Méthodes – Topologie des espaces vectoriels normés
Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel normé est bornée

1 Est-ce borné ou non borné ? Comment savoir ?

Lorsque nous sommes sur un espace vectoriel normé de dimension finie (K^n, $\mathrm{M}_n(K)$, $K_n[X]$ essentiellement : je ne parlerai pas de la dimension infinie), chaque vecteur a des coordonnées. Comme beaucoup de choses dans cette configuration, pour montrer la propriété voulue, **il suffit de vérifier qu'elle est vraie pour chaque coordonnée**. Plus précisément :

— pour montrer qu'un ensemble est borné, vous montrez que les coordonnées de ses éléments sont toutes bornées ;

— pour montrer qu'un ensemble n'est pas borné, vous montrez qu'au moins une des coordonnées de ses éléments peut être arbitrairement grande.

La formalisation de cet argument est contenue dans l'exercice suivant.

Exercice 1. Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie, dont on note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base. Soit $X \subseteq E$ un sous-ensemble de E. Pour tout $\vec{x} \in X$, nous notons $x_1, \dots, x_n$ ses coordonnées dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ (de sorte que : $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$). Montrer :

$$X \text{ est borné } \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists r_i \in \mathbb{R},\ \forall \vec{x} \in X, \quad |x_i| \leqslant r_i.$$

C'est la formalisation du fait que « X est borné si chaque coordonnée de ses éléments est bornée ». Pour traiter cet exercice, il suffit de reprendre la démonstration de cours faite dans le cas des suites.

Ainsi, pour **conjecturer** si un ensemble est borné ou non, regardez s'il est possible de prendre une des coordonnées arbitrairement grandes (dans le cas d'un sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(K)$, les coordonnées sont les coefficients de la matrice). Si jamais les autres coordonnées « empêchent » ce phénomène, alors il est borné. Sinon, il n'est pas borné.

Pour voir ce que j'entends par le fait « d'empêcher » une coordonnée de devenir arbitrairement grande, prenons l'exemple de $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, évidemment borné (c'est la sphère unité pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$). Si l'on voulait prendre la coordonnée x arbitrairement grande, on aurait une contradiction du fait que $y^2 = 1 - x^2$ soit nécessairement positif ou nul (en tant que réel au carré).

Bien sûr, il est parfois évident que toutes les coordonnées sont bornées, et vous n'avez donc pas à passer par cette étape.

Remarque. Pour un sous-ensemble de $\mathrm{L}(E)$, il semble *a priori* plus abstrait de voir si c'est borné ou non, parce qu'un endomorphisme semble ne pas avoir de coordonnées. Il n'en est rien : pour montrer qu'un ensemble d'endomorphismes est borné, raisonnez sur leurs matrices (dans la base de votre choix) et leurs coefficients. C'est plus concret. Nous expliquons pourquoi c'est équivalent dans cet exercice :

Exercice 2. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

1. Montrer que : $\forall f \in \mathrm{L}(E)$, $\|f\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \|f(\vec{e}_i)\|_E$, définit une norme sur $\mathrm{L}(E)$.
2. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$, et soit : $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Montrer : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|f(\vec{e}_i)\|_E \leqslant \left(\max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} \|\vec{e}_k\|_E \right) \cdot \|A\|_1$, et en déduire l'existence d'une constante $K \in \mathbb{R}_+$ indépendante de f telle que : $\|f\| \leqslant K \|A\|_1$.
3. En déduire que si X est une partie de $\mathrm{L}(E)$, alors X est une partie bornée de $\mathrm{L}(E)$ si $Y = \{\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) \mid f \in X\}$ est une partie bornée de $\mathrm{M}_n(K)$ (on ne se préoccupera pas de la réciproque, qui est vraie).

1.1 Le cas le plus favorable : description explicite des éléments

Lorsque les éléments de X sont décrits par une équation vérifiée par leurs coordonnées ($x^3 + y^2 = 2$, $x - y + z = 1$, etc.), il est parfois possible de fournir une description explicite de tous ses éléments. Si ce n'est pas une égalité mais une inégalité, ce n'est pas grave : traiter le cas d'égalité (qui correspond aux « points du bord ») suffira à vous donner une idée sur le caractère borné.

Exemple 1. Si l'on considère $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $(x, y) \in X \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $y = \frac{1}{x}$. Donc :

$$X = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Lorsque nous avons une telle description, il est immédiat de juger si c'est borné ou non : cela se ramène à simplement regarder si les paramètres variables (ici $x \in \mathbb{R}^*$) sont bornés ou non. Ici, x est non borné donc X est non borné (c'est l'équation d'une hyperbole). Nous le formalisons dans l'exemple 4. → page 4

Exemple 2. Autre exemple qui incite à une analyse prudente : si l'on considère $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$, alors on démontre sans peine que $(x, y) \in X$ si et seulement si $y = \pm\sqrt[4]{1 - x^4}$. Ainsi :

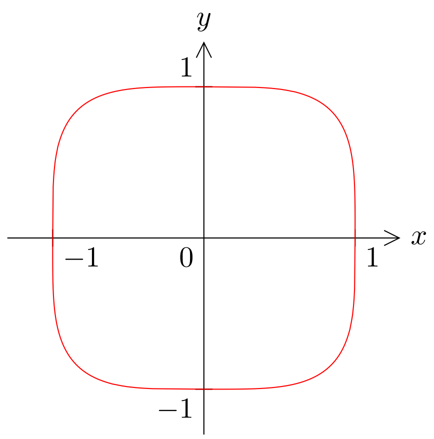
$$X = \left\{ (x, \sqrt[4]{1 - x^4}) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ (x, -\sqrt[4]{1 - x^4}) \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

qu'on peut écrire plus succinctement ainsi : $X = \left\{ (x, \varepsilon\sqrt[4]{1 - x^4}) \mid x \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in \{-1,1\} \right\}$. Si on raisonne comme ci-dessus, on pourrait penser à tort que X n'est pas borné car le paramètre variable $x \in \mathbb{R}$ parcourt $\mathbb{R}$ et est donc non borné. Mais c'est faux : pour que $\sqrt[4]{1 - x^4}$ soit correctement défini, il faut $1 - x^4 \geqslant 0$ et cette condition impose : $|x| \leqslant 1$. Donc, en vérité :

$$X = \left\{ (x, \sqrt[4]{1 - x^4}) \mid x \in [-1,1] \right\} \cup \left\{ (x, -\sqrt[4]{1 - x^4}) \mid x \in [-1,1] \right\}.$$

Là il devient manifeste qu'au contraire, X est borné. Nous le prouvons en détails dans l'exemple 3. → page 3

FIGURE 1 – Représentation de l'ensemble $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$.



Moralité : comme d'habitude, attention à bien vérifier la condition d'existence des objets en présence ! C'est ce qui vous donnera l'ensemble des valeurs possibles de x, y, etc.

Il reste ensuite à formaliser l'argument (pour l'instant nous en sommes surtout à l'analyse *a priori*), et c'est l'objet des deux prochaines sections.

2 Montrer que c'est borné

Soit X la partie dont vous voulez démontrer qu'elle est bornée. Selon les cas :

1. **Si X est une boule ou une sphère pour une certaine norme**, alors c'est immédiatement borné : vous précisez simplement pour quelle norme il s'agit d'une boule ou d'une sphère, avec quel centre et quel rayon.

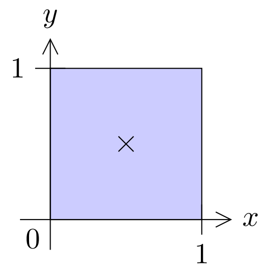
   Souvenez-vous que pour les normes usuelles, vous avez comme boules ou sphères : **les carrés, les cercles, les disques, les sphères « classiques »**. Tout cela est donc borné sans justification approfondie.

2. Sinon, **montrez que chaque coordonnée x, y, etc., des éléments de X est bornée** en partant de la description explicite de ses éléments (si vous en avez obtenu une), ou en déduisant une inégalité sur $|x|$, $|y|$, etc., à l'aide de l'équation ou inéquation qui définit l'ensemble. **Vous aurez souvent besoin du fait que les puissances paires de nombres réels soient positives**.

   Une fois que vous avez démontré que chaque coordonnée est bornée, vous en déduisez que les vecteurs $\vec{x} \in X$ sont bornés en majorant $\|\vec{x}\|_1$ par la somme des majorants trouvés.

   Vous pouvez majorer n'importe quelle norme (puisqu'en dimension finie, le fait d'être borné ne dépend pas de la norme), $\|\vec{x}\|_\infty$ par exemple, mais nous vous recommandons l'usage de $\|\cdot\|_1$ pour ne pas vous casser la tête avec la manipulation de maximums.

Identifier le centre et le rayon dans le cas d'une boule ou d'une sphère. Ne déterminez pas le centre et le rayon par des calculs savants : faites un dessin dans la mesure du possible et considérez le centre et le rayon « géométriquement intuitifs ». Par exemple, si vous devez justifier que $X = [0,1] \times [0,1]$ est borné : faites le dessin et remarquez que c'est un carré. Vous savez donc que c'est une boule (fermée) pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ensuite, vous vous demandez : pour quel centre, pour quel rayon ?



On cherche le centre « géométriquement intuitif » : il sera aussi le centre « rigoureux ». Pour comprendre pourquoi, sachez qu'*une boule ou une sphère est toujours symétrique par rapport à son centre* (exercice). Ici, le centre de symétrie est manifestement $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: on en déduit que X est une boule fermée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, centrée en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Pour le rayon il peut y avoir un doute : doit-on mesurer la distance aux sommets, ou au milieu des arêtes ? Là en revanche, vous n'avez pas d'autre choix que de faire (un peu) de calcul si vous avez un doute : calculez la norme de $\|\vec{x} - \vec{a}\|$ avec $\vec{a}$ le centre, et $\vec{x}$ *n'importe quel point de la frontière* (faites un choix qui rende le calcul facile !). Cela vous donnera le rayon. Dans l'exemple ci-dessus : $\left\|(0,0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\|_\infty = \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\|_\infty = \frac{1}{2}$. Donc le rayon est $\frac{1}{2}$, et en conclusion : $X = \mathrm{B}_f\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right)$. Ainsi X est bornée.

Exemple 3. (illustration du deuxième cas) Nous reprenons l'exemple 2. Si l'on n'utilise pas la description explicite, on note que si $(x,y) \in X$, alors du fait qu'on ait $y^4 \geqslant 0$, on a : $x^4 \leqslant x^4 + y^4 = 1$, donc en extrayant la racine quatrième on obtient : $|x| \leqslant 1$. Le même raisonnement donne : $|y| \leqslant 1$. On en déduit : ← page 2

$$\forall (x,y) \in X, \quad \|(x,y)\|_1 = |x| + |y| \leqslant 1 + 1 = 2,$$

donc tout élément de X est borné par 2 (pour $\|\cdot\|_1$), d'où le résultat.

Si l'on utilise l'expression explicite de X, on dit que tout élément de X est de la forme $(x, \pm\sqrt[4]{1-x^4})$ avec $x \in [-1,1]$. Or, pour tout $x \in [-1,1]$, on a $|x| \leqslant 1$ et $|\pm\sqrt[4]{1-x^4}| \leqslant 1$, donc tout élément de X est de norme 1 inférieure ou égale à $1+1=2$ (on conclut comme ci-dessus).

3 Montrer que ce n'est pas borné

Soit X la partie dont vous voulez démontrer qu'elle n'est pas bornée. Selon les cas :

1. **Si X est un sous-espace vectoriel non nul**, alors vous reprenez la stratégie de l'exemple 10 du cours, avec *n'importe quel* élément non nul de X (il ne coûte rien de le prendre explicite). Cela prouve facilement que X n'est pas borné.
2. Sinon, définissez une suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans X (le terme général de cette suite est un couple de réels si $X \subseteq \mathbb{R}^2$, un triplet de réels si $X \subseteq \mathbb{R}^3$, une matrice si $X \subseteq \mathrm{M}_p(K)$, etc. : adaptez-vous à la situation), **avec l'une des coordonnées égale à** n (ou n'importe quoi tant qu'elle tend vers l'infini quand $n \to +\infty$). Vous choisissez alors les autres coordonnées n'importe comment, tant qu'elles vérifient la condition pour appartenir à X.
   Disons que la coordonnée égale à n s'appelle $x_{p,n}$. Vous écrivez alors que :
   $$\|\vec{u}_n\|_1 = |x_{p,n}| + \underbrace{\cdots}_{\geqslant 0 \text{ (valeurs absolues)}} \geqslant |x_{p,n}| = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
   Ainsi il existe des éléments de normes arbitrairement grandes dans X (les $\vec{u}_n$), donc X n'est pas borné.
   Vous pouvez aussi remplacer la suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ par une fonction à valeurs dans X. Cela vous permet d'autres choix que $n \to +\infty$ (par exemple $x \to 0$). Je choisis de vous faire passer par les suites parce que calculer la limite est plus facile (un seul paramètre n, limite qui se calcule composante par composante).

Exemple 4. Nous reprenons l'exemple 1. On a montré que $X = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x \in \mathbb{R}^*\right\}$, donc pour produire une suite à valeurs dans X dont une coordonnée tend vers l'infini, il suffit de poser : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\vec{u}_n = \left(n, \frac{1}{n}\right)$. Alors, pour tout n au voisinage de $+\infty$: ← page 2

$$\|\vec{u}_n\|_1 = |n| + \left|\frac{1}{n}\right| = n + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc X n'est pas borné (là je n'ai pas fait de minoration par $|x_{p,n}|$ parce que le calcul direct de la limite est facile).

Suivant la remarque ci-dessus, vous pouvez aussi vous contenter de dire que $\left\|\left(x, \frac{1}{x}\right)\right\|_1 = x + \frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ sans passer par une suite (la fonction est $f : x \mapsto \left(x, \frac{1}{x}\right)$).

3.1 S'il y a strictement plus que deux coordonnées ($\dim(E) \geqslant 3$)

Pour l'exemple, prenons $X \subseteq \mathbb{R}^3$, de sorte que ses éléments soient des triplets (x, y, z). Si vous voulez démontrer qu'il est non borné, la stratégie reste la même : vous prenez une coordonnée égale à n (par exemple, tant qu'elle tend vers l'infini quand $n \to +\infty$), et vous bricolez les autres coordonnées de sorte à obtenir un triplet appartenant à X. Dans ce cas, ne vous compliquez pas la vie en cherchant la forme la plus générale possible d'une suite qui convient : **faites des choix de coordonnées simples** (égales à 0, à 1 si ce n'est pas possible de les prendre nulles, etc.). On peut souvent s'en sortir en ne faisant dépendre de n que **deux** variables.

Par exemple, si l'on veut démontrer que $X = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 < 1\right\}$ n'est pas borné, construisez votre suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0} = ((x_n, y_n, z_n))_{n\geqslant 0}$ en prenant d'abord $x_n = n$, et ensuite choisissez y_n et z_n de sorte que $x_n^3 + y_n^3 + z_n^3 < 1$ pour s'assurer que $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ est bien à valeurs dans X. **Simplifiez-vous la vie** en prenant par exemple $z_n = 1$ (choix qui va simplifier le 1 du membre de droite). Il reste alors à trouver y_n tel que $n^3 + y_n^3 < 0$, ou encore : $y_n < \sqrt[3]{-n^3} = -n$. Par exemple $y_n = -2n$ convient. Cette réflexion montre que si l'on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \vec{u}_n = (n, -2n, 1),$$

alors $\vec{u}_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ puisque $n^3 + (-2n)^3 + 1^3 = -7n^3 + 1 < 1$, et on a, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\|\vec{u}_n\|_1 = |n| + |-2n| + |1| = 3n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc X n'est pas borné (là je n'ai pas fait de minoration par $|x_{p,n}|$ parce que le calcul direct de la limite est facile).

Remarque sur les racines p^{e}. La racine p^{e} est définie aussi pour des réels négatifs quand p est un entier naturel IMPAIR (condition évidemment essentielle : vous savez que $\sqrt{x}$ n'existe pas si $x < 0$), puisqu'en effet l'application $x \mapsto x^p$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de sorte que les réels négatifs ont aussi un unique antécédent. Vous pouvez en avoir besoin pour définir vos suites vérifiant certaines équations, on l'a vu plus haut. Attention au fait que si p est un entier impair, et si x est négatif, alors $\sqrt[p]{x}$ est négatif aussi, et on a : $|\sqrt[p]{x}| = -\sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{-x}$.

Attention aussi au fait subtil que $x^{\frac{1}{p}}$, par contre, n'est pas défini pour $x \leqslant 0$, étant donné que c'est défini à l'aide du logarithme *via* la formule $x^{\frac{1}{p}} = e^{\frac{1}{p}\ln(x)}$. On a $x^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{x}$ seulement si $x > 0$.

Table des matières

Table des figures