

seront démontrées dans le chapitre approprié en exercice :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Passons à la fonction tangente, dont on rappelle la définition : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Elle n'est pas bien définie pour $x = \pm \frac{\pi}{2}$, et par périodicité de \cos elle n'est pas définie pour tout x de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k un entier relatif. Ceci se traduit par des singularités criantes sur le graphe de la fonction \tan .

Comme $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$, la fonction \tan est périodique de période π , et on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur π , disons $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Il est aisé de montrer qu'elle est une fonction impaire, on peut donc même restreindre son étude à $]0, \frac{\pi}{2}[$. Le calcul de sa dérivée s'obtient à partir de la formule de dérivation de quotient $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Alors,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

Notons que partant de $\frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2}$, on peut aussi arriver à $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$. Dans tous les cas, on vient qu'il s'agit d'une dérivée strictement positive, donc la fonction \tan est strictement croissante. Pour compléter le tableau de variations, on a besoin de calculer sa limite en $\frac{\pi}{2}$: comme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1, \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+,$$

on en déduit que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$. On peut dorénavant écrire le tableau de variations, et dessiner le graphe qui va avec lui (en figure 1.8).

x	0	$+\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	+	
$\tan(x)$	0	$+\infty$

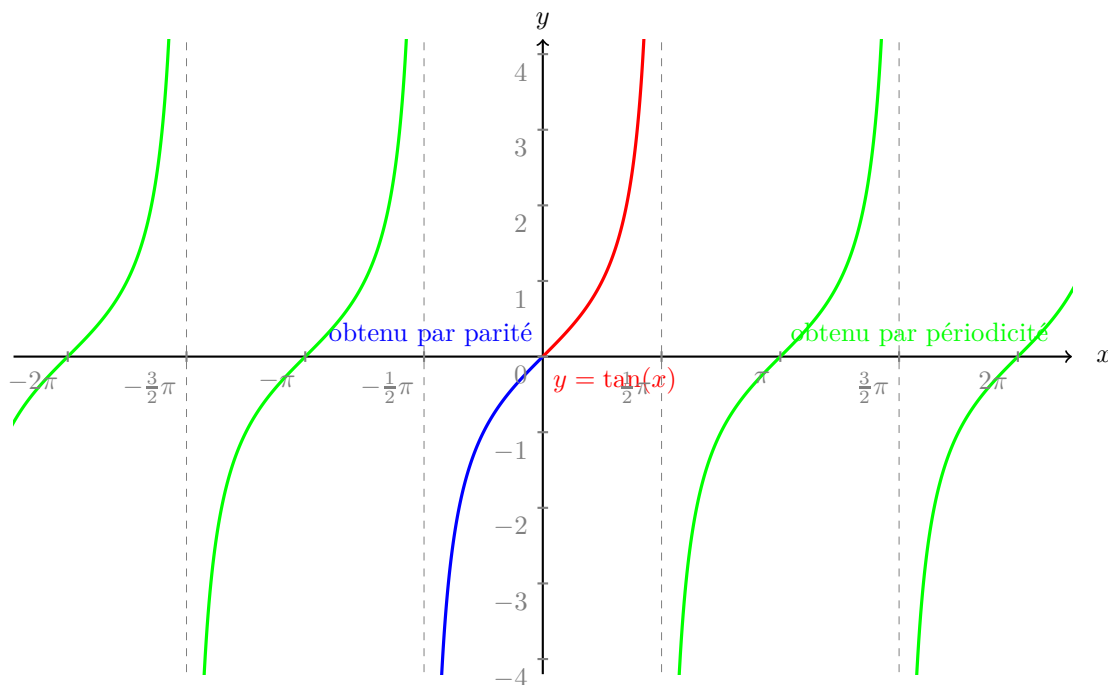
1.2 Exponentielle et Logarithme

1.2.1 La fonction exponentielle

Derrière ce mot, assez couramment utilisé dans le langage courant pour décrire une augmentation rapide ou importante, se cache une des fonctions les plus importantes des mathématiques.

Définition 5 (Exponentielle) *Il existe une unique fonction f dérivable, définie sur \mathbb{R} , telle que pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$, et $f(0) = 1$. On appelle fonction exponentielle, notée \exp ou $x \mapsto e^x$, la fonction vérifiant ces conditions. On note $e = \exp(1) = e^1$.*

FIGURE 1.8 – Graphe de tan.



L'existence provient du théorème profond suivant, qu'on admet puisqu'on n'a de toute façon pas les armes pour parler de dérivées plus en détails, du moins provisoirement.

Théorème 6 (Théorème de Cauchy) Soient a , b et c trois réels. Il existe une unique fonction f dérivable, définie sur \mathbb{R} , telle que pour tout x réel, $f'(x) = cf(x)$, et $f(a) = b$.

De telles fonctions ont un intérêt pratique pour de nombreux problèmes qui lient une dérivée d'une fonction à sa fonction. Par exemple, si $f(t)$ désigne une population à un instant t , et que T désigne la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité, alors pour tout h on a

$$f(t+h) = f(t) + h \cdot T \cdot f(t),$$

ce qu'on peut réécrire

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = Tf(t).$$

Plus tard, on reconnaîtra dans le membre de gauche l'écriture de la dérivée de f quand h devient infiniment proche de zéro (on a donc $f'(t) = Tf(t)$). De tels équations lient dérivée et fonction sont monnaie courante dans la nature, mais sont souvent compliquées et combinent plusieurs fonctions. Par exemple, l'évolution de la température moyenne terrestre et du taux de carbone dans l'atmosphère peuvent se décrire par un tel système :

- il existe un cycle naturel de changements de températures causé par des variations périodiques de la Terre sur son orbite, l'inclinaison de son axe et la direction vers laquelle pointent ces axes ;
- la hausse des températures cause bien une hausse des niveaux de CO₂, après un délai de dizaines ou de centaines d'années, le temps que la nature réponde à ce changement de température, et inversement : une hausse de CO₂ implique une hausse de température.

On constate aussi, expérimentalement, qu'une trop grande quantité de carbone freine la croissance du taux de carbone. De même, si la température est trop élevée, la planète régule cette température et freine ses variations. Compte tenu de tout ceci, on obtient un système qui est, essentiellement, de la forme

$$\begin{cases} T'(t) &= \sin(t) + 0,25C(t) - 0,01T(t)^2 \\ C'(t) &= 0,1T(t) - 0,01C(t)^2, \end{cases}$$

le terme en $\sin(t)$ étant là pour tenir compte du cycle naturel périodique de variation de température ($C(t)$ et $T(t)$ désignent respectivement le taux de carbone et la température à un instant t). Comprendre ce système permettrait de comprendre quelles sont les conséquences d'une grande injection de carbone dans l'atmosphère (due notamment à l'activité humaine), et quelles sont les conséquences à terme pour la température $T(t)$. Mais ce système est bien compliqué, et avant d'en arriver là, il vaut mieux saisir l'essence de l'équation plus simple $f' = f$, et donc de l'exponentielle...

Comme la fonction exponentielle est entièrement caractérisée par l'équation $\exp' = \exp$ et la condition $\exp(0) = 1$, on peut en déduire, *a priori*, toutes ses propriétés. Dans l'optique de l'étude de la dynamique d'une population, par exemple, il serait de bon ton de connaître ses variations et ses limites. Elles sont bien connues, et découlent de la proposition suivante, extrêmement pratique.

Théorème 7 *La fonction \exp vérifie, pour tous x et y réels, la relation $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ (qui peut aussi être écrite $e^{x+y} = e^x e^y$).*

Preuve. Les fonctions $x \mapsto \exp(x+y)$ et $x \mapsto \exp(x)\exp(y)$ sont toutes les deux dérivables, donc le quotient de ces deux fonctions également, de dérivée :

$$\begin{aligned} & \frac{\exp'(x+y)\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)\exp'(x)\exp(y)}{(\exp(x)\exp(y))^2} \\ &= \frac{\exp(x+y)\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)\exp(x)\exp(y)}{(\exp(x)\exp(y))^2} = 0. \end{aligned}$$

Le quotient est donc constant, et il vaut 1 pour $x = 0$, donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. \square

Grâce à ceci, on déduit :

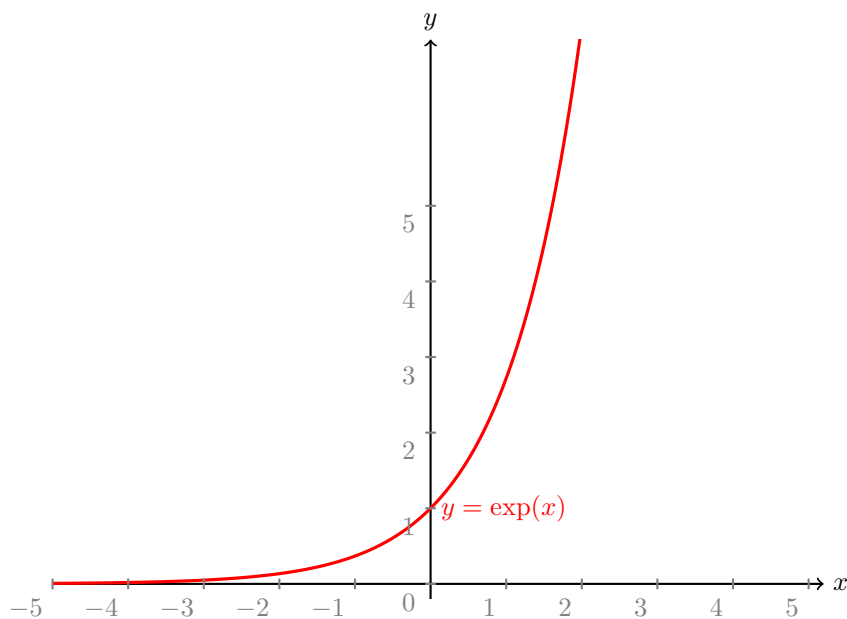
Proposition 8 *La fonction \exp est strictement positive, strictement croissante sur \mathbb{R} , et admet pour limites :*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = +\infty.$$

Preuve. Comme $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, on a en particulier $\exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x)$. Comme $\exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$, on en déduit que $\exp(x)\exp(-x) = 1$, donc \exp ne s'annule jamais (sinon on pourrait avoir $0 = 1$). Ainsi, \exp est soit toujours strictement positive, soit toujours strictement négative. Mais $\exp(0) = 1 > 0$, donc $\exp > 0$.

Comme $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout x réel, on en déduit que \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc sa limite est finie ou $+\infty$. Or, si n est un entier positif, on a $\exp(n) = \exp(1)^n$. Le fait que \exp soit strictement croissante entraîne $\exp(1) > \exp(0) = 1$, donc $\exp(1)^n$ tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow \infty$, et \exp n'est pas majorée et n'a pas une limite finie. Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$. La limite en $-\infty$ en découle :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) \underset{u=-x}{=} \lim_{u \rightarrow \infty} \exp(-u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(u)} = 0. \square$$

FIGURE 1.9 – Graphe de \exp .

De la proposition 8, on déduit plusieurs propriétés mirifiques de l'exponentielle :

Proposition 9 *Pour tous x réel et n entier relatif, on a :*

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \quad \exp(nx) = \exp(x)^n.$$

Preuve. La première égalité découle de $\exp(x)\exp(-x) = 1$, égalité déjà rencontrée dans la preuve de la proposition précédente. La seconde se démontre d'abord si n est un entier naturel, par récurrence. Soit \mathcal{P}_n la proposition « Pour

tout x réel, on a $\exp(nx) = \exp(x)^n$. Pour $n = 0$, on a bien $\exp(0 \cdot x) = \exp(0) = 1$, c'est bien la même chose que $\exp(x)^0$, donc on a \mathcal{P}_0 .

À présent, supposons qu'on ait \mathcal{P}_n pour un certain entier n . Alors,

$$\exp((n+1)x) = \exp(nx+x) = \exp(nx) \exp(x) \underbrace{=}_{\mathcal{P}_n} \exp(x)^n \exp(x) = \exp(x)^{n+1}.$$

Donc \mathcal{P}_n implique \mathcal{P}_{n+1} . Par récurrence, on a donc le résultat pour tout entier n positif. Maintenant, si n est négatif, alors $-n$ est positif, donc $\exp(-nx) = \exp(x)^{-n}$. Alors,

$$\exp(nx) = \frac{1}{\exp(-nx)} = \frac{1}{\exp(x)^{-n}} = \exp(x)^n. \square$$

L'intérêt de cette fonction sera une évidence dans le chapitre sur les équations différentielles.

1.2.2 La fonction logarithme naturel

L'exponentielle est une fonction strictement croissante, définie sur \mathbb{R} , et à valeurs dans $]0, +\infty[$. Comme c'est une fonction continue, elle prend donc toutes les valeurs possibles entre 0 et $+\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires qu'on redécouvrira au chapitre suivant. Mieux : elle ne prend chaque valeur qu'une seule fois, puisqu'elle est strictement croissante. Autrement dit, si y est un réel strictement positif, l'équation $e^x = y$ (d'inconnue x) a une seule solution.

Définition 10 (Logarithme) Soit $y > 0$. On appelle $\ln(y)$ (ou $\log(y)$) l'unique solution de l'équation $e^x = y$ d'inconnue x . La fonction \ln , ainsi définie, est définie sur $]0, +\infty[$.

Le nom complet de cette fonction est, en fait, logarithme népérien, logarithme naturel ou logarithme hyperbolique, selon les usages.

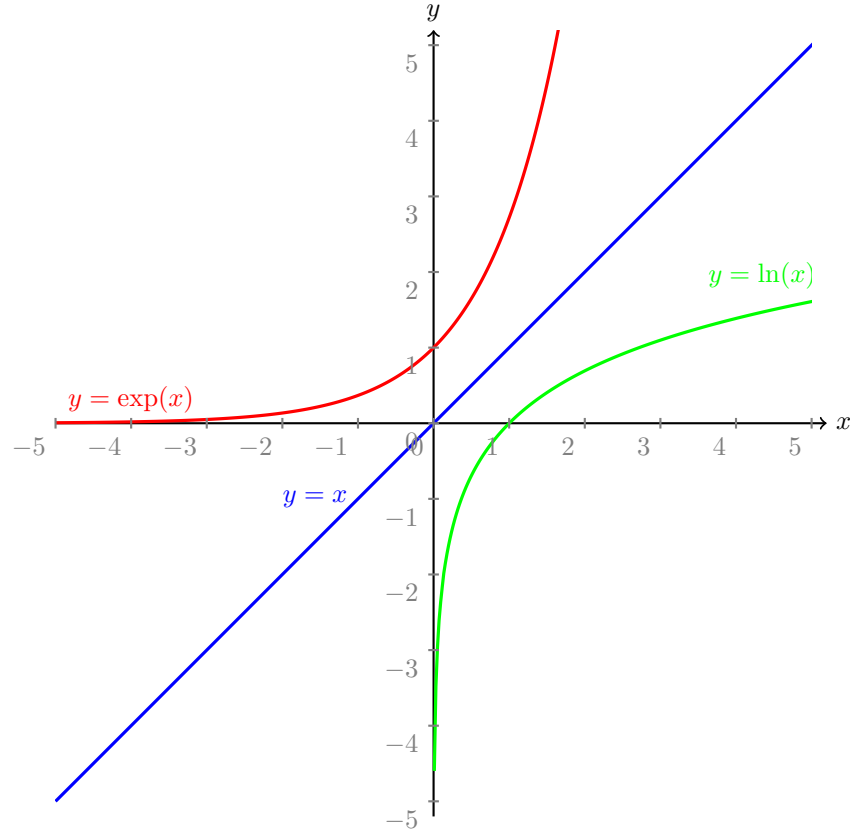
Vue la définition, on a $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$, mais on a aussi $\ln(e^y) = y$ pour tout y réel : en effet, l'équation $e^x = e^y$ (d'inconnue x) a pour solution $x = y$, mais on a vu qu'on appelait aussi $\ln(e^y)$ l'unique solution à cette équation, donc $y = \ln(e^y)$. L'intérêt d'avoir $e^{\ln(x)} = x$ (pour tout $x > 0$) et $\ln(e^y) = y$ (pour tout y) servira dans les équations et les inéquations à résoudre.

J'ai mis en figure 1.10 les graphes des fonctions \exp , $x \mapsto x$ et \ln . On remarque que \exp et \ln ont des graphes symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On peut voir sur ce graphique que \ln tend vers $-\infty$ en 0 (on remarque que c'est le contraire de l'exponentielle, qui tend vers 0 en $-\infty$), que $\ln(1) = 0$, puis que \ln est strictement croissante. Prouver que $\ln(1) = 0$ est facile : en effet, la solution à l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$, donc $\ln(1) = 0$. Je vais bientôt prouver ce résultat d'une autre manière, grâce à une des propriétés les plus importantes du logarithme : elle transforme les produits en sommes. C'est, historiquement, pour cette raison qu'elle a été introduite, puisque cela permettait de faire des produits sur des grands nombres assez simplement, à l'aide de sommes.

Proposition 11 *Le logarithme vérifie, pour tous $a, b > 0$, la relation*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

FIGURE 1.10 – \exp , $x \mapsto x$ et \ln .

C'est le contraire de l'exponentielle, il ne faut pas confondre! Le logarithme transforme les produits en sommes, et ceci explique sa croissance visiblement lente : par exemple, $\ln(10^{5000})$ ne vaut « que » $\underbrace{\ln(10) + \dots + \ln(10)}_{5000 \text{ fois}} =$

$5000 \ln(10) \simeq 11512,92546$.

C'est la seule formule à connaître sur le logarithme. Les autres formules que vous pourriez produire, du type $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)$ ou $\frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$, ne sont valables que dans votre imagination (et encore).

Preuve de la proposition. On sait que $\ln(ab)$ est la solution unique à l'équation $e^x = ab$, d'inconnue x . Si on montre que $\ln(a) + \ln(b)$ est aussi une solution de cette équation, alors on a forcément $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. Or :

$$\underbrace{e^{\ln(a)+\ln(b)}}_{\text{l'exponentielle transforme les sommes en produits}} = e^{\ln(a)} e^{\ln(b)} = ab,$$

car $e^{\ln(a)} = a$ et $e^{\ln(b)} = b$. Bref, j'ai bien prouvé que $\ln(a) + \ln(b)$ est solution de l'équation $e^x = ab$. \square

Voici comment on peut retrouver que $\ln(1) = 0$: comme $1 = 1 \times 1$, on a $\ln(1) = \ln(1 \times 1) = \ln(1) + \ln(1) = 2 \ln(1)$. Donc, en soustrayant $\ln(1)$ de chaque côté, on trouve $0 = \ln(1)$.

Corollaire 12 Soit $a > 0$. On a

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a) \text{ pour tout } n \text{ entier, et } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a).$$

L'idée est que $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \cdots a}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n \text{ fois}} = n \ln(a)$. On va le démontrer par récurrence. La deuxième formule est bien pratique pour se débarrasser des fractions, au même titre que la formule $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ était bien pratique pour la même raison.

Preuve du corollaire. Si n est un entier naturel, on va le démontrer par récurrence. Soit \mathcal{P}_n la proposition « Pour tout $a > 0$, on a $\ln(a^n) = n \ln(a)$ ». Pour $n = 0$, on a bien $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$, c'est bien la même chose que $0 \cdot \ln(a)$, donc on a \mathcal{P}_0 .

À présent, supposons qu'on ait \mathcal{P}_n pour un certain entier n . Alors,

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a \cdot a^n) = \ln(a) + \underbrace{\ln(a^n)}_{\mathcal{P}_n} = \ln(a) + n \ln(a) = (n+1) \ln(a).$$

Donc \mathcal{P}_n implique \mathcal{P}_{n+1} . Par récurrence, on a donc le résultat pour tout entier n positif. Maintenant, comme $\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = \ln\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) = \ln(1) = 0$, on en déduit que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$, d'où la seconde formule du corollaire.

On peut désormais prouver que $\ln(a^n) = n \ln(a)$ même si n est un entier négatif! En effet, si n est négatif (par exemple $n = -1$), alors $-n$ est positif, et on sait alors que $\ln(a^{-n}) = -n \ln(a)$ pour tout réel $a > 0$. On a

$$\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n) \ln(a) = n \ln(a). \square$$

Grâce à ça, on peut aussi voir que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$. En effet,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

En fait, on prouvera qu'on a $\ln(a^x) = x \ln(a)$ pour *tout* réel x , mais il faudra d'abord définir ce que veut dire a^x ... Et on le fera à l'aide combinée de l'exponentielle et du logarithme.

Quand on regarde la figure avec le graphe du logarithme, on voit qu'il est croissant, mais croît de moins en moins vite. Pour s'en rendre compte, on va calculer sa dérivée, qui est très intéressante :

Théorème 13 La dérivée du logarithme est $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Preuve du théorème. On a $e^{\ln(x)} = x$ pour tout x . Si je dérive cette égalité à gauche et à droite, j'obtiens 1 à droite (évidemment), et à gauche j'obtiens $e^{\ln(x)} \cdot \ln'(x)$. Donc $e^{\ln(x)} \cdot \ln'(x) = 1$. Or, $e^{\ln(x)} = x$, donc $x \cdot \ln'(x) = 1$, puis

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}. \square$$

En particulier, comme $\frac{1}{x}$ est strictement positif pour tout x positif, on en déduit que \ln est une fonction strictement croissante. Mais comme $\frac{1}{x}$ devient de plus en plus petit, on se doute que \ln croît de moins en moins vite.

On peut déduire de ces résultats les limites du logarithme en $+\infty$ et $-\infty$:

Proposition 14 *On a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.*

Preuve de la proposition. Comme 2 est strictement plus grand que 1, on a $\ln(2) > \ln(1)$ (car \ln est strictement croissante), donc $\ln(2) > 0$. De plus, $\ln(2^n) = n \ln(2)$, et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(2) = +\infty$ (si on avait eu $\ln(2) < 0$, la limite serait $-\infty$, c'est là que c'est important d'avoir $\ln(2) > 0$), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2^n) = +\infty.$$

La fonction \ln est strictement croissante et, comme on vient de le voir, non majorée. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Pour prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, c'est plus facile : on pose $u = \frac{1}{x}$. Quand $x \rightarrow 0$, on a $u \rightarrow +\infty$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} -\ln(u) = -\infty,$$

puisque l'on vient de montrer que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty$. \square

Bref, résumons les résultats les plus importants, ainsi que ceux de l'exponentielle, dans un tableau :

	ln	exp
dérivée	$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	$\exp'(x) = \exp(x)$
identité	$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$	$e^{a+b} = e^a e^b$
limites	$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty,$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
valeur spéciale	$\ln(1) = 0, \ln(e) = 1$	$e^0 = 1$

Attention, on a vu que l'exponentielle était positive, mais ce n'est pas du tout le cas du logarithme ! Si $x < 1$, alors $\ln(x) < \ln(1)$ (car le logarithme est strictement croissant), donc $\ln(x) < 0$. C'est d'ailleurs nécessaire, puisqu'il tend vers $-\infty$ en 0. De la même manière, si $x > 1$, alors $\ln(x) > 0$.

1.2.3 Exponentielles et logarithmes en base a

Il existe d'autres exponentielles et d'autres logarithmes. On appelle exponentielle en base a (avec $a > 0$), et on note a^x , la fonction définie par $a^x = e^{x \ln(a)}$ pour tout x réel. Comme le logarithme est défini pour des valeurs positives, on comprend pourquoi on doit avoir $a > 0$. La notation est motivée par le fait que $a^n = (e^{\ln(a)})^n = e^{n \ln(a)}$ pour tout entier n relatif, et il est naturel d'étendre ceci à tout réel n . Ces fonctions vérifient exactement les mêmes propriétés que l'exponentielle, à une exception près : leur monotonie. En faisant le calcul directement avec $e^{x \ln(a)}$, et connaissant les propriétés de l'exponentielle, on peut déduire toutes les propriétés de ces fonctions.

Proposition 15 *Soit $a > 0$. On a $a^{x+y} = a^x a^y$ pour tous x, y , et $a^0 = 1$.*

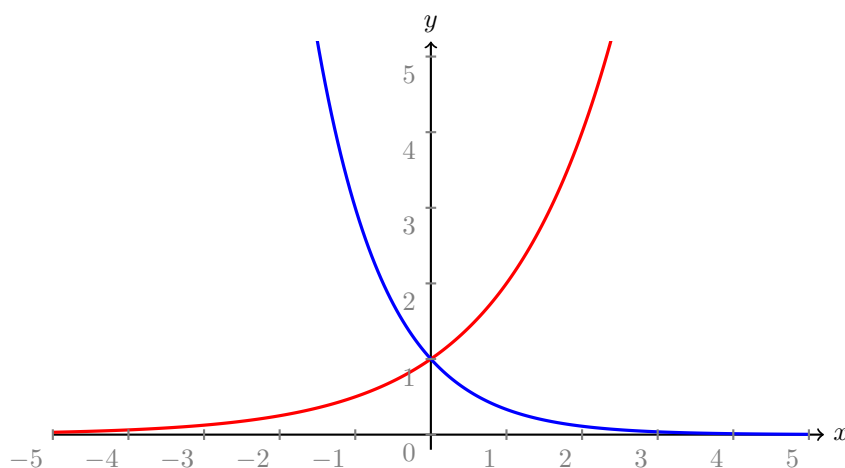


Preuve de la proposition. Exercice. □

Proposition 16 Soit $a > 0$. La dérivée de $x \mapsto a^x$ est $\ln(a)a^x$. En particulier, $x \mapsto a^x$ est croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$.

Preuve de la proposition. Exercice. □

FIGURE 1.11 – Graphes de $x \mapsto 2^x$ et $x \mapsto (\frac{1}{3})^x$: qui est qui ?



Proposition 17 Soit $a > 0$. On a $a^{x+y} = a^x a^y$ pour tous x, y réels, et $a^0 = 1$.

Preuve de la proposition. Exercice. □

Proposition 18 Soit n un entier positif non nul. On a $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ (racine n -ième de a) pour $a > 0$. En particulier, $a^{1/2} = \sqrt{a}$.

Preuve de la proposition. En effet, on a $(a^{1/n})^n = (e^{\frac{1}{n} \ln(a)})^n = e^{\frac{1}{n} \cdot n \ln(a)} = e^{\ln(a)} = a$. C'est donc bien une racine n -ième de a . □

On pouvait aussi le prouver ainsi : $\ln(x) = \ln((\sqrt[n]{x})^n) = n \ln(\sqrt[n]{x})$, donc, en prenant l'exponentielle, $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

De la même manière qu'on peut prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ grâce à la dérivée de l'exponentielle en 0, on peut prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$.

Enfin, on appelle logarithme en base a (où $a > 0$ et $a \neq 1$), et on note \log_a , la fonction définie par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ pour tout $x > 0$. Comme c'est simplement la fonction logarithme multipliée par la constante $\frac{1}{\ln(a)}$, il est très simple d'étudier cette fonction, la seule chose intéressante à ce sujet est :

Proposition 19 On a, pour tout $a > 0$, $a \neq 1$, et tout $x > 0$: $\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x$.

Preuve de la proposition. Soit $a > 0$, $a \neq 1$, et $x > 0$. On a $\log_a(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} = \frac{x \ln(a)}{\ln(a)} = x$. De même pour $a^{\log_a(x)} = x$. \square

On voit souvent le logarithme en base 10 en physique, pour simplifier les puissances de 10 : si $10^x = a$, alors $x = \log_{10}(a)$.