et minorée (par 0), et converge. Soit l sa limite. D'après ce qu'on a dit ci-dessus, comme le sinus est une fonction continue, on doit avoir $l = \sin(l)$, ce qui ne se produit que pour $l = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

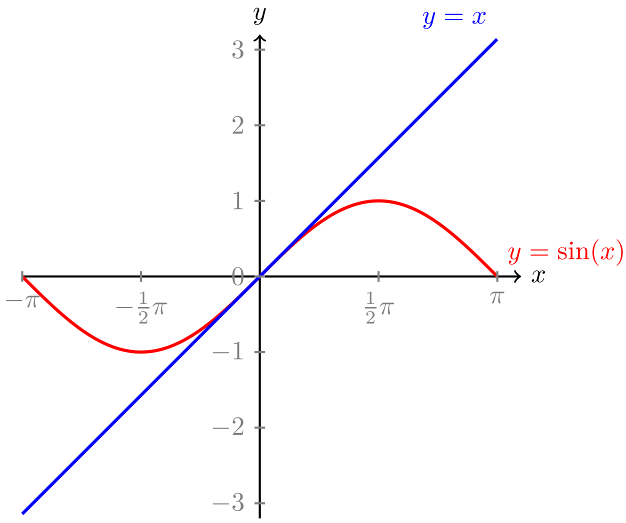


FIGURE 2.15 – Comparaison entre $y = x$ et $x \mapsto \sin(x)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet notamment d'assurer qu'une solution à une certaine équation existe. Par exemple, si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue, alors l'étude de la fonction continue $g : [0,1] \to [0,1]$ définie par $g(x) = f(x) - x$ montre que $f(x) = x$ a toujours une solution ; c'est l'objet d'un exercice du cours. On a aussi utilisé le théorème des valeurs intermédiaires pour assurer que l'équation $y = \exp(x)$ a toujours une solution pour $y > 0$, ce qui nous a permis de définir le logarithme naturel dans le chapitre précédent. C'est, en fait, le cas particulier d'un résultat plus général :

Corollaire 2.23 (Fonction réciproque) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone sur I. Alors,*

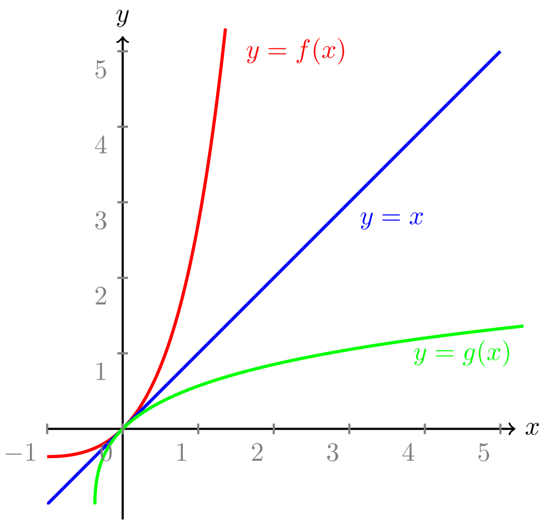
- *la fonction f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ et sa bijection réciproque $g : J \to I$ a le même sens de monotonie que celui de f. Dans un repère orthonormé du plan, les représentations graphiques de f et g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$;*
- *si de plus f est continue sur I alors J est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I et g est continue sur J.*

On ne démontrera rien de tout cela, on se contentera de l'admirer sur la figure 2.16.

2.1.4 Dérivées et tangentes

Mais l'étude d'une fonction ne se résume pas à son comportement limite : pour maintes études de phénomènes physiques, où la fonction à étudier représente une population, une vitesse, une température, *etc.*, ses variations sont au

FIGURE 2.16 – La fonction $f : x \mapsto x \cdot \exp(x)$ sur $]-1, +\infty[$ et sa réciproque.



moins tout aussi importantes que son comportement asymptotique, si ce n'est davantage. Il serait bon d'avoir une méthode, étant donnée une fonction f, pour obtenir ses variations par le pur calcul ; c'est la dérivation qui va nous permettre de déterminer ces variations, en étudiant le *signe* d'une fonction liée à f.

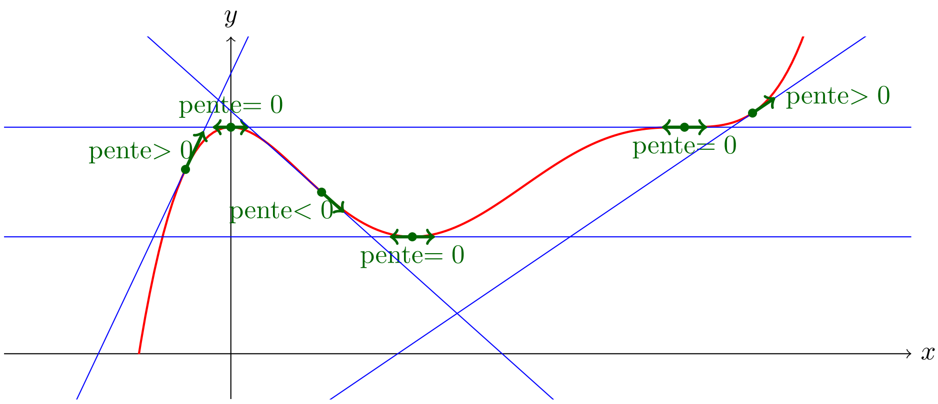


FIGURE 2.17 – Lien entre tangentes et variations.

Pour comprendre comment on définit la dérivée d'une fonction f, remarquons tout d'abord, figure 2.17 à l'appui, que les variations de la fonction autour d'un point semblent être données par la pente de la tangente à la courbe de f en ce point d'étude : si la tangente est « dirigée vers le haut », c'est-à-dire si sa pente est strictement positive, alors la fonction croît au voisinage de ce point. Si, par contre, elle est « dirigée vers le bas », c'est-à-dire si sa pente est strictement négative, alors la fonction décroît au voisinage de ce point. On ne peut pas conclure au sujet des variations de la fonction si la tangente est horizontale, mais on peut tout de même remarquer qu'en les maximums et minimums de la fonction, la pente est nulle. On voit donc que le signe de la pente de la tangente fournit des informations cruciales sur les variations de la fonction, et on doit donc trouver une méthode pratique pour exprimer *la pente de la tangente à la courbe de f en un point.*

Pour y parvenir, voici ce que ferait Batman : on ne sait pas calculer la pente de la tangente à la courbe de f en un point a, mais on sait calculer la pente de toutes les autres droites passant par $f(a)$: en effet, comme elles ne sont pas tangentes à la courbe de f, elles la coupent en au moins un autre point, et quand on connaît deux points sur une droite, on sait trouver son équation. En prenant des droites de plus en plus proches de la tangente étudiée jusqu'à se confondre avec elle, les pentes de ces droites devraient logiquement tendre vers celle de la tangente.

Plus rigoureusement, imaginons qu'on cherche à calculer la pente de la tangente de la courbe de f en a (la tangente passe donc par le point de coordonnées $(a, f(a))$). Pour x un réel donné différent de a, soit D_x la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$: sa pente est facile à calculer, et égale

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On a représenté plusieurs D_x possibles sur la figure 2.18, par des droites bleues. On voit que plus x est proche de a, plus la droite D_x se rapproche de la tangente à la courbe f en a, et donc plus la pente de D_x se rapproche de celle de la tangente. Quand on prend la limite pour $x \to a$, on est en droit de penser que la pente de D_x a pour limite la pente de la tangente. C'est ce qui motive la définition suivante :

Définition 2.24 (Dérivée, fonction dérivable) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en un point $a \in D$ si la limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est finie. On note alors $f'(a)$ cette limite ; il s'agit de la pente de la tangente de f au point a.

Si, dans le raisonnement heuristique ci-dessus, on remplace x par une abscisse $a + h$, avec h qui devient de plus en plus petit, alors on peut prendre comme définition de la dérivée :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Les deux limites sont nécessairement les mêmes, on passe de l'une à l'autre en posant $x = a + h$ (donc $h = x - a$).

Remarque. On peut donc écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point a : elle a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. En effet, pour $x = a$ on obtient $y = f(a)$, donc $(a, f(a))$ appartient à cette droite. On a défini $f'(a)$ précisément pour que ce soit la pente de cette tangente, d'où sa présence devant $(x - a)$.

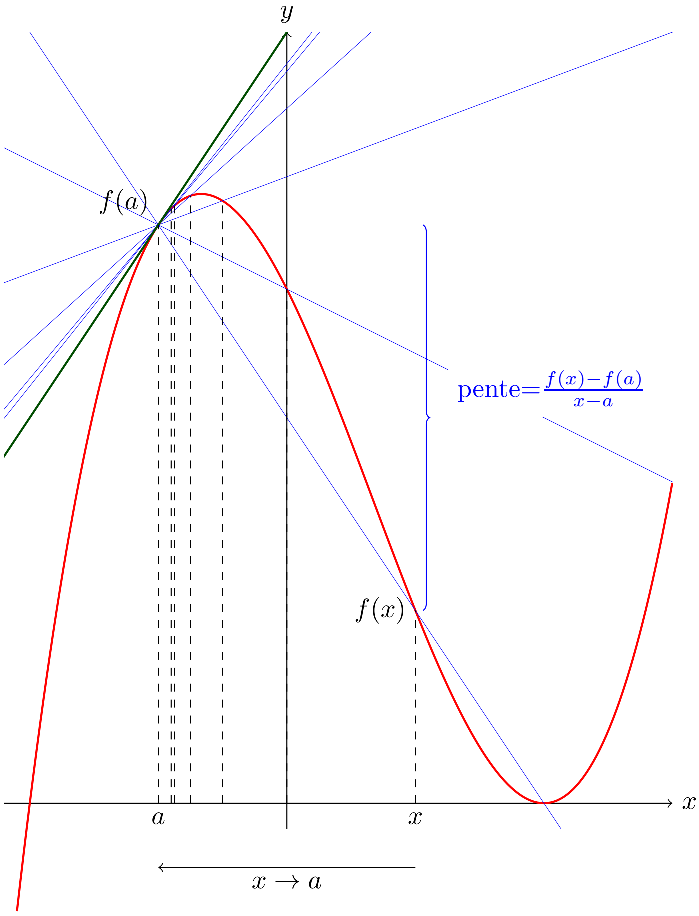


FIGURE 2.18 – Approximation de la pente de la tangente par plusieurs droites.

Définition 2.25 (Fonction dérivée) *On dit que f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I. Ceci définit sur I une fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$.*

Exemple 1. Étudions la dérivabilité des fonctions affines $x \mapsto ax + b$ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{(ax + \cancel{b}) - (ax_0 + \cancel{b})}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a,$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a,$$

donc $x \mapsto ax + b$ est dérivable en tout réel x_0, de dérivée a, qui est la pente de notre fonction affine : ce n'est pas une surprise, vue que la dérivée est la pente de la tangente en chaque point. En particulier, une fonction constante a une dérivée nulle (elles correspondent à $a = 0$).

Exemple 2. Étudions la dérivabilité de $x \mapsto x^2$ en un point $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)} = x + a,$$

donc

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a}(x + a) = 2a,$$

donc $x \mapsto x^2$ est dérivable en tout réel a, de dérivée $2a$.

Exemple 3. Étudions la dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{x}$ en un point $a \geq 0$. On a :

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{x - a}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}},$$

donc

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a = 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $x \mapsto \sqrt{x}$ est *non dérivable en 0*, et dérivable pour tout réel strictement positif a, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. On note que le fait que ce soit non dérivable en 0 se voit sur le graphe de la fonction : la tangente a une pente verticale.

Proposition 2.26 *Une fonction dérivable est continue.*

Preuve. Soit f une fonction dérivable. Montrer qu'elle est continue en un point a de son domaine de définition reviendrait à prouver que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Or,

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a),$$

et comme $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie (égale à $f'(a)$), on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \underbrace{\left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)}_{=f'(a)} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x \to a}(x - a)\right)}_{=0} + f(a) = f(a). \square$$

Proposition 2.27 *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et a un réel. Alors,*

- *(somme) si $a \in D \cap D'$, et si f et g sont dérivables en a, alors $f + g$ est dérivable en a, et*
$$(f + g)' = f' + g';$$
- *(produit) si $a \in D \cap D'$, et si f et g sont dérivables en a, alors $f \cdot g$ est dérivable en a, et*
$$(f \cdot g)' = f'g + fg'.$$
En particulier, la dérivée de af pour a réel, est af', car $a' = 0$.
- *(quotient) si $a \in D \cap D'$ et si f et g sont dérivables en a, avec de plus $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a, et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$
En particulier, si g est dérivable et $g'(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a, et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

– *(composition) si $f(D) \subseteq D'$, et si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a, et*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Autrement dit, pour dériver $g(u)$, on « dérive g comme si de rien n'était » et on multiplie par u' pour rectifier.

Grâce à ces formules, on en déduit aisément la dérivée de beaucoup de fonctions construites à l'aide de fonctions usuelles.

Exemple 1. Par exemple, comme on a déjà vu la dérivée des fonctions $x \mapsto x$ (qui est $x \mapsto 1$) et $x \mapsto x^2$ (qui est $x \mapsto 2x$), on en déduit par produit que $x \mapsto x^3$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$. Plus généralement, les fonctions du type $x \mapsto x^a$ avec a réel ont des dérivées bien connues, qui méritent d'être données dans la proposition suivante :

Proposition 2.28 *Pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto n \cdot x^{n-1}$. Pour tout réel α, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.*

La dichotomie dans l'énoncé de la proposition est importante, même si on a l'impression de dire la même chose deux fois : les premières fonctions citées s'obtiennent simplement en multipliant x (un réel quelconque) par lui-même n fois, tandis que les deuxièmes fonctions se définissent, on l'a vu, à l'aide de l'exponentielle et du logarithme.

Preuve. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto 1 = 1 \cdot x^0$, on l'a établi en même temps que la dérivabilité de toutes les fonctions affines. Comme $x^{n+1} = x^n \cdot x$, ceci suggère un raisonnement par récurrence.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto n \cdot x^{n-1}$ ». On vient d'affirmer que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Montrons que la justesse de $\mathcal{P}_n$ entraine celle de $\mathcal{P}_{n+1}$: comme $x^{n+1} = x^n \cdot x$ pour tout x réel, on déduit de la proposition suivante que $x \mapsto x^{n+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et en notant $f(x) = x^n$ puis $g(x) = x$, on a

$$(x \mapsto x^{n+1})'(x) = (fg)'(x) = (f'g + fg')(x) \overset{[\mathcal{P}_n]}{=} n \cdot \underbrace{x^{n-1} \cdot x}_{=nx^n} + x^n = (n+1)x^n,$$

et $(n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}$ est bien de la forme voulue, donc $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$. Par récurrence, on a bien le résultat voulu pour tout n.

À présent, soit α réel. On a vu, d'une part, que pour tout $x > 0$, on a la définition $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$, et d'autre part un passé lointain nous a révélé les dérivées de exp et ln. Sachant cela et la formule de composition des dérivées, on en déduit que $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur le domaine de définition de $\alpha \cdot \ln$ (c'est-à-dire $\mathbb{R}_+^*$), de dérivée $(\exp' \circ (\alpha \cdot \ln)) \cdot (\alpha \cdot \ln)'$. Comme $\exp' = \exp$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} (x \mapsto x^\alpha)'(x) &= \exp(\alpha \ln(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{\exp(\ln(x))} \\ &= \alpha \cdot x^{\alpha-1}. \square \end{aligned}$$

Exemple 2. La dérivée des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ se déduit de celles des fonctions de la proposition, grâce à la dérivabilité des quotients de fonctions dérivables, et vaut $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$ sur $\mathbb{R}^*$. Comme $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et $\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$, on constate que finalement, la formule de la proposition vaut pour tout entier n relatif.

Exemple 3. La fonction $x \mapsto (1+x^2)^7$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée des fonctions $x \mapsto x^7$ et $x \mapsto 1+x^2$ qui sont toutes les deux dérivables (sur $\mathbb{R}$), et sa dérivée égale $x \mapsto 7(1+x^2)^6 \cdot 2x$: j'ai dérivée $x \mapsto (1+x^2)^7$ « comme $x \mapsto x^7$ » (dont la dérivée est $7x^6$, donc dans cet exemple j'obtiens déjà $7(1+x^2)^6$), et pour rectifier je dois multiplier par la dérivée de $x \mapsto 1+x^2$, qui est $2x$.

La dérivée se comporte terriblement bien par toutes les opérations, puisqu'on sait également calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction dont je connais la dérivée.

Proposition 2.29 (Fonction réciproque) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in I$, telle que sa réciproque $g : J \to I$ existe. On suppose que f' ne s'annule pas. Alors la fonction réciproque g est dérivable sur J, et pour tout $a \in J$:*

$$g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))}.$$

Preuve. Pour s'assurer que g est dérivable en un point $a \in J$, on doit démontrer que $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Or, le changement de variable $u = g(x)$ donne :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} &= \lim_{u \to g(a)} \frac{u-g(a)}{f(u)-a} \\ &= \lim_{u \to g(a)} \frac{u-g(a)}{f(u)-f(g(a))} \\ &= \frac{1}{f'(g(a))}. \square \end{aligned}$$

C'est ainsi qu'on avait calculé la dérivée de ln, quand on l'avait définie en tant que réciproque de exp. Si on ne se souvient plus de cette expression qui peut paraître compliquée, voici comment la retrouver : on écrit que $f(g(x)) = x$. La formule de dérivation d'une composition dit que la dérivée de $f \circ g$ est $(f' \circ g) \cdot g'$, et de plus la dérivée de $x \mapsto x$ est 1. Donc, en dérivant les deux membres de l'égalité $f(g(x)) = x$, on obtient

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1,$$

ce qui permet de retrouver la formule donnée dans la proposition précédente.

Exemple 1. On va retrouver la dérivée de la fonction racine carrée, et plus généralement de la fonction racine n-ième pour tout entier naturel $n \geq 2$ (qui existe sur $\mathbb{R}^*$ si n est impair, sur $\mathbb{R}_+^*$ si n est pair). Étant donné que $(\sqrt[n]{x})^n = x$, dériver cette égalité donne $n(\sqrt[n]{x})^{n-1} \cdot \sqrt[n]{x}' = 1$, donc

$$\sqrt[n]{x}' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

On retrouve bien les dérivées prédites par la proposition 2.28 : comme $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, la proposition en question nous dit que sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ égale $\frac{1}{n}x^{1/n-1}$, et c'est exactement ce qu'on a retrouvé ici : $\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{-(n-1)/n} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$. Toutefois, ici, on a gagné le fait que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ si n est impair, alors que la proposition 2.28 ne nous informait que sur $\mathbb{R}_+^*$ (encore une fois parce que les fonctions puissances ont été définies à l'aide du logarithme).

Exemple 2. La fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1{,}1]$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, et on peut donc définir sa réciproque, notée $\arccos : [-1{,}1] \to [0, \pi]$ dans la littérature. On peut calculer précisément sa dérivée, qui est relativement simple. En effet, partant de la relation $\cos(\arccos(x)) = x$, on en déduit encore une fois que $-\sin(\arccos(x)) \cdot \arccos'(x) = 1$, puis que $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}$. On ne va bien sûr pas se satisfaire de cette expression peu éclairante, qu'on peut heureusement modifier : comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on en déduit que $\sin(\arccos(x))^2 = 1 - \cos(\arccos(x))^2 = 1 - x^2$. Le sinus étant positif sur $[0, \pi]$ (la vie est bien faite, même si ce n'est pas du tout une coïncidence), on a même $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$. Finalement,

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

On peut calculer de la même manière les dérivées des réciproques du cos sur les autres intervalles où elle est strictement monotone, c'est un exercice intéressant.

En bref, pour savoir dériver une fonction obtenue à l'aide d'opérations élémentaires et réciproques entre fonctions classiques, il suffit de savoir dériver ces fonctions classiques. Le tableau suivant fournit l'essentiel des fonctions à connaître, et à partir de ce tableau, toutes les fonctions se dérivent toutes seules.

fonction	domaine de dérivabilité	dérivée
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
exp	$\mathbb{R}$	exp
ln	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
cos	$\mathbb{R}$	$-\sin$
sin	$\mathbb{R}$	cos

2.1.5 Tableaux de variations

Comme je l'ai annoncé en introduction, la dérivée d'une fonction est précisément la pente des tangentes de la courbe de la fonction étudiée. Le signe de la pente donne le sens de croissance de la fonction, puisque l'intuition semble indiquer que la fonction suit la direction donnée par la tangente en chaque point. Cette intuition, même si elle n'est pas complètement évidente, est bien vraie, et la confirmer est un des grands succès historiques du calcul infinitésimal.

Proposition 2.30 *Soit f une fonction dérivable en un point a. Alors,*
- *Si $f'(a) > 0$, alors f est strictement croissante dans un voisinage de a ;*
- *Si $f'(a) < 0$, alors f est strictement croissante dans un voisinage de a ;*
- *Si f atteint un maximum ou un minimum local, alors $f'(a) = 0$.*

Pour l'instant, les informations sont seulement « autour d'un point », mais une conséquence directe de la proposition est le corollaire suivant, qui donne la monotonie d'une fonction sur tout un intervalle.

J'attire l'attention sur le fait que le dernier point de la proposition est d'une toute autre nature : on n'a pas donné d'information sur le cas où f' s'annule en a, parce qu'on ne sait rien dire dans ce cas ! Les figures 2.17 et 2.23 (plus loin) montrent bien que ces points, où la tangente est horizontale, ne concernent pas nécessairement des extremums ; ce qui est assez logique, au fond. En vérité, on a besoin d'en savoir plus sur la dérivée de la dérivée (donc la dérivée seconde) pour décider du comportement de la fonction autour d'un point d'annulation de la dérivée, mais je ne m'en soucierai pas dans ce cours. Toutefois, on sait que les extremums de la fonctions sont à chercher *parmi* les points où la dérivée s'annule.

Corollaire 2.31 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,*
- *Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I ;*
- *Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I ;*
- *Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.*

Ce corollaire est formidable, car il s'avère qu'on sait effectivement calculer la dérivée d'une fonction dans beaucoup de cas ! Alors, l'étude de son signe, et simplement de son signe, permet de connaître les variations de la fonction. Cette fois-ci, l'annulation de la dérivée donne une information franche : on avait vu qu'une fonction constante admet une dérivée nulle ; ce sont en fait les seules fonctions dont la dérivée est nulle partout.

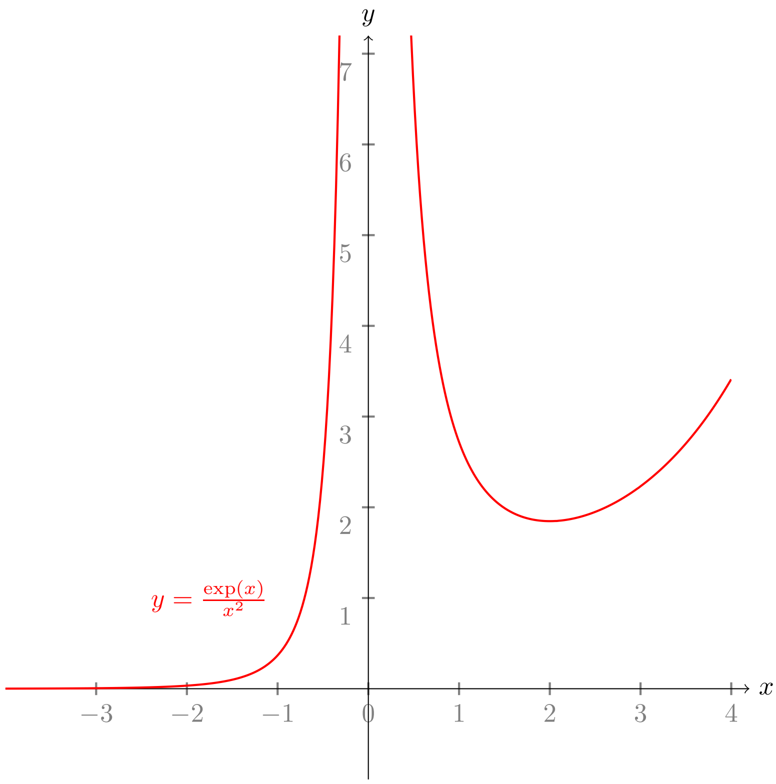
Exemple 1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\exp(x)}{x^2} \end{cases}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que fonction de deux fonctions dérivables, et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{\exp(x)x^2 - \exp(x) \cdot 2x}{x^4} = \exp(x) \cdot x \cdot \frac{x-2}{x^4}.$$

On a vu que le signe de f' donne le sens de variations de f. Comme $\exp(x) > 0$ et $x^4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, seul le signe de $x(x-2)$ importe. D'où le tableau suivant, qui résume tout :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{\exp(2)}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 2.19 – Graphe de $f(x) = \frac{\exp(x)}{x^2}$.



Le graphe de la fonction est tracé sur la figure 2.19.

Exemple 2. Les études de variations permettent de dénicher de nouvelles inégalités vérifiées par nos fonctions préférées : la manœuvre consiste, si on veut démontrer une inégalité du type $f(x) \leq g(x)$ vérifiée sur un certain intervalle I (ou une réunion d'intervalles), à étudier la fonction $g-f$. Si elle est dérivable, on fait son tableau de variation, et on en déduit son minimum. S'il est positif, ceci prouve que $g - f \geq 0$, donc $g \geq f$. Illustrons cette méthode sur un exemple : je veux démontrer que $\exp(x) \geq 1 + x$ pour tout x réel. Pour ceci, je pose $h(x) = \exp(x) - (1 + x)$ pour x réel. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

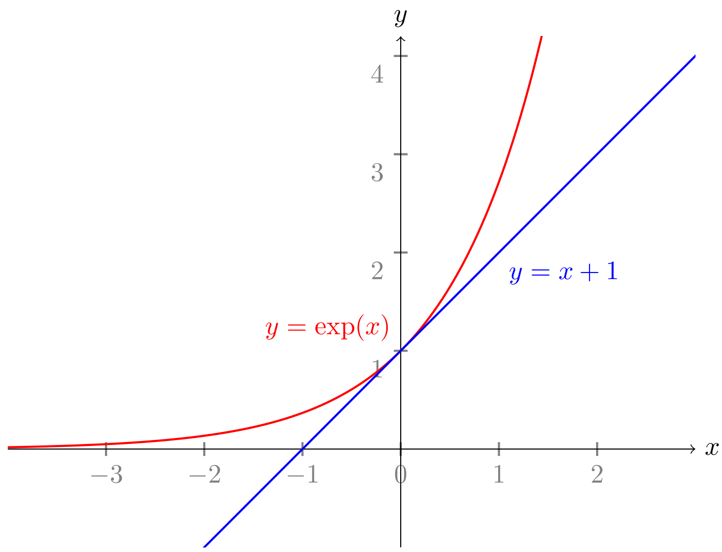
$$h'(x) = \exp(x) - (0 + 1) = \exp(x) - 1.$$

Son signe est simple à étudier : $h'(x) \geq 0$ si, et seulement si $\exp(x) \geq 1$, si et seulement si $x \geq 0$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On voit sur ce tableau que $h(x) \geq 0$ pour tout x réel, donc $\exp(x) \geq 1 + x$: c'est bien ce que j'avais annoncé. On constate d'ailleurs que l'inégalité est stricte dès que x est non nul.

FIGURE 2.20 – Illustration de l'inégalité $\exp(x) \geq 1 + x$.



Exemple 3. On n'a pas encore utilisé un point pourtant essentiel du dernier corollaire : si $f' = 0$, alors f est constante. On peut utiliser ce constat pour déduire des identités entre fonctions. Par exemple, si on veut montrer une égalité du type $f(x) = g(x)$ pour certains x d'un intervalle I (ou d'une réunion d'intervalles), on étudie $f - g$, et on montre que sa dérivée est nulle partout. Alors, $f - g$ est une constante, et si on sait montrer grâce à un point particulier que $f - g$ égale 0, alors $f = g$. Cet exemple et le suivant sont là pour illustrer cette méthode, je vais tout d'abord redémontrer la formule $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, valable pour tous x et y strictement positifs. Pour cela, je fixe $y > 0$, et je pose $h(x) = \ln(xy) - (\ln(x) + \ln(y))$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

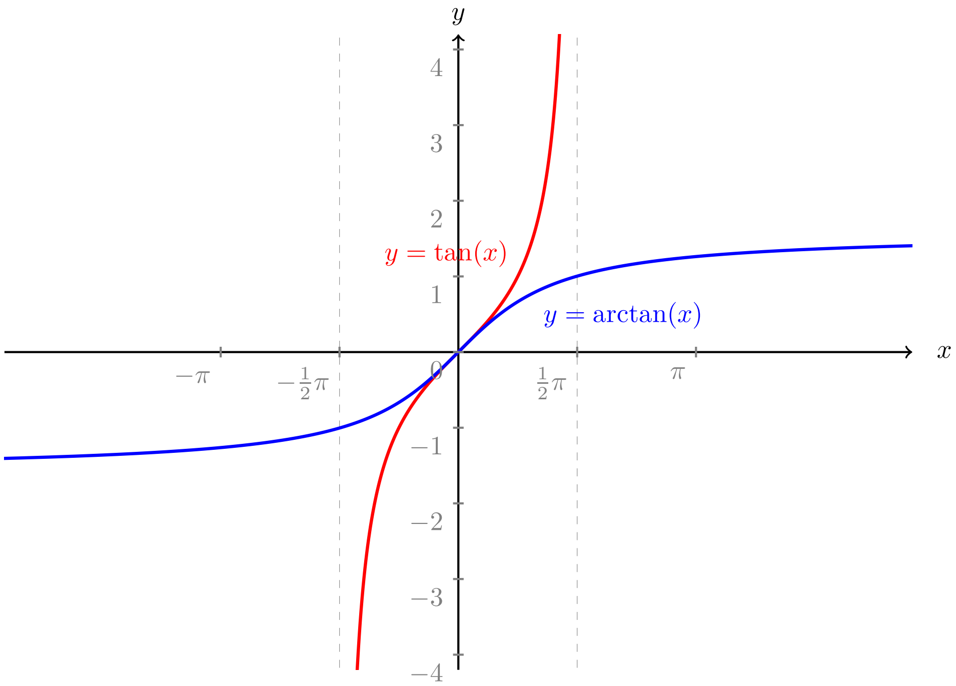
$$h'(x) = \frac{1}{xy} \cdot y - \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0,$$

donc h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale à $h(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0$. On en déduit que $\ln(xy) - (\ln(x) + \ln(y)) = 0$ pour tout $x > 0$, d'où le résultat voulu.

Exemple 4. Voici un exemple plus élaboré : la fonction tan : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante et admet une fonction réciproque $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ que l'usage nomme arctan. Son graphe est sur la figure 2.21. Je vais démontrer que pour tout x non nul :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

FIGURE 2.21 – Graphes de tan et arctan.



Soit $h(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}$. Pour savoir dériver h, je dois savoir dériver arctan, et on a vu comment dériver une fonction réciproque. La formule donnée démontre que

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))}.$$

Or, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$, comme on l'a déjà vu au premier chapitre, donc $\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$. On en déduit la dérivée de h :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Donc h est une fonction constante, égale à $h(1)$. De $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, on déduit $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$. Donc $h(1) = \arctan(1) + \arctan(1) - \frac{\pi}{2} = 0$, et on en déduit que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2} = 0$ pour tout x non nul.

On a ainsi vu, dans cette longue section, comment étudier en long, en large et en travers une fonction sous toutes ses coutures ; ceci permet de peindre son portrait exhaustivement. Bien sûr, la monotonie d'une fonction ne suffit pas à avoir une idée de l'allure de la fonction : on sait par exemple que même si $x \mapsto x$, exp et ln sont toutes les trois des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+$, elles ne croissent pas du tout de la même manière ! Pour se donner une meilleure idée du comportement autour de $+\infty$ même quand il n'y a pas de limite, et ne pas dessiner n'importe quoi au moment de faire un rendu de la courbe de la fonction, on introduit la notion d'*asymptotes* ; je reviens dessus très bientôt. Pour résumer, voici comment étudier une fonction dérivable en détails :

1. on détermine son domaine de définition et de dérivabilité ;
2. on calcule ses limites aux extrémités de son domaine de définition et là où elle n'est pas définie ;
3. on calcule sa dérivée, et le signe de cette dérivée nous donne les variations de la fonction, qu'on résume dans un tableau de variations qui comprend également les limites précédemment calculées ;
4. on cherche ses asymptotes éventuelles ;
5. pour avoir une meilleure de son allure, on peut calculer sa dérivée en quelques points particuliers, de sorte à pouvoir connaître localement la tête de la courbe... ce dernier point, contrairement aux quatre points, est purement cosmétique et n'est pas indispensable ;
6. faire un *très beau* dessin pour résumer la situation.

Un asymptote est une droite dont la courbe de la fonction se rapproche « indéfiniment » ; il convient de préciser rigoureusement ce que cela signifie. Pour cela, je rappelle d'abord qu'une asymptote, en tant que droite, admet une équation de deux formes possibles :

– soit elle est une droite verticale, et son équation est donc de la forme $x = c$;
– soit elle ne l'est pas (on parle alors d'asymptote oblique), et son équation est de la forme $y = ax + b$ (si $a = 0$, on parle même d'asymptote horizontale).

Une fonction admet une asymptote verticale si elle se rapproche indéfiniment d'une droite verticale ; ceci ne se produit que si cette fonction admet une limite infinie en un point fini : $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$. Comme ce cas de figure a déjà été cité précédemment, on ne va pas s'attarder là-dessus.

Demander à ce qu'une fonction f se rapproche indéfiniment d'une droite d'équation $y = ax+b$ phénomène qui n'est intéressant qu'au voisinage de l'infini, revient à demander que $f(x) - (ax + b)$ devienne infiniment petit. Autrement dit, pour dénicher des asymptotes obliques, on doit trouver des réels a et b tels que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

La difficulté consiste à trouver les a et b qui conviennent, si du moins ils existent. Un cas simple est celui où f admet une limite finie b en l'infini. Alors, d'après le laïus précédent, $y = b$ est l'équation d'une asymptote (horizontale) de f en l'infini.

Pour les trouver dans le cas général, on remarque d'abord que si a existe, alors on a nécessairement, partant de $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, la limite

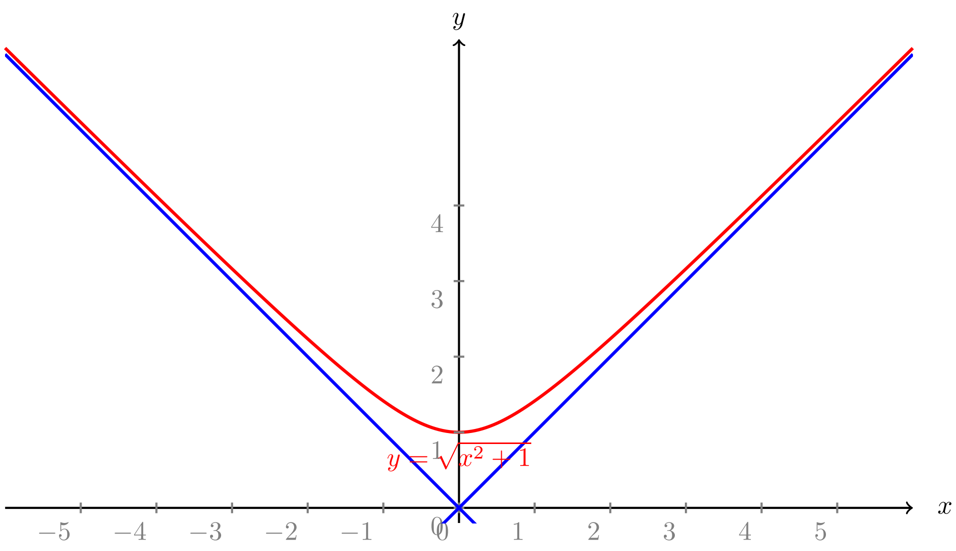
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - a = 0$: saurez-vous le démontrer ? En bref, pour trouver l'éventuel a qui doit fonctionner, on calcule $\frac{f(x)}{x}$, et s'il admet une limite finie a, alors ce a est *potentiellement* la pente de l'asymptote cherchée (à noter que ceci ne suffit pas pour avoir une asymptote, on donnera un contre-exemple plus tard !). Une fois le a potentiel trouvé, on doit déterminer b. Celui-ci s'obtient en calculant $f(x) - ax$, et en espérant trouver une limite finie b. Alors, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0,$$

et la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote de f en $\pm\infty$.

Exemple. La fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, définie pour x réel, admet deux asymptotes d'équations respectives $y = -x$ (en $-\infty$) et $y = x$ (en $+\infty$).

FIGURE 2.22 – Graphe de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.



En effet, $f(x)-x = \sqrt{x^2+1}-x = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$, ce dont on déduit que

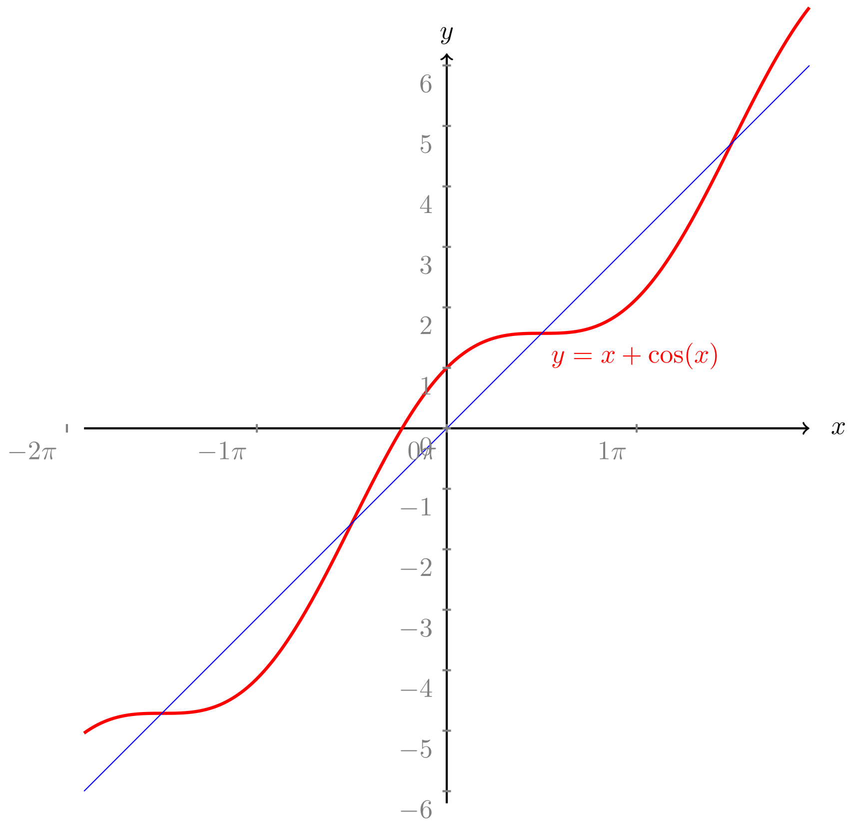
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0.$$

On procède de même pour $f(x)+x$ autour de $-\infty$, en faisant toutefois attention au fait que $\sqrt{x^2} = -x$ pour x négatif.

Contre-exemple. La fonction $f(x) = x + \cos(x)$ n'admet pas d'asymptote oblique autour de l'infini. Pourtant, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{\cos(x)}{x} = 1$. En effet, $f(x) - x = \cos(x)$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.

Vous avez dorénavant toutes les cartes en mains pour dresser de jolis tableaux de variations.

FIGURE 2.23 – Graphe de $f(x) = x + \cos(x)$.



Exemple. Soit $f(x) = x + \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)$. Cette fonction est définie là où le logarithme est bien défini ; grâce à la valeur absolue autour de $\frac{x}{x+1}$, on n'a pas à se soucier de son signe, on doit juste éviter l'annulation de ce terme. Il est nul pour $x = 0$ et n'est pas défini du tout pour $x = -1$, donc f est définie sur $]-\infty, -1[\cup]-1,0[\cup]0, +\infty[$.

De plus, elle est dérivable sur ce même intervalle, en tant que composée de fonctions dérivables : on pourrait avoir un doute à cause de la valeur absolue, et pour éviter de s'interroger sur son influence concernant la dérivabilité, il suffit de voir ce que vaut $\left|\frac{x}{x+1}\right|$ sur chaque intervalle sujet à caution. Par exemple, pour $x \in]-1,0[$, $\left|\frac{x}{x+1}\right| = -\frac{x}{x+1}$, et $x \mapsto x + \ln\left(-\frac{x}{x+1}\right)$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. De même ailleurs. La dérivée se calcule et donne sur chaque intervalle où f est définie :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1) + (x+1) - x}{x(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)}.$$

Le discriminant de la fonction polynomiale au numérateur égale -3, donc est négatif. Donc le numérateur ne change jamais de signe, et est positif plus précisément (on le voit par exemple avec sa valeur en 0). Seul le signe du dénominateur

$x(x+1)$ nous intéresse conséquemment, et donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Je vous laisse vous charger du calcul des différentes limites, le cours et les exercices devraient rendre la tâche facile.

Cette étude de variations montre déjà l'existence de deux asymptotes verticales, d'équations $x = -1$ et $x = 0$. Il existe également une asymptote d'équation $y = x$, autour de $+\infty$ et $-\infty$: en effet,

$$f(x) - x = \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = -\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) = -\ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right),$$

et cette transformation qui n'est pas indispensable nous montre que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = 0$, étant donné que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|1+\frac{1}{x}\right| = 1$. On peut donc, enfin, tracer le graphe de la fonction f, disponible sur la figure 2.24. Notons que si on n'avait pas tracé les asymptotes, on aurait sans doute été bien en peine pour avoir un tracé cohérent de la courbe de f au voisinage de l'infini.

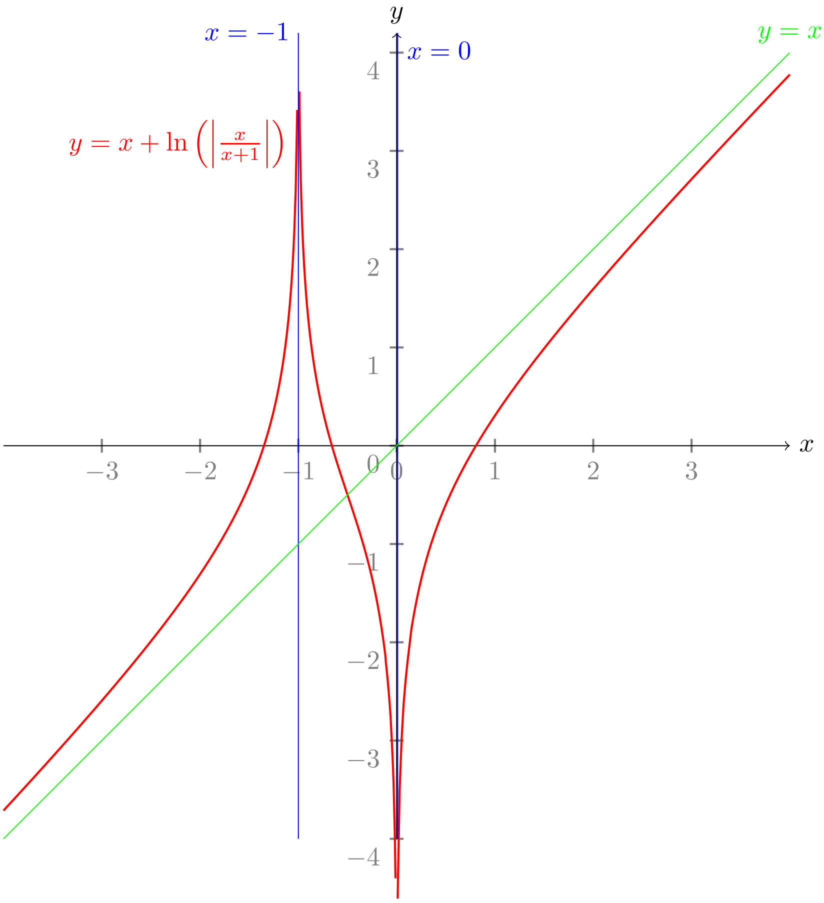
2.1.6 Calculs de limites vues comme taux d'accroissement

On a vu, dans la section sur les limites, comment lever certaines indéterminées dans les quotients $\frac{f}{g}$. Il fallait, moralement, déterminer qui de f ou de g était le « plus fort », c'est-à-dire tendait « le plus vite » vers le point limite. Hélas, la hiérarchie était certes facile à établir autour de 0 et de l'infini, mais les exemples simples de limites autour d'autres points montraient qu'on n'a pas encore tous les outils adéquats pour éliminer toutes les indéterminées, en particulier quand la limite est en un réel a différent de 0. Parfois, le changement de variable $u = x - a$ suffisait à se ramener à une situation connue, mais pas nécessairement.

Qui plus est, la hiérarchie établie était loin d'être exhaustive et ne contient pas tous les cas de figure possibles : par exemple, on ne pouvait pas l'utiliser pour savoir quelle est la limite de $\frac{\exp(x)-1}{x}$ quand x tend vers 0. Il s'avère que la notion de dérivée est bien pratique pour lever *toutes* les indéterminées qui persistaient.

Soit $\frac{f}{g}$ la fonction qui donne une limite indéterminée autour d'un réel a, et dont les méthodes précédentes ne mènent à rien ; si l'indéterminée est autour

Figure 2.24 – Graphe de la fonction $x \mapsto x + \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)$ et ses asymptotes.



de l'infini, on se ramène à une indéterminée en 0 en posant $u = \frac{1}{x}$ par exemple. Alors,

– si $g(x) = x - a$, c'est-à-dire si on a affaire à un quotient de la forme $\frac{f(x)}{x-a}$ à étudier autour de a, la présence d'indéterminée du type $\frac{0}{0}$ en a se traduit *exactement* par le fait que $f(a) = 0$. L'astuce consiste conséquemment à constater que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; cette ruse permet de reconnaître là, quand x tend vers a, la dérivée de la fonction f :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Aucune limite ne résiste à ce principe, pourvu que f soit dérivable !

– si g est une fonction plus compliquée, ce n'est pas bien grave en général : avoir une indéterminée du type $\frac{0}{0}$ se traduit toujours par le fait que $f(a) =$

0 et $g(a) = 0$ (moyennant quelques simplifications). Alors,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)},$$

et on peut encore une fois ruser pour faire apparaître la dérivée de f et g :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

sous réserve que $g(x) - g(a) \neq 0$ pour x assez près de a : c'est la règle de l'Hôpital (qui a « acheté » le nom de ce résultat).

Dans le cas d'une indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, ce raisonnement est toujours valable, mais un peu plus technique à justifier (il faut remarquer qu'une telle indéterminée est, en fait, un $\frac{0}{0}$ déguisé). Pour résumer :

Proposition 2.32 (Règle de l'Hôpital) *Soient f et g deux fonctions dérivables en un point a, tel que g' ne s'annule pas au voisinage de a (a exclu). Alors,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En effet, on peut montrer que si g' ne s'annule pas autour de a, alors la condition $g(x) - g(a) \neq 0$ est respectée : c'est une conséquence du dernier exercice du cours.

Exemple 1. Cette limite et les deux suivantes donnent des formes indéterminées, qu'on lève grâce à la dérivée :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Exemple 2. Cette fois-ci, le quotient n'est plus de la forme $x - a$, et on recourt donc à la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(0) = 0.$$

Notons que la formule de dérivée donne que $\frac{\cos(x) - 1}{x}$ admet 0 pour limite en 0. Comme l'exemple précédent montre que $\sin(x)$ est « aussi fort » que x, il est normal de trouver 0 une fois de plus ici.

Exemple 3. La règle de l'Hôpital ne couvre pas le cas des limites en l'infini. Alors, on se ramène à une limite finie en posant $u = \frac{1}{x}$, et on croise les doigts pour que la nouvelle limite soit calculable. Ici, c'est le cas :

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \overset{[u=1/x]}{=} \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

Exemple 4. Enfin, la règle de l'Hôpital peut parfois nécessiter plusieurs utilisations successives, comme c'est le cas dans l'exemple suivant, où on l'utilise d'abord avec *cos* et $x \mapsto x^2$, puis avec sin et $x \mapsto x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$