Rebondir MISMI, corrigé du devoir maison 2.

Exercice 1 – Calcul de dérivées.

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie pourvu que $\sqrt{1-x^2}$ existe et ne s'annule pas. Ceci vaut pour $1 - x^2 > 0$, c'est-à-dire $(1-x)(1+x) > 0$, ce qui équivaut à $-1 < x < 1$ après étude du signe de $1-x$ et $1+x$ selon les valeurs de x.
   Sur $]-1{,}1[$ la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable (en tant que composée de $x \mapsto 1 - x^2$ qui est dérivable et à valeurs dans $]0{,}1[$ et de $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc en particulier sur $]0{,}1[$) et ne s'annule pas, donc f est dérivable sur ce même intervalle ; on peut aussi remarquer que $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, et utiliser les faits connus sur la dérivabilité des fonctions puissances. On a :

   $$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2-1} \cdot (-2x) = x(1-x^2)^{-3/2} = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

   On peut aussi obtenir l'expression de f en se souvenant que la dérivée d'une fonction de la forme $\frac{1}{u}$ s'écrit $-\frac{u'}{u^2}$ (ici $u(x) = \sqrt{1-x^2}$, donc $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$).

2. La fonction $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable (en tant que composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$). On peut se demander si elle est également dérivable en 0. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas dérivable (ni même définie) en 0, cela nous empêche d'utiliser les théorèmes sur le produit, quotient, *etc.*, de fonctions dérivables, et on doit vérifier la dérivabilité avec la définition originelle de dérivée : or, on a

   $$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

   car $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est encadré par $-x$ et x qui tendent vers 0 quand $x \to 0$ (donc $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ aussi, par le théorème des gendarmes). Ceci prouve que $g'(0)$ existe, et vaut 0. Ainsi, en vérité, g est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée en 0 a déjà été calculée, celle sur $\mathbb{R}^*$ s'obtient grâce aux théorèmes traditionnels :

   $$g'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

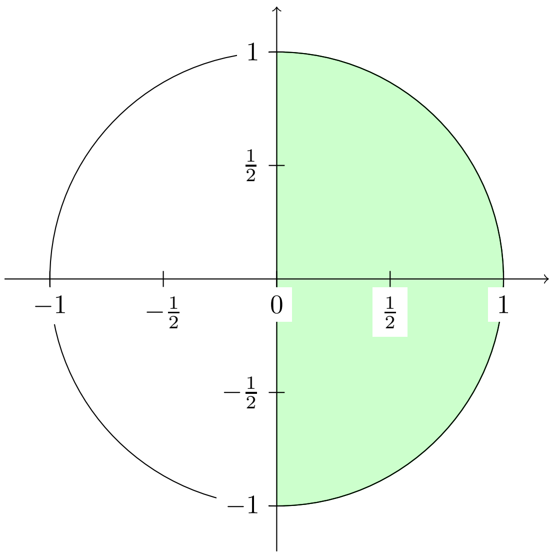
   Remarque. Ainsi, g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais g' n'est pas continue sur tout $\mathbb{R}$ car n'est pas continue en 0.

3. La fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{\ln\left(\frac{\cos(x)}{x^2+1}\right)}$ est définie dès lors que $\ln\left(\frac{\cos(x)}{x^2+1}\right)$ est défini (ce qui impose $\frac{\cos(x)}{x^2+1} > 0$) et ne s'annule pas (ce qui impose $\frac{\cos(x)}{x^2+1} \neq 1$). Comme $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout x réel (et même $x^2 + 1 > 1$ pour x non nul), on en déduit que ces conditions sont équivalentes à $\cos(x) > 0$ et $\cos(x) \neq x^2 + 1$. L'égalité $\cos(x) = x^2 + 1$ est impossible pour $x \neq 0$,

car dans ce cas $\cos(x) \leq 1 < x^2+1$, par contre elle est vérifiée pour $x = 0$ qui est donc parmi les valeurs à exclure. Il reste donc à résoudre $\cos(x) > 0$. On représente graphiquement à quel ensemble cela correspond (modulo 2π), sur la figure 2. On voit que $\cos(x) > 0$ pour $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[$. Donc h est définie sur

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[\setminus \{0\}.$$

FIGURE 1 – Représentation (en vert) des angles x tels que $\cos(x) > 0$.



Notons que l'expression de h peut être simplifiée très légèrement : comme $\left(\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)^2 = \exp\left(2\frac{x^2}{2}\right) = \exp(x^2)$, on en déduit que $\sqrt{\exp(x^2)} = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$; s'affranchir d'une racine carrée permet de simplifier la dérivation ultérieure. La fonction h est dérivable sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions dérivables (elles-mêmes dérivables comme composées de fonctions dérivables), et dériver h revient à savoir dériver $x \mapsto \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ puis $x \mapsto \ln\left(\frac{\cos(x)}{x^2+1}\right)$.

La première dérivée est simple, c'est simplement $x \mapsto x\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$, la dérivée de $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ étant $x \mapsto x$. La deuxième dérivée se calcule plus facilement en remarquant que $\cos(x)$ et x^2+1 *étant positifs strictement* sur l'ensemble de définition de h, on a

$$\ln\left(\frac{\cos(x)}{x^2+1}\right) = \ln(\cos(x)) - \ln(x^2+1),$$

donc la dérivée de $x \mapsto \ln\left(\frac{\cos(x)}{x^2+1}\right)$ est

$$x \mapsto \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{2x}{x^2+1} = -\tan(x) - \frac{2x}{x^2+1}.$$

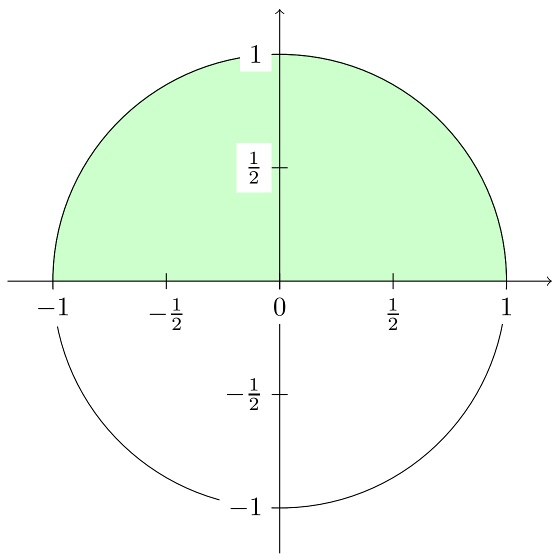
Toujours est-il que la dérivée de h vérifie donc :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{x \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \ln\left(\frac{\cos(x)}{x^2+1}\right) - \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(-\tan(x) - \frac{2x}{x^2+1}\right)}{\left(\ln\left(\frac{\cos(x)}{x^2+1}\right)\right)^2} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\left(\ln\left(\frac{\cos(x)}{x^2+1}\right)\right)^2}\left(\ln\left(\frac{\cos(x)}{x^2+1}\right) - \tan(x) - \frac{2x}{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

On peut s'amuser à triturer cette expression dans tous les sens selon nos goûts, mais on ne peut pas l'écrire sous une forme beaucoup plus compacte.

4. La fonction $j : x \mapsto \exp(\sqrt{\sin(\ln(x))})$ est définie dès lors que $\sin(\ln(x)) \geq 0$ (pour que $\sqrt{\sin(\ln(x))}$ soit bien défini) et $x > 0$ (pour que $\ln(x)$ soit bien défini).
   On voit que $\sin(\ln(x)) \geq 0$ pour $\ln(x) \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2\pi k, \pi + 2\pi k]$, donc pour $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\exp(2\pi k), \exp(\pi + 2\pi k)]$. Tous les x de cet ensemble vérifient immédiatement $x > 0$, donc il s'agit de l'ensemble de définition de j.
   La fonction $x \mapsto \sqrt{\sin(\ln(x))}$ est dérivable sur tout ensemble tel que $\sin(\ln(x)) > 0$; ceci vaut sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\exp(2\pi k), \exp(\pi + 2\pi k)[$. Alors, j est dérivable sur ce même ensemble, en tant que composée de exp (dérivable sur $\mathbb{R}$) et de $x \mapsto \sqrt{\sin(\ln(x))}$.

Figure 2 – Représentation (en vert) des angles x tels que $\sin(x) > 0$.



Sa dérivée se calcule en tant que composée de fonctions dérivables ; remarquons d'abord que $x \mapsto \sqrt{\sin(\ln(x))}$ a pour dérivée

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{\sin(\ln(x))}} \cdot (\sin'(\ln(x)) \cdot \ln'(x)) = \frac{\cos(\ln(x))}{2x\sqrt{\sin(\ln(x))}}.$$

Donc j a pour dérivée

$$j'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{2x\sqrt{\sin(\ln(x))}} \exp(\sqrt{\sin(\ln(x))}).$$

5. On sait que la fonction réciproque k d'une fonction dérivable l est dérivable partout où l' ne s'annule pas. Comme $l'(x) = x\exp(x) + \exp(x) = (x+1)\exp(x)$ ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[$, on en déduit que k est dérivable sur tout l'ensemble image de l, c'est-à-dire sur $\left]-\frac{1}{e}, +\infty\right[$. Sa dérivée est alors, toujours d'après le cours,

$$k'(x) = \frac{1}{l'(k(x))} = \frac{1}{k(x)\exp(k(x)) + \exp(x)}.$$

On peut améliorer cette expression : comme $l(k(x)) = k(x)\exp(k(x)) = x$ (par définition d'une fonction réciproque), et que cette même égalité entraîne $\exp(k(x)) = \frac{x}{k(x)}$, on peut écrire :

$$k'(x) = \frac{1}{x + \frac{x}{k(x)}} = \frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{k(x)}\right)},$$

ce qui est un peu plus sympathique, et met en évidence une équation différentielle rigolote vérifiée par k.

Exercice 2 – Tableaux de variations.

1. Le polynôme $X^2 + X + 1$ a pour discriminant $-3 < 0$, donc n'a pas de racine réelle ; par ailleurs, $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout x réel. On en déduit que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et y est dérivable. On a, pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Le dénominateur est toujours strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $2x+1$: on a $2x+1 > 0$ si, et seulement si $x > -\frac{1}{2}$, avec annulation en $x = -\frac{1}{2}$. Ceci donne le tableau de variations (simple) suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. La valeur en $-\frac{1}{2}$ se calcule à la main aisément.

Pour la recherche d'asymptotes, on doit d'abord calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. On a, en factorisant par le terme le plus fort au numérateur,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \begin{cases} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} & \text{si } x>0 \\ -\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$. *S'il existe* des asymptotes, alors leurs pentes sont nécessairement 1 en $+\infty$ et de pente -1 en $-\infty$. On trouve leurs ordonnées à l'origine, si elles existent, en calculant les limites $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$. On a :

$$\begin{aligned} f(x)-x = \sqrt{x^2+x+1}-x &= \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\ &= \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}. \end{aligned}$$

La limite de ce quotient se trouve, comme d'habitude, en factorisant par les termes les plus forts au numérateur et au dénominateur. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Donc la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. En $-\infty$, ce sont essentiellement les mêmes calculs : on a $f(x)+x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$, donc

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = -\frac{1}{2}.$$

De plus, le signe de $f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right)$ et $f(x) - \left(-x-\frac{1}{2}\right)$ est facilement à calculer à chaque fois, et montre que la courbe de f est au-dessus des asymptotes calculées. Je rappelle, encore une fois, que pour $x<0$, on a $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ (car $\sqrt{x^2}$ est l'unique nombre *positif* qui, élevé au carré, donne x^2 ; il y a deux possibilités, x et $-x$, mais pour $x<0$ c'est $-x$ qui convient). C'est de là que proviennent toutes les différences dans les traitements des cas $+\infty$ et $-\infty$. En bref, la droite d'équation $y = -x-\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$. Ceci suffit pour tracer presque fidèlement le graphe de f, sur la figure 3.

2. La fonction $g : x \mapsto 2\frac{x^2-3x+2}{x+1}$ est définie et dérivable partout où $x+1 \neq 0$, donc sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Sa dérivée égale, pour tout $x \neq -1$,

$$g'(x) = 2\frac{(2x-3)\cdot(x+1)-(x^2-3x+2)\cdot 1}{(x+1)^2} = 2\frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}.$$

Le signe de $g'(x)$ dépend uniquement de celui de x^2+2x-5. Pour cela, on calcule ses racines et on les utilise pour le factoriser. Le discriminant de X^2+2X-5 est $24 = 4\cdot 6 > 0$, donc ses racines sont $x_1 = \frac{-2+2\sqrt{6}}{2} = -1+\sqrt{6}$

et $x_2 = \frac{-2-2\sqrt{6}}{2} = -1-\sqrt{6}$. Alors, $x^2+2x-5 = (x-x_1)(x-x_2)$, et on peut en déduire le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	$g(x_1)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$g(x_2)$	↗	$+\infty$

On a $g(x_1) = -4\sqrt{6}-10 < 0$ et $g(x_2) = 4\sqrt{6}-10 < 0$.
Les calculs en $\pm\infty$ s'effectuent en factorisant par les termes les plus forts au numérateur et au dénominateur : $g(x) = 2x\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$, et c'est ainsi qu'on déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Les limites à gauche et à droite s'obtiennent en remarquant qu'on obtient une limite de la forme $\frac{1}{0}$, donc $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de g a voisinage de ce point. Comme $g(x) < 0$ manifestement à gauche de -1, on en déduit que la limite est $-\infty$ à gauche et on raisonne de même à droite.
Cette même forme facilite la recherche des asymptotes : on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$, donc *s'il existe* des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$, alors leurs pentes égalent 2. De plus,

$$g(x)-2x = 2\left(\frac{x^2-3x+2}{x+1} - \frac{x(x+1)}{x+1}\right) = 2\cdot\frac{-4x+2}{x+1} = 2\cdot\frac{-4+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}},$$

donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(g(x)-2x) = -8$. Ceci prouve que la droite d'équation $y = 2x-8$ est asymptote à la courbe de g, aussi bien en $+\infty$ qu'en $-\infty$. Comme $g(x)-(2x-8) = \frac{12}{x+1}$, l'étude de la position de la courbe de g par rapport à cette asymptote est immédiate.
On en déduit le tracé de la courbe, sur la figure 4.

3. Pour tout $x > 0$, $1+(\ln(x))^2 \geq 1 > 0$, donc $x \mapsto \sqrt{1+(\ln(x))^2}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et il en est de même pour h par composition. On a, pour tout réel strictement positif x,

$$h'(x) = \frac{\cancel{2}\ln(x)}{x\cdot\cancel{2}\sqrt{1+(\ln(x))^2}}\exp(\sqrt{1+(\ln(x))^2}).$$

Le signe de $h'(x)$ selon x est donné uniquement par celui de $\ln(x)$, car les autres quantités sont toujours (strictement) positives. Ceci permet de dresser le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

On a $h(1) = \exp(\sqrt{1 + (\ln(1))^2}) = \exp(\sqrt{1}) = e$.
Comme $\lim\limits_{x \to 0}(1 + (\ln(x))^2) = +\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$. De même pour la limite en $+\infty$.
La recherche d'asymptotes est, ici, plus délicate que pour les exemples précédents. Pour déterminer la limite de $\frac{\exp(\sqrt{1+(\ln(x))^2})}{x}$ en $+\infty$, on doit savoir comparer le numérateur et le dénominateur. Sous cette forme, cela ne ressemble à aucune croissance comparée connue, on remplace donc x par $\exp(\ln(x))$ et on regroupe les exponentielles pour avoir tout sur une échelle commune :

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(\sqrt{1 + (\ln(x))^2})}{x} &= \frac{\exp(\sqrt{1 + (\ln(x))^2})}{\exp(\ln(x))} \\
&= \exp(\sqrt{1 + (\ln(x))^2}) \exp(-\ln(x)) \\
&= \exp(\sqrt{1 + (\ln(x))^2} - \ln(x)).
\end{aligned}$$

Le plus dur sera fait une fois qu'on aura déterminé la limite de $\sqrt{1 + (\ln(x))^2} - \ln(x)$ quand $x \to +\infty$. Posant $u = \ln(x)$, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{1 + (\ln(x))^2} - \ln(x)) = \lim_{u \to +\infty} \sqrt{1 + u^2} - u = \lim_{u \to +\infty} \frac{(1 + \cancel{u^2}) - \cancel{u^2}}{\sqrt{1 + u^2} + u} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\exp(\sqrt{1+(\ln(x))^2})}{x} = \exp(0) = 1$. Ainsi, *s'il existe* une asymptote en $+\infty$, alors sa pente égale 1. On doit à présent calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - x$. C'est encore plus délicat, même en écrivant $x = \exp(\ln(x))$, car une différence d'exponentielles ne se simplifie pas particulièrement. On s'en sort comme on peut : en posant $u = \ln(x)$ encore une fois, on a

$$\lim_{x \to +\infty}(h(x) - x) = \lim_{u \to +\infty}(\exp(\sqrt{1 + u^2}) - \exp(u)) = \lim_{u \to +\infty} \exp(u) \left(\exp(\sqrt{1 + u^2} - u) - 1\right)$$

On a vu à l'instant que $\lim_{u \to +\infty}(\exp(\sqrt{1 + u^2} - u) - 1) = 0$, donc on a ici une indéterminée de la forme $\infty \times 0$... Pour la lever, on peut utiliser le dernier recours : la règle de l'Hôpital. En écrivant $\exp(u) = \frac{1}{\exp(-u)}$, on peut en effet voir un quotient (dont la dérivée du dénominateur ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$), et appliquer cette règle. On obtient :

$$\lim_{u\to+\infty} \exp(u)\left(\exp(\sqrt{1+u^2}-u)-1\right) = \lim_{u\to+\infty} \frac{\exp(\sqrt{1+u^2}-u)-1}{\exp(-u)} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}-1\right)\exp(\sqrt{1+u^2}-u)}{-\exp(-u)}.$$

L'indéterminée n'est toujours pas levée : dorénavant, $\exp(\sqrt{1+u^2}-u)$ ne nous embête plus, car tend vers 1 quand $u\to+\infty$, on n'a donc pas à le considérer davantage à présent. Par contre, $\exp(-u)$ tend vers 0 quand $u\to+\infty$, et $\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}-1 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}-1$ également, donc on a encore une indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On factorise donc, comme d'habitude, par le terme le plus fort au numérateur et au dénominateur pour s'en sortir, parce qu'ici *on sait comparer l'exponentielle et la racine du numérateur* ! En effet, $\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}-1 = \frac{u-\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}(\sqrt{1+u^2}+1)}$ après multiplication par le conjugué, et donc :

$$\frac{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}-1\right)}{-\exp(-u)} = \frac{\exp(u)}{\sqrt{1+u^2}(\sqrt{1+u^2}+1)} = \frac{\exp(u)}{u^2\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}+\frac{1}{u}\right)}.$$

On sait que $\lim_{u\to+\infty} \frac{\exp(u)}{u^2} = +\infty$ par domination de l'exponentielle, donc

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}-1\right)\exp(\sqrt{1+u^2}-u)}{-\exp(-u)} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\exp(u)}{u^2\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}+\frac{1}{u}\right)}_{\to 1}} \times \underbrace{\exp(\sqrt{1+u^2}-u)}_{\to 1} = +\infty,$$

puis $\lim_{x\to+\infty}(h(x)-x) = +\infty$: il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$. On devra s'en contenter pour tracer le graphe, visible sur la figure 5.

4. La fonction $j : x \mapsto 4x+1+\ln\left(\frac{4x-5}{7x+2}\right)$ est définie pour $\frac{4x-5}{7x+2} > 0$. Un tableau de signes montre rapidement que cette condition est vérifiée pour $x < -\frac{2}{7}$ ou $x > \frac{5}{4}$, donc j est définie (et même dérivable, en tant que somme, composée, *etc.*, de fonctions dérivables) sur $\left]-\infty, -\frac{2}{7}\right[\cup \left]\frac{5}{4}, +\infty\right[$. Pour $x > \frac{5}{4}$, on a $4x-5>0$ et $7x+2>0$, donc on peut écrire que $\ln\left(\frac{4x-5}{7x+2}\right) = \ln(4x-5)-\ln(7x+2)$. Ceci permet de dériver plus facilement j : on obtient, pour $x > \frac{5}{4}$,

$$j'(x) = 4 + \frac{4}{4x-5} - \frac{7}{7x+2}.$$

Si $x < -\frac{2}{7}$, on s'en sort en écrivant que $\ln\left(\frac{4x-5}{7x+2}\right) = \ln\left(\frac{-(4x-5)}{-(7x+2)}\right) = \ln(-(4x-5)) - \ln(-(7x+2))$. Le calcul de la dérivée est exactement le

même, on obtient le même résultat, qui est donc valable finalement pour tout $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{7}\right[\cup \left]\frac{5}{4}, +\infty\right[$.
Pour déterminer le signe de $j'(x)$, il est plus commode de l'écrire comme produit ou quotient de différents facteurs simples. C'est la raison de la mise au même dénominateur de toutes ces quantités :

$$j'(x) = \frac{4(4x-5)(7x+2) + 4(7x+2) - 7(4x-5)}{(4x-5)(7x+2)} = \frac{112x^2 - 108x + 3}{(4x-5)(7x+2)}.$$

Le polynôme $112X^2 - 108X + 3$ a pour discriminant $10320 = 4^2 \cdot 645 > 0$, donc a deux racines distinctes, nommément $x_1 = \frac{108+4\sqrt{645}}{224} = \frac{27+\sqrt{645}}{56}$ et $x_2 = \frac{27-\sqrt{645}}{56}$. Ces deux racines sont comprises entre $-\frac{2}{7}$ et $\frac{5}{4}$, donc $112x^2 - 108x + 3$ est de signe constant sur l'ensemble de définition de j. On a $112x^2 - 108x + 3 > 0$ sur ce même ensemble, comme l'évaluation en un point quelconque permet de le voir. Ceci donne le tableau de signes suivant, où seul $(4x-5)(7x+2)$ compte :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$4x-5$		$-$				$+$	
$7x+2$		$-$				$+$	
$j'(x)$		$+$				$+$	
j	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{4x-5}{7x+2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{4-\frac{5}{x}}{7+\frac{2}{x}}\right) = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} j(x) = -\infty$ (à cause du $4x$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x) = +\infty$. De plus, comme $\lim\limits_{x\to\frac{5}{4}} \frac{4x-5}{7x+2} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to\frac{5}{4}} j(x) = -\infty$. Enfin, comme $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{7}} \frac{4x-5}{7x+2} = +\infty$ (le tableau de signes ci-dessus montre que cette fraction est positive pour x proche de $-\frac{2}{7}$ par valeurs inférieures, ce qui exclut $-\infty$), on a $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{7}} j(x) = +\infty$.
Cherchons les asymptotes potentielles. On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{4x-5}{7x+2}\right) = 4 + 0 + 0 \cdot \ln\left(\frac{4}{7}\right) = 4.$$

Donc, *en cas d'asymptote éventuelle* en $+\infty$ et $-\infty$, leurs pentes égalent 4. De plus,

$$\lim_{x\to\pm\infty} (j(x) - 4x) = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \ln\left(\frac{4x-5}{7x+2}\right) = 1 + \ln\left(\frac{4}{7}\right).$$

Ceci prouve que la droite d'équation $y = 4x + 1 + \ln\left(\frac{4}{7}\right)$ est asymptote à la courbe de h en $+\infty$ et $-\infty$. On peut maintenant se demander si la courbe est située au-dessus ou en dessous de cette asymptote : ceci se fait en étudiant le signe de $j(x) - \left(4x + 1 + \ln\left(\frac{4}{7}\right)\right)$. Or,

$$j(x) - \left(4x + 1 + \ln\left(\frac{4}{7}\right)\right) = \ln\left(\frac{x - \frac{5}{4}}{x + \frac{2}{7}}\right),$$

et $\ln\left(\frac{x-\frac{5}{4}}{x+\frac{2}{7}}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{5}{4}}{x+\frac{2}{7}} > 1 \Leftrightarrow \frac{43/28}{x+\frac{2}{7}} < 0$: la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote est déterminée par la position de x par rapport à $-\frac{2}{7}$. On peut admirer le tracé de la courbe de h sur la figure 6.

5. La fonction $k : x \mapsto x + \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x$ et cos le sont. Pour tout réel x, sa dérivée égale $k'(x) = 1 - \sin(x) \geq 0$; on a même $k'(x) > 0$ dès que $\sin(x) \neq 1$, c'est-à-dire dès que $x \notin \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, donc k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour le tracé de la fonction, il est bon de remarquer que la dérivée k' est périodique de période 2π, et en particulier s'annule à $\frac{\pi}{2}$ puis à toutes ses translatées modulo 2π.

   La recherche d'asymptotes tourne court rapidement : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{k(x)}{x} = 1$ car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$ (c'est une conséquence du théorème des gendarmes, *cf.* le cours). Par contre, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (k(x) - x)$ n'existe pas, car cos n'a pas de limite en $\pm\infty$. Donc k n'a pas d'asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.

   Toujours pour faciliter le tracé, on peut remarquer que $x-1 \leq k(x) \leq x+1$, avec égalité dès que $\cos(x) = -1$ ou $\cos(x) = 1$. Bref, le tracé de la courbe de k est reproduit sur la figure 7.

Exercice 3 – Calcul de limites.

1. Soit $f(x) = \exp(x) - \exp(-x)$. On a $f(0) = 1 - 1 = 0$, donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) - f(0)x - 0 = f'(0) = \exp(0)+\exp(-0) = 2.$$

2. En posant $u = \frac{1}{x}$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u) - \sin(0)}{u - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

3. On applique la règle de l'Hôpital, ce qui est possible car la dérivée de $x \mapsto x^3$, qui est $x \mapsto 3x^2$, ne s'annule pas au voisinage de 0 (0 exclu) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2}.$$

   Cette limite a fait l'objet d'un exemple du cours sur les dérivées et d'un exercice du premier DS, on avait démontré que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$.

4. Là encore, la règle de l'Hôpital fournit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \tan(x)^2 - \cancel{1}}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0}\right)^2 = \frac{1}{3}(\tan'(0))^2 = \frac{1}{3}.$$

5. Là encore, la règle de l'Hôpital fournit

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 2 + x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} 2\frac{x - \sin(x)}{4x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{12},$$

d'après la troisième question de cet exercice.

FIGURE 3 – Graphe de $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

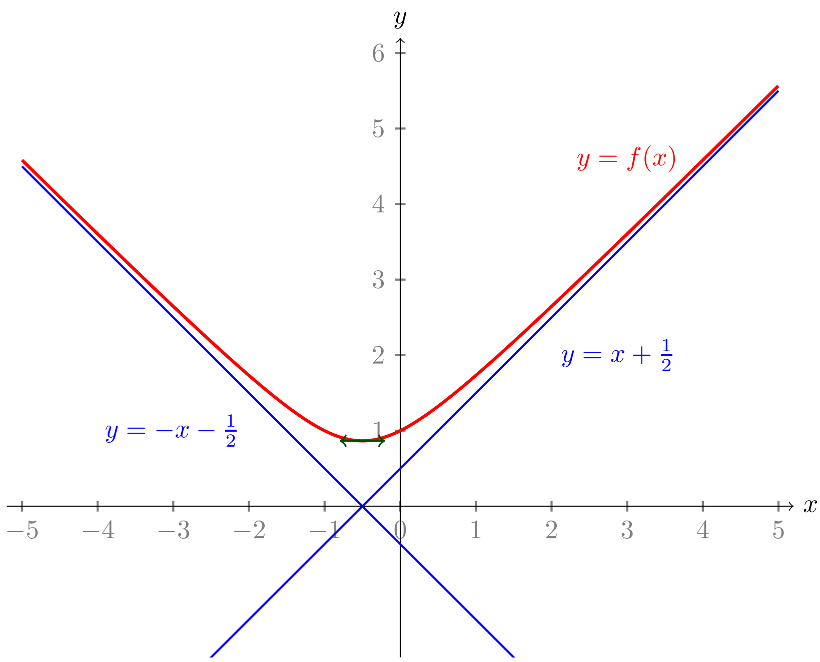


Figure 4 – Graphe de $x \mapsto \frac{2x^2-6x+4}{x+1}$.

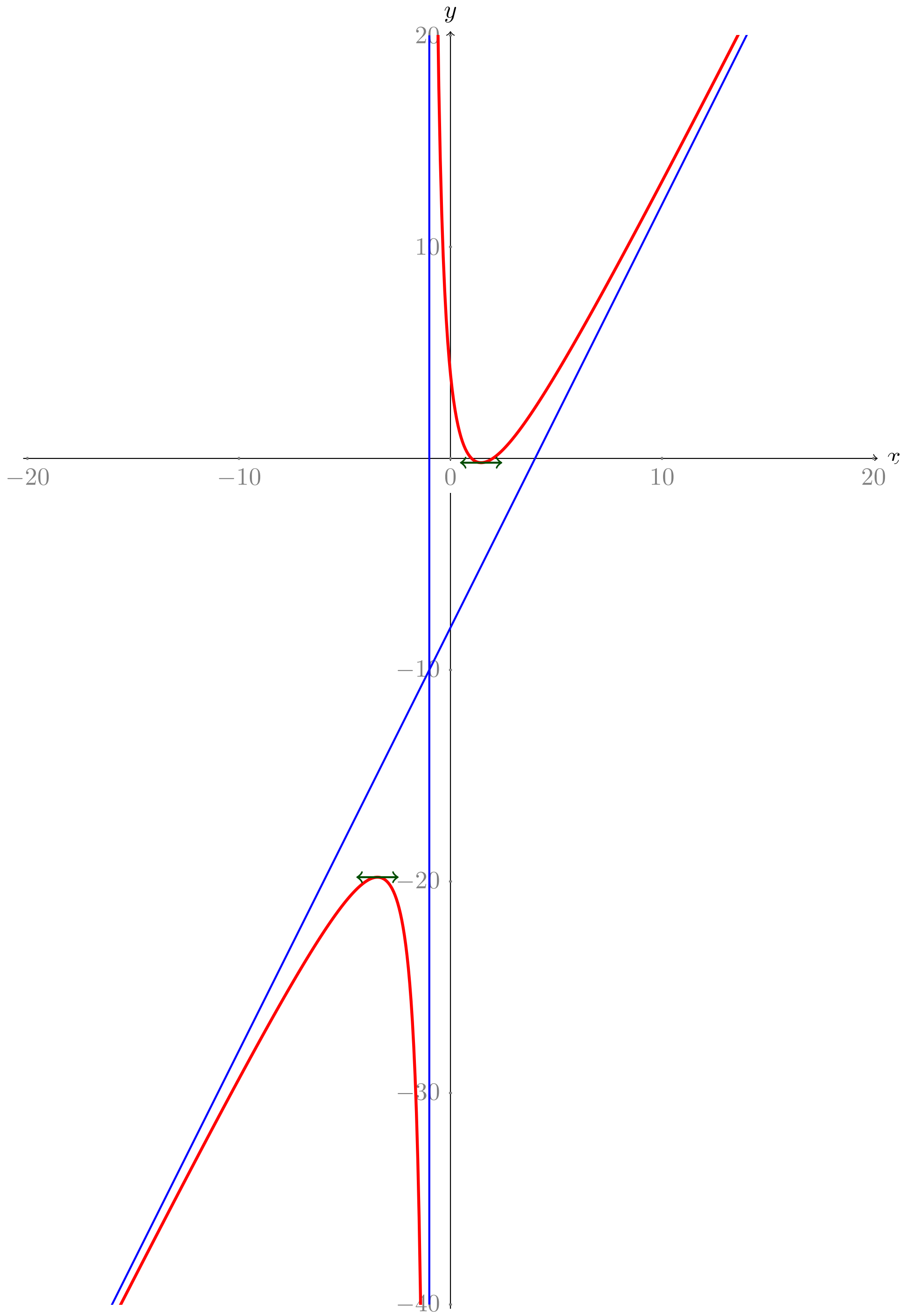


Figure 5 – Graphe de $x \mapsto \exp\left(\sqrt{1+(\ln(x))^2}\right)$.

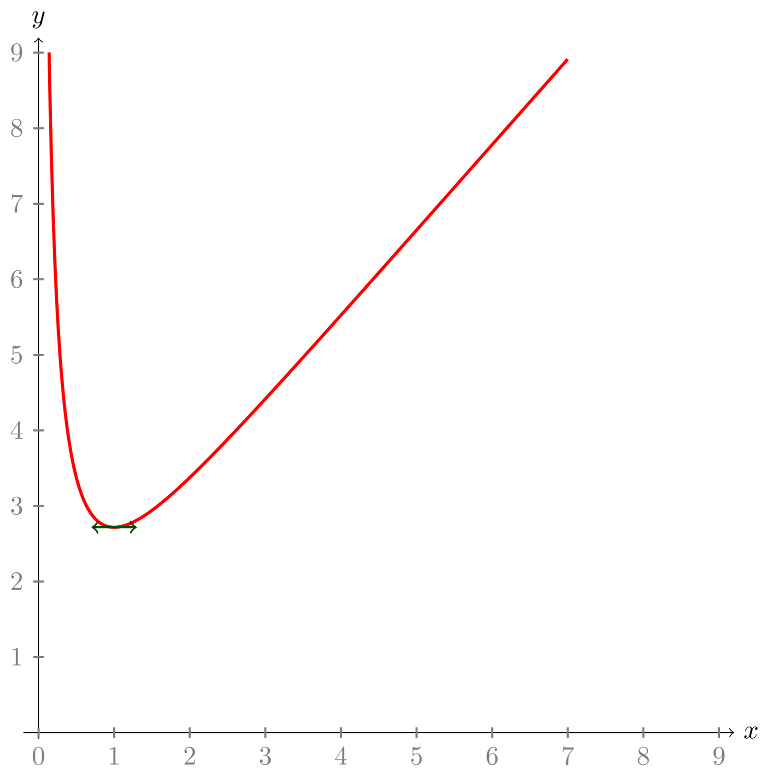


FIGURE 6 – Graphe de $x \mapsto 4x + 1 + \ln\left(\frac{4x-5}{7x+2}\right)$.

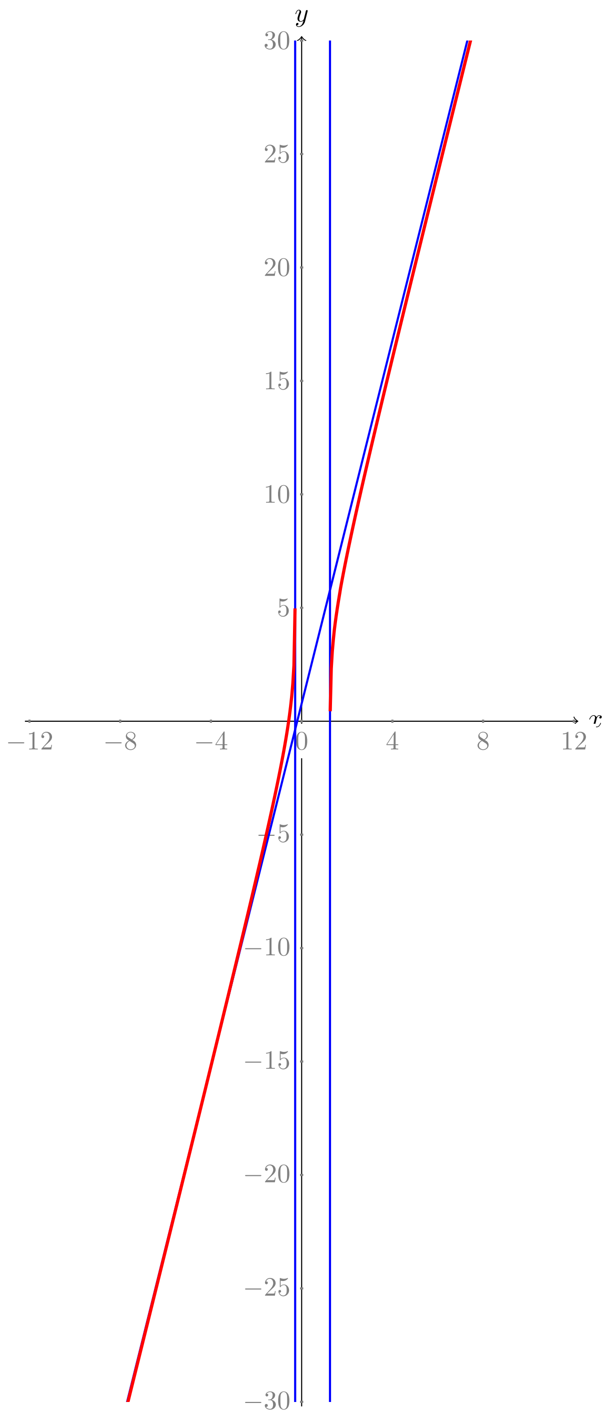


Figure 7 – Graphe de $x \mapsto x + \cos(x)$.