Rebondir MISMI, corrigé du devoir maison 1.

Exercice 1 – Trigonométrie.

1. **Résolution de** $\cos(x)^2 \geq \frac{3}{4}$**.** Cette première inéquation est traitée plus en détails, histoire de poser tous les principes fondateurs de l'étude des inéquations à base de trigonométrie. Les suivantes seront plus succintes.

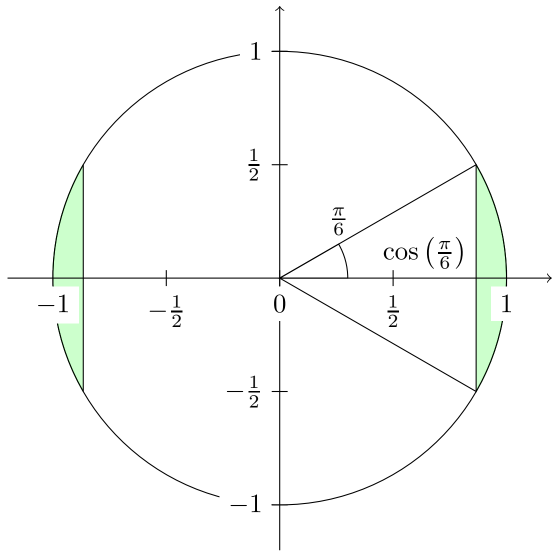
   On commence à restreindre l'intervalle d'étude, pour se simplifier la vie au possible. Comme la fonction $x \mapsto \cos(x)^2$ est périodique de période 2π, je peux restreindre l'étude de cette inéquation à x compris dans un intervalle I fixé de longueur 2π. Les autres solutions réelles se déduiront de celles dans I en rajoutant des multiples entiers de 2π (le choix de I se fera plus tard, de façon à rendre l'ensemble de solutions le plus lisible possible ; lors d'un devoir, faites la résolution jusqu'au bout au brouillon, déterminez le meilleur I possible, et lors de la rédaction au propre vous mettez d'emblée le choix de I fait, au lieu de le faire *a posteriori* comme dans ce corrigé).
   Soit $x \in I$. Alors,

$$\begin{aligned}\cos(x)^2 \geq \frac{3}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x)^2 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sont de même signe} \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

   Une erreur très courante consiste à passer directement de $\cos(x)^2 \geq \frac{3}{4}$ à $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ en « prenant la racine carrée ». En faisant ceci, vous perdez la moitié des solutions, celles correspondant à $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$! Ceci provient de la tendance à oublier que la racine carrée « choisit » uniquement la solution positive à une équation du type $x^2 = y$, et exclut la négative. Je recommande d'oublier l'emploi des racines carrées dans les équations (et, plus généralement, de toutes les fonctions réciproques sauf ln, qui sont rarement maîtrisées), et de raisonner comme ci-dessus.
   Ceci étant dit, on doit déterminer les $x \in I$ vérifiant ces deux inéquations ; remarquons que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Un dessin permet de voir facilement les x solutions (et quel serait le choix le plus pertinent d'intervalle I) et de s'affranchir d'une étude de fonctions un peu lourde :
   Si on prend $I = \left[-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right]$, alors la figure 1 montre que l'ensemble des solutions $x \in I$ à $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[5\frac{\pi}{6}, 7\frac{\pi}{6}\right]$. Donc l'ensemble des solutions réelles x s'obtient grâce à la périodicité déjà soulignée, et est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[5\frac{\pi}{6} + 2k\pi, 7\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]\right)$.

   Remarque 1. On peut remarquer que $x \mapsto \cos(x)^2$ est même de période π : en effet, $\cos(x+\pi)^2 = (-\cos(x))^2 = \cos(x)^2$. On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur π, par exemple $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et obtenir l'ensemble des solutions en ajoutant des multiples de π. En procédant ainsi, on trouve que l'ensemble des $x \in I$ solutions est $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, et l'ensemble des solutions réelles est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$: c'est une description plus agréable de l'ensemble des solutions. Remarquer ceci a en

FIGURE 1 – Représentation (en vert) des angles x tels que $\cos(x)^2 \geq \frac{3}{4}$.



plus l'avantage énorme de pouvoir se restreindre à un intervalle I où cos est toujours positif, et dans ce cas $\cos(x)^2 \geq \frac{3}{4}$ est effectivement équivalent à $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque 2. Bien sûr, tout intervalle I de longueur 2π donnait les bonnes solutions, pourvu qu'on ne se trompe pas dans les calculs et le raisonnement. Si on avait choisi $I = [-\pi, \pi]$ ou $[0,2\pi]$, qui sont des choix *a priori* plus naturels, alors on obtient respectivement $\left[-\pi, -5\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[5\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ et $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[5\frac{\pi}{6}, 7\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[11\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$, dont il faut ensuite considérer toutes les translations modulo 2π ; je vous laisse vérifier que ces ensembles sont bien les mêmes.

Remarque 3. Si vous ne voulez pas faire un dessin, vous pouvez résoudre l'inégalité à partir des variations connues de la fonction cos. Par exemple, sachant que cos est décroissante sur $[0, \pi]$, vous savez que pour $x \in [0, \pi]$, $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ équivaut à $x \leq \frac{\pi}{6}$. Mais c'est pénible parce que les variations de cos changent sans cesse et il faut distinguer plusieurs cas, donc on préfère s'en passer.

Résolution de $\sin(3x) = 0$**.** Tout d'abord, $0 = \sin(0)$. Ensuite, on a vu en TD à quelle condition on a une égalité entre deux sinus : $\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow x = y \mod 2\pi$ ou $x = \pi - y \mod 2\pi$. Ici, cela nous donne :

$$\begin{aligned} \sin(3x) = 0 = \sin(0) &\Leftrightarrow 3x = 0 \mod 2\pi \Leftrightarrow 3x = 0 \mod 2\pi \text{ ou } 3x = \pi \mod 2\pi \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = 2\pi k \text{ ou } 3x = \pi + 2\pi k \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{2\pi k}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \end{aligned}$$

En définitive, l'ensemble des solutions réelles à l'équation $\sin(3x) = 0$ est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{2\pi k}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\}$.

Remarque. Il est intéressant de remarquer qu'en fait, on a $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \mod \pi$. Avec ceci à l'esprit, on constate que l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(3x) = 0$ a une description simple, c'est $\{\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Résolution de $\tan(x) \geq \sqrt{3}$**.** La fonction tan est périodique de période π, donc on peut restreindre l'ensemble d'étude à un intervalle de longueur π, par exemple $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,[*] les autres solutions s'obtiendront par ajout de multiples de π..

Alors, comme tan est strictement croissante sur I, l'inégalité $\tan(x) \geq \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est équivalente à $x \geq \frac{\pi}{3}$. L'ensemble des $x \in I$ solutions est donc $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, et l'ensemble des x réels solutions est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Remarque. On peut ramener cette inéquation sur tan à une inéquation sur cos, si on est plus à l'aise avec cos (même si cela est rudement déconseillé : l'étude qui vient d'être faite montre qu'on peut tirer un grand profit de la monotonie exemplaire de tan). En effet,

$$\begin{aligned}
\tan(x) \geq \sqrt{3} \Rightarrow \tan(x)^2 \geq 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1-\cos(x)^2}{\cos(x)^2} \geq 3 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos(x)^2} - 1 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos(x)^2} \geq 4 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x)^2 \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Vous en conviendrez peut-être, on ne gagne pas au change.

2. On sait que $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$. On a donc

$$\begin{aligned}
2^4\cos(\theta)^4 &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 \\
&= (e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}) + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6 \\
&= 2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6,
\end{aligned}$$

Alors,

$$\cos(\theta)^4 = \frac{1}{8}\left(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right).$$

3. On sait que $\cos(2x) + i\sin(2x) = e^{i2x} = (e^{ix})^2 = (\cos(x) + i\sin(x))^2$ (on vient de redémontrer la formule de Moivre pour $n = 2$). En développant ce carré, on obtient

$$\cos(2x)+i\sin(2x) = (\cos(x)+i\sin(x))^2 = \cos(x)^2-\sin(x)^2+2i\cos(x)\sin(x).$$

Sachant que $\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2$, on en déduit, après identification des parties réelles, que $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1$.

Cette formule permet de transformer l'équation suivante en équation polynomiale du second degré vérifiée par $\cos(x)$:

$$4\cos(2x) - 6\cos(x) - 1 = 0. \tag{1}$$

[*]. Encore mieux : comme $\tan(x) \leq 0 < \sqrt{3}$ pour $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$, on peut se restreindre à $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

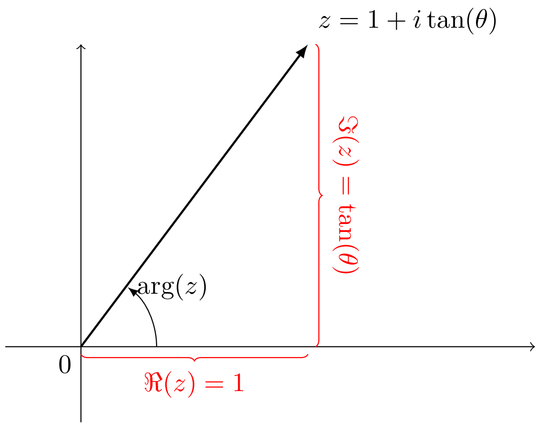
En effet, en remplaçant $\cos(2x)$ par $2\cos(x)^2 - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} 4\cos(2x) - 6\cos(x) - 1 = 0 &\Leftrightarrow 4(2\cos(x)^2 - 1) - 6\cos(x) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8\cos(x)^2 - 6\cos(x) - 5 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\cos(x)$ est solution de l'équation $8X^2 - 6X - 5 = 0$, qui admet pour solutions $\frac{6+\sqrt{6^2-4\cdot(-5)\cdot(8)}}{16} = \frac{5}{4}$ et $\frac{6+\sqrt{6^2-4\cdot(-5)\cdot(8)}}{16} = -1$. Toutefois, $\cos(x) = \frac{5}{4}$ est impossible, car $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Donc $\cos(x) = -1 = \cos(\pi)$. Ceci est vérifié pour tout x réel tel que $x = \pi \mod 2\pi$ ou $x = -\pi \mod 2\pi$ (ce qui décrit le même ensemble que $\pi \mod 2\pi$). L'ensemble des solutions est donc $\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2 – Tangente et nombres complexes.

1. En vérité, tout ce qui importe pour cet exercice est de savoir que $\arg(z) = \theta \mod \pi$. Les relations de trigonométrie classiques dans un triangle montrent que $\tan(\arg(z)) = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \tan(\theta)$. Comme la fonction tan prend chaque valeur une et une seule fois sur tout intervalle de longueur π où elle est définie, et qu'elle est périodique de période π, on en déduit que $\tan(\arg(z)) = \tan(\theta)$ pour $\arg(z) = \theta \mod \pi$.



2. Comme $\arg(z^2) = 2\arg(z)$ d'après l'interprétation géométrique de la multiplication complexe, on a

$$\tan(\arg(z^2)) = \tan(2\arg(z)) = \tan(2\theta + 2k\pi) = \tan(2\theta).$$

Ainsi, comme $z^2 = 1 - \tan(\theta)^2 + 2i\tan(\theta)$ et $\tan(\arg(z^2)) = \frac{\Im(z^2)}{\Re(z^2)}$, on déduit de tout ceci que

$$\tan(2\theta) = \tan(\arg(z^2)) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)^2}.$$

3. En posant $\theta = \frac{\pi}{8}$, la question précédente nous donne l'égalité :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)^2}.$$

De $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, on déduit :

$$1 = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = 2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + 2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = 0.$$

On vient de montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ vérifie l'équation du second degré $x^2 + 2x - 1 = 0$, dont les solutions sont $\sqrt{2}-1$ et $-\sqrt{2}-1$. Comme $-\sqrt{2}-1 < 0$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ (la fonction tan est positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$), on en déduit que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$.

Exercice 3 – Un exercice que Galois aurait dû faire.

1. La probabilité d'échec à chaque tir est de $\frac{19}{20}$. Comme les probabilités d'échec à chaque tour sont indépendantes les unes des autres, pour connaître la probabilité d'échouer n fois de suite, il suffit de multiplier n fois par $\frac{19}{20}$, ce qui donne $\left(\frac{19}{20}\right)^n$.
2. La probabilité p qu'il touche au moins une fois sa cible en n tirs est complémentaire de la probabilité $\bar{p}$ qu'il la rate n fois. Or, $\bar{p} = \left(\frac{19}{20}\right)^n$ d'après la question précédente. La résolution de $p \geq \frac{3}{4}$ s'ensuit :

$$p \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - \bar{p} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \bar{p} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{19}{20}\right)^n \leq \frac{1}{4}.$$

Comme le logarithme est croissant (strictement), le sens de l'inégalité ne change pas quand on considère les images de chaque membre par le logarithme :

$$\left(\frac{19}{20}\right)^n \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{19}{20}\right)^n\right) \leq \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{19}{20}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

L'intérêt du logarithme était d'utiliser ses propriétés pour faire « descendre le n de l'exposant », pour que cette inégalité se ramène à une inégalité simple avec un terme linéaire. Maintenant, on sait résoudre :

$$n\ln\left(\frac{19}{20}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow n \overset{[\ln\left(\frac{19}{20}\right)<0]}{\geq} \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{19}{20}\right)} \simeq 27{,}02$$

C'est donc au bout de 28 tours que la probabilité de toucher au moins une fois sa cible dépasse $\frac{3}{4}$.
3. La probabilité que Galois rate ses n tirs est égale à $\left(\frac{19}{20}\right)^n$ d'après la première question de l'exercice, tandis que la probabilité que son adversaire rate les $n-1$ premiers tirs puis réussisse son n^{e} tir est de $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3}$; le nombre $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ s'obtient par le même raisonnement que dans la première question, et $\frac{2}{3}$ est la probabilité de succès lors du tir du n^{e} tour. Comme les deux évènements ici sont indépendants, pour connaître la probabilité qu'ils se produisent simultanément, il suffit de faire le produit des deux probabilités calculées ci-avant. D'où le résultat annoncé dans l'énoncé.

Notons P_n la probabilité calculée ci-dessus. Au bout de deux tours, la probabilité que Galois perde son duel est égale à $P_1 + P_2$, c'est-à-dire $\left(\frac{19}{20}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{19}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \frac{2}{3} \simeq 0{,}83$.
Remarque. La probabilité que Galois perde son duel en au plus n tours est $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ (c'est la réunion des probabilités qu'il perde au n^{e} tour). Or,

$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 + \cdots + P_n &= \left(\frac{19}{20}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{19}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \frac{2}{3} + \cdots + \left(\frac{19}{20}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{19}{20} \cdot \frac{2}{3} \left(\left(\frac{19}{20} \cdot \frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{19}{20} \cdot \frac{1}{3}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{19}{20} \cdot \frac{1}{3}\right)^{n-1} \right) \\
&= \frac{38}{60} \cdot \frac{1 - \left(\frac{19}{60}\right)^n}{1 - \frac{19}{60}} = \frac{38}{41} \left(1 - \left(\frac{19}{60}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire quand on calcule la probabilité que Galois perde « tout court », cette somme égale $\frac{38}{41}$ car $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{19}{60}\right)^n = 0$. Donc la probabilité que Galois meure est d'environ 93%.