)^n$ est, essentiellement, de développer $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$ et de regrouper les exponentielles conjuguées (exercice : pourquoi peut-on être sûr de ne pas avoir une exponentielle « seule » ?), pour y reconnaître des cosinus. Le plaisir se prolongera en exercice.

Notons, enfin, une méthode similaire pour traiter les tangentes. Si, par exemple, je veux exprimer $\tan(3\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$, je considère le nombre complexe $z = 1 + i\tan(\theta)$. Ce nombre a l'intérêt d'avoir pour argument θ, d'après la proposition 22. Si z a pour argument θ, alors z^3 a pour argument 3θ, puisque c'est ainsi qu'on a défini le produit géométrique, et la proposition 22 donne, encore une fois, que $\tan(3\theta) = \frac{\Im(z^3)}{\Re(z^3)}$. Calculons donc z^3 :

$$z^3 = (1 + i\tan(\theta))^3 = (1 - 3\tan(\theta)^2) + i(3\tan(\theta) - \tan(\theta)^3),$$

donc :

$$\tan(3\theta) = \frac{3\tan(\theta) - \tan(\theta)^3}{1 - 3\tan(\theta)^2}.$$

Avant de conclure cette section, plusieurs remarques :

- On a évidemment, presque par définition, que $\arg(Re^{i\theta}) = \theta$ (le R compte pour du beurre, *pourvu qu'il corresponde bien au module d'un nombre complexe, c'est-à-dire à une quantité positive*). Ainsi, on peut retrouver plusieurs propriétés de l'argument en écrivant d'abord les nombres complexes évalués sous forme exponentielle. Par exemple, pour retrouver que $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$, on écrit que $z = Re^{i\theta}$, et on utilise les propriétés de l'exponentielle pour trouver que

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg\left(\frac{1}{Re^{i\theta}}\right) = \arg\left(\frac{1}{R}e^{-i\theta}\right) = -\theta = -\arg(z).$$

  De la même manière, on retrouve que $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$, ou $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.
- Dans les calculs, il est bon de savoir écrire $ze^{i\theta}$, où z est un nombre complexe, sous la forme exponentielle $Re^{i\phi}$, en écrivant z sous sa forme exponentielle. Ça peut parfois simplifier des calculs ; on tombe par exemple très souvent sur $-e^{i\theta}$ (qui se réécrit $e^{i(\theta+\pi)}$), ou $ie^{i\theta}$ (qui se réécrit $e^{i(\theta+\pi/2)}$).

3.5 Les complexes simplifient la vie

Le but de la section, qui se prolongera dans les exercices, est de montrer à quel point le traitement algébrique de problèmes géométriques (*via* les nombres complexes) est puissant. Une raison potentielle à cette efficacité redoutable est le fait que dans *un seul* nombre complexe, on ait toujours *deux* informations, à savoir une longueur et un angle. Et il est souvent assez facile de calculer plutôt que de raisonner géométriquement ; même une machine peut s'en charger.

Pour ce faire, on va rapidement traduire en termes de nombres complexes les principaux sujets géométriques.

Proposition 34 (Affixe d'un vecteur) *Soient A et B deux points du plan, d'affixes respectives a et b. Alors, on a $\vec{AB} = \vec{OM}$ pour M d'affixe $b - a$.*

Autrement dit, si on veut travailler sur le vecteur $\vec{AB}$ avec le point de vue des nombres complexes, on doit traduire $\vec{AB}$ en $b - a$.

Preuve. Si $\vec{OM} = \vec{AB}$, alors $\vec{OM} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$ par la relation de Chasles. Comme $\vec{OA}$ a pour affixe a, et $\vec{OB}$ pour affixe b, on en déduit que $\vec{OM}$ a pour affixe $-a + b$. $\square$

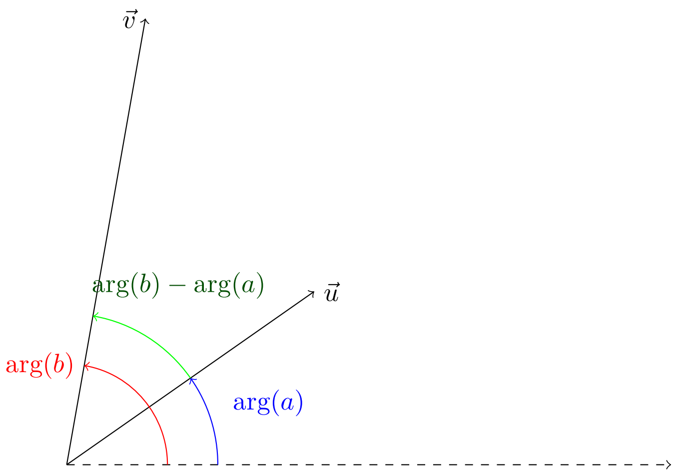
Proposition 35 (Norme d'un vecteur) *Soient A et B deux points du plan. Alors, la norme de $\vec{AB}$ est $|b - a|$.*

Preuve. C'est évident, grâce à la proposition précédente et la définition du module d'un nombre complexe. □

Proposition 36 (Angle entre deux vecteurs) *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, d'affixes a et b. Alors, l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à* $\arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg(b) - \arg(a)$.

Preuve. On peut toujours supposer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour extrémité O. Un dessin rend alors clair que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ égale $\arg(b) - \arg(a)$, et ceci égale $\arg\left(\frac{b}{a}\right)$ grâce aux propriétés de la multiplication complexe. □

FIGURE 3.14 – Angle entre deux vecteurs.



Enfin, il est souvent utile de savoir reconnaitre l'équation d'un cercle.

Proposition 37 (Équation d'un cercle) *Soit I un point d'affixe ω, et R un réel positif. Les points M d'affixe z qui sont sur le cercle de centre I et de rayon R vérifient :*

$$|z - \omega| = R.$$

Preuve. Être sur un tel cercle signifie que $IM = R$, et donc, grâce à la proposition 35, que $|z - \omega| = R$. □

Exemple 1. À la lumière de tout ce qui précède, pour montrer qu'un angle particulier dans un triangle égale, par exemple, $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{3}$ (selon ce qu'on veut démontrer), on utilise la proposition 36. Pour fixer les idées, si A, B et C sont trois sommets d'un triangle, et qu'on veut montrer que le triangle est rectangle en A, on calcule l'angle entre $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et on regarde s'il vaut $\pm\frac{\pi}{2}$. C'est-à-dire, comme les affixes de ces vecteurs sont respectivement $b - a$ et $c - a$, on calcule $\frac{c-a}{b-a}$ et on en déduit son argument, qui est l'angle désiré. Le module peut aussi informer sur la longueur des triangles : si $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$, on en déduit que $|c-a| = |b-a|$, et donc que $AC = AB$: le triangle est isocèle en A. Un exemple de tel triangle est le triangle dont les sommets ont pour affixes $a = 2 + i12$, $b = (-7 - 5\sqrt{3}) + i(-3 + 3\sqrt{3})$ et $c = (-7 + 5\sqrt{3}) + i\left(-3 - 3\sqrt{3}\right)$. En effet, le calcul montre que

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-9 + 5\sqrt{3} - i(15 - 3\sqrt{3})}{-9 - 5\sqrt{3} - i(15 - \sqrt{3}},$$

et on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur pour faire disparaître les nombres complexes au dénominateur (qui sera remplacé par le module au carré du dénominateur, c'est-à-dire un réel positif). On arrive alors à

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{204 + i204\sqrt{3}}{408},$$

dont le module est

$$\frac{\sqrt{204^2 + 3 \cdot 204^2}}{408} = \frac{\sqrt{4 \cdot 204^2}}{408} = \frac{408}{408} = 1.$$

Donc $AB = AC$ et ABC est isocèle en A. Par ailleurs, $\tan(\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$, donc cet angle vaut $\frac{\pi}{3}$ ou $4\frac{\pi}{3}$ modulo 2π. Le fait que la partie réelle de ce quotient soit positive implique que l'angle vaut $\frac{\pi}{3}$. En fait, on peut montrer que ce triangle est équilatéral : on a $AB = AC = BC$; on peut le déduire immédiatement du fait qu'il soit isocèle en A et que l'angle en A soit $\frac{\pi}{3}$.

Exemple 2. Avec les nombres complexes, vérifier que trois points distincts A, B et C (d'affixes respectives a, b et c) sont alignés revient à démontrer que l'angle $\widehat{BAC}$ égale 0 ou $\pm\pi$ (ou l'angle $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$... peu importe). Ceci est équivalent à la condition que $\frac{c-a}{b-a}$ soit d'argument 0 ou $\pm\pi$, ce qui équivaut à la condition que $\frac{c-a}{b-a}$ soit réel. Par exemple, les points d'affixes respectives 2, $4 + i2$, $7 + i5$ sont alignés : on a

$$\frac{(7+i5)-2}{(4+i2)-2} = \frac{5+i5}{2+i2} = \frac{5\cancel{(1+i)}}{2\cancel{(1+i)}} = \frac{5}{2} \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3. Soit $j = e^{i2\pi/3}$. Remarquons d'abord que ce nombre est très intéressant : on a $j^3 = (e^{i2\pi/3})^3 = e^{i2\pi} = 1$. Par conséquent,

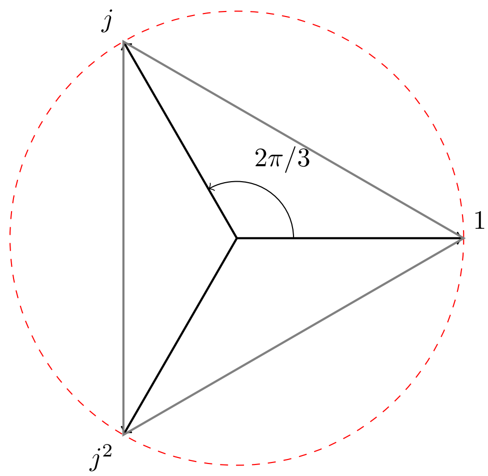
$$1 + j + j^2 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = 0,$$

en tant que somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison j. Géométriquement, cela se traduit par le fait que les vecteurs associés à 1, j et j^2 s'annulent : c'est une traduction du fait que O soit le centre de gravité du triangle dont les sommets ont pour affixes 1, j et j^2 (c'est-à-dire : l'isobarycentre).

Exemple 4. À présent, on considère un triangle ABC, et les points A, B et C sont associés à des nombres complexes a, b et c. Alors, on peut démontrer que

$$ABC \text{ est un triangle équilatéral } \Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0.$$

FIGURE 3.15 – Illustration de $1 + j + j^2 = 0$.



Autrement dit, toute l'essence de la définition de triangle équilatéral est réunie dans une seule équation, à l'aide des nombres complexes !

Pour prouver ceci, remarquons que si ABC est un triangle équilatéral, alors $AB = AC$, et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Réciproquement, ces deux conditions suffisent à prouver que ABC est équilatéral : si $AB = AC$, alors ABC est isocèle en A, et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux. Comme la somme des angles d'un triangle égale π et que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, on en déduit que tous les angles égalent $\frac{\pi}{3}$, et donc que le triangle est équilatéral.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour être équilatéral invoque une condition sur les longueurs et une autre sur un angle ; c'est typiquement ce qui peut être contenu en un seul nombre complexe : $AB = AC$ se traduit en $|b - a| = |c - a|$. Comme $\frac{c-a}{b-a}$ est de module 1 d'après cette égalité, et on a vu que

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3},$$

donc finalement $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$. Ceci conduit à

$$c-a = e^{i\pi/3}(b-a) \Leftrightarrow c-a+ae^{i\pi/3}-be^{i\pi/3} = 0 \overset{[-1=e^{i\pi}]}{\Longleftrightarrow} c+a(e^{i\pi/3}-1)+be^{i4\pi/3} = 0.$$

On a $e^{i4\pi/3} = j^2$, donc on est proche de l'expression désirée, quitte à échanger a, b et c qui jouent des rôles symétriques, mais le terme $e^{i\pi/3} - 1$ nous embête. Pour montrer qu'il égale j, il y a plusieurs solutions :

- on le voit géométriquement : il s'avère que $e^{i\pi/3}$ est le symétrique par rapport à l'axe des imaginaires de j ; alors, on peut en déduire que la distance entre ces deux points est $2\Re(e^{i\pi/3}) = 2\cos(\pi/3) = 1$, donc $e^{i\pi/3} - 1 = j$;

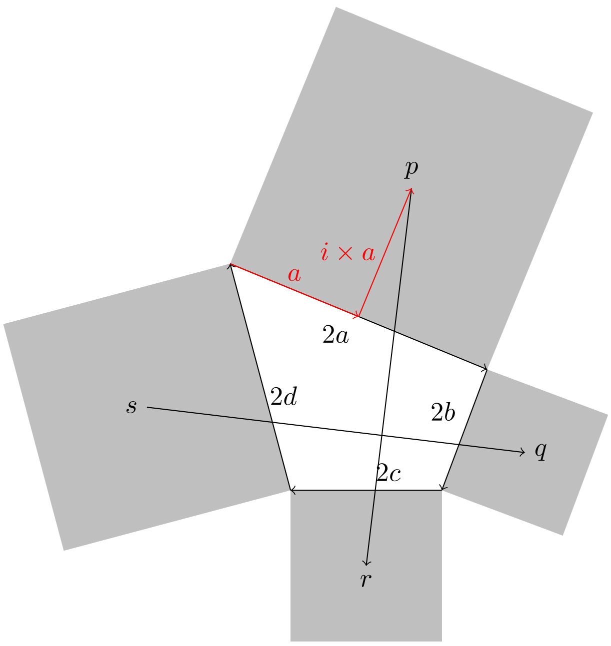
– on sait écrire $e^{i\pi/3} - 1$ sous sa forme algébrique : on a $e^{i\pi/3} - 1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$;
– on utilise un procédé qui peut devenir un classique du genre quand on a affaire à une somme ou différence d'exponentielles : on factorise par l'exponentielle de la moyenne des arguments ; ce procédé fera nécessairement apparaître le produit d'une exponentielle et d'un cosinus ou sinus, grâce aux propriétés de l'exponentielle. Ici, on a

$$\begin{aligned} e^{i\pi/3} - 1 &= e^{i\pi/6}\left(e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6}\right) \\ &= 2ie^{i\pi/6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= ie^{i\pi/6} = e^{i\pi/2}e^{i\pi/6} = e^{2i\pi/3} = j. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on trouve $c + aj + bj^2 = 0$, donc $a + bj + cj^2 = 0$ après multiplication de l'égalité par j^2, en se souvenant que $j^3 = 1$. Ainsi, par exemple, le triangle de la figure 3.15 est équilatéral, car $j^2 + 1 \cdot j + j \cdot j^2 = j^2 + j + 1 = 0$.

Exemple 5. Soit $\mathcal{Q}$ un quadrilatère quelconque, et construisons des carrés sur les côtés de ce quadrilatère, comme indiqué sur la figure 3.16.

FIGURE 3.16 – Un quadrilatère et ses carrés adjacents



On va prouver que les segments joignant les centres des carrés opposés sont perpendiculaires, et sont de même longueur, comme cela semble être le cas sur la figure. Ce résultat impressionnant nécessiterait énormément d'ingéniosité pour être démontré par la pure géométrie (ça peut faire figure d'exercice), par contre avec les nombres complexes c'est très direct : pour se simplifier la vie, écrivons

$2a$, $2b$, $2c$ et $2d$ les affixes des vecteurs formant les côtés du quadrilatère. Le fait que ces vecteurs forment un quadrilatère se traduit mathématiquement par le fait que la somme de ces vecteurs soit nulle, c'est-à-dire

$$a + b + c + d = 0.$$

Choisissons, quitte à translater la figure, comme origine du repère le sommet où $2a$ commence. Pour atteindre le centre p du carré construit de ce côté, on se déplace d'un vecteur a, puis on se déplace encore selon le vecteur a après avoir toutefois tourné d'un angle droit (ce qui correspond à la multiplication de a par $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$) ; autrement dit,

$$p = a + i \times a = a(1 + i)$$

De la même manière, on trouve

$$q = 2a + (1 + i)b, r = 2a + 2b + (1 + i)c, \text{ et enfin } s = 2a + 2b + 2c + (1 + i)d.$$

Les vecteurs joignant les sommets des carrés opposés ont pour affixes respectives

$$A = s - q = (b + 2c + d) + i(d - b), \text{ et } B = (a + 2b + c) + i(c - a).$$

On veut montrer que A et B sont perpendiculaires et de norme égale (c'est-à-dire $|A| = |B|$) ; ceci revient à vérifier que $\arg(\frac{B}{A}) = \pm\frac{\pi}{2}$ et $\left|\frac{B}{A}\right| = 1$, c'est-à-dire $\frac{B}{A} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$, et $B = \pm iA$. Cette vérification est immédiate, car :

$$A + iB = (a + b + c + d) + i(a + b + c + d) = 0,$$

donc $A = -iB$.

3.6 Exercices

Exercice 1. À l'aide de l'exponentielle complexe, redémontrer les identités trigonométriques suivantes :

1. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$;
2. $\cos(\theta \pm \pi) = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta \pm \pi) = \sin(\theta)$;
3. $\cos(\pi - \theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$;
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$;
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$;
6. $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$, et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$.

Exercice 2. Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $ad - bc = 1$. Soit z un nombre complexe qui n'est pas réel. Calculer la partie imaginaire de $\frac{az+b}{cz+d}$ (en vérifiant que ce nombre est bien défini) à l'aide de celle de z.

Exercice 3. Donner les solutions générales d'une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue z complexe. Appliquer cette méthode à

$$4z^2 - 16z + 11 - 12 = 0, \quad z^2 - 5z + 4 + 10i = 0, \quad z^4 - 3z^2 + 2 = 0.$$

Exercice 4. On veut calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Pour cela, montrer que $z = \exp(i2\pi/5)$ vérifie $z^4+z^3+z^2+z+1=0$, puis que $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 5. Écrire $\cos(5x)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 6. Soit ω une racine n-ième de l'unité, c'est-à-dire $\omega^n = 1$. Montrer que ω s'écrit $e^{i2\pi k/n}$ pour un certain entier k. Représenter les différents ω possibles sur un dessin. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i2\pi k/n} \text{ et } \prod_{k=0}^{n-1} e^{i2\pi k/n}.$$

Exercice 7. Démontrer à l'aide des nombres complexes que la somme des angles d'un triangle égale π.

Exercice 8. Soient u et v deux nombres complexes. Montrer que

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2).$$

Comment interpréter géométriquement ce résultat ?

Exercice 9. Déterminer le module et un argument de $\frac{1+2i}{3+4i}$ et $(\sqrt{3}+3i)^{19}$.

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^3 = 3i$, puis $z^n = 1$. En déduire les solutions des équations $(z+2)^3 = 3i$ et $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

Exercice 11. Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\frac{3+6i}{3-4i}; \qquad \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}; \qquad 4e^{2i\pi/3}; \qquad 8e^{3i\pi/4} - 5e^{i\pi/3}.$$

Exercice 12. Mettre sous forme exponentielle les nombres suivants :

$$\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}, \qquad (1-i), \qquad \frac{3}{1-i}, \qquad \sqrt{3}+i, \qquad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 13. Déterminer les nombres complexes z tels que z^2+2z+3 est réel.

Exercice 14. Dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, quand est-ce que $(1+i)^n \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, calculer le module et l'argument de $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$. En déduire une expression de $\cos(\theta)+\cos(\theta')$ et de $\sin(\theta)+\sin(\theta')$ en fonction de $\theta+\theta'$ et $\theta-\theta'$.

Exercice 16. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 17. Soient a et b deux nombres réels non nuls. Justifier l'existence d'un réel ϕ tel que $\cos(\phi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\phi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. En déduire comment résoudre une équation de la forme $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = c$ d'inconnue θ ; le faire concrètement pour $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 18. Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives a et b, et Δ la médiatrice de $[AB]$. Montrer qu'un point M d'affixe z est sur la médiatrice si, et seulement si $|z - a| = |z - b|$.

Exercice 19. Écrire, en termes de nombres complexes, le résultat sur z d'une rotation de centre I (d'affixe ω) et d'angle θ.

Exercice 20. Cet exercice a pour but de déterminer l'ensemble des solutions complexes de l'équation $x^3 - 3px - 2q = 0$.

1. Soit x une solution, et posons $x = s+t$. Montrer que $st = p$, et $s^3+t^3 = 2q$.
2. Trouver une équation du second degré vérifiée par s^3.
3. Résoudre cette équation, et en déduire les valeurs possibles pour s^3. Quelles sont les valeurs possibles pour t^3 ?
4. Sachant que $s^3 + t^3 = 2q$, démontrer que
$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$
5. À présent, comment résoudre une équation de la forme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$?
6. Application : résoudre $x^3 = 15x + 4$.

Exercice 21. Soient a et b deux nombres complexes, tels que $a \neq 0$. On étudie l'application $f : z \mapsto az + b$. Une application de cette forme s'appelle une similitude.

1. Si $a = 1$, montrer que f est une translation.
2. Supposons à présent $a \neq 1$. Montrer qu'il existe un nombre complexe ω tel que $f(\omega) = \omega$.
3. En déduire que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie, toutes deux de centre d'affixe ω. La rotation est d'angle $\arg(a)$ et l'homothétie de rapport $|a|$.
4. Montrer que f conserve les angles : si u et v sont deux nombres complexes, $\arg\left(\frac{v}{u}\right) = \arg\left(\frac{f(v)}{f(u)}\right)$.
5. On remplace f par $z \mapsto a\bar{z} + b$. Que dire de f à présent ?