MÉTHODES – Topologie des espaces vectoriels normés
Parties ouvertes, fermées, convexes

1 ✓ Montrer qu'une partie est fermée

Soit F un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E. Vous avez besoin de démontrer qu'il est un fermé, pour conserver des propriétés par passage à la limite ou utiliser le théorème des bornes atteintes. Si $F = E$, alors c'est toujours fermé. Sinon, pour le démontrer, **commencez par regarder s'il s'agit d'un carré, d'un disque ou d'un cercle** (bord inclus). Si oui, alors il s'agit d'une boule fermée ou d'une sphère pour une des normes usuelles, donc c'est un fermé. Pour la recherche des extremums en calcul différentiel, on vous placera souvent sur un carré ou un disque.

Notons que dans le document *Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel normé est bornée*, nous expliquons comment trouver le centre et le rayon d'un ensemble qu'on reconnaît comme étant une boule pour une certaine norme.

Si vous n'êtes pas dans le cas d'une boule fermée ou d'une sphère, vous avez trois méthodes (en fait la première est un cas particulier de la seconde) :

— vous écrivez F sous la forme suivante (ou comme réunion ou intersection de tels ensembles) :

$$F = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) \geqslant \alpha\}, \quad \text{ou} \quad F = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) \leqslant \alpha\}, \text{ ou } \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \alpha\} \tag{1}$$

où f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$;

— vous montrez que F est de la forme : $F = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) \in Y\}$, avec Y un fermé de l'espace d'arrivée et f une application continue ;

— vous montrez que F est stable par passage à la limite, c'est-à-dire : la limite de toute suite convergente à valeurs dans F reste dans F.

Nous en parlons davantage plus bas.

Ces méthodes sont classées de la plus restrictive à la plus générale : **la troisième méthode est supérieure**, parce qu'il s'agit d'une **définition** : TOUS les fermés la vérifient. Alors qu'il n'est pas vrai, à l'inverse, que tout fermé peut s'écrire sous la forme (1). Pour résumer : **la troisième méthode marche toujours, au contraire des deux premières**. Donc si vous avez un doute sur la méthode préférable, essayez la dernière sans hésiter.

Néanmoins, les deux premières méthodes (qui se démontrent d'ailleurs à partir de la troisième...) ne sont pas à oublier pour autant : elles ont l'avantage d'être extrêmement rapides d'emploi.

Remarque sur la dimension infinie. Au contraire des ouverts, qui deviennent particulièrement compliqués à étudier en dimension infinie (voir l'exemple 11), ici la stratégie ne change pas en dimension infinie. La continuité est par contre moins immédiate en général. Pour montrer qu'une application linéaire est continue en dimension infinie, voir *Continuité d'une application sur un espace vectoriel normé*, section *Applications linéaires : cas de la dimension infinie*.

1.1 ✓ Avec une application continue à valeurs réelles

Quelques remarques sur la 1re méthode, où l'on cherche à écrire F sous la forme indiquée dans (1) :

— vous pouvez toujours vous ramener au cas où $\alpha = 0$ (cela revient à considérer $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) - \alpha$ au lieu de f), et au cas où la fonction est minorée et non majorée (il suffit de considérer $-f$ au lieu de f) : **ne vous focalisez pas sur le α, focalisez-vous sur le fait de décrire l'appartenance à F par une inégalité large ou une égalité** ;

— remarquez qu'il faut $\vec{x} \in E$, et non $\vec{x} \in F$; sinon, une description qui marcherait pour tout ensemble, même non fermé, serait $F = \{\vec{x} \in F \mid 0 = 0\}$ (avec donc $f = 0$ qui est bien sûr continue...), ce qui est complètement creux ; écrire F sous la forme demandée revient à trouver une fonction définie sur **tout l'espace**, continue, et telle que :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \vec{x} \in F \iff f(\vec{x}) \geqslant \alpha \quad (\text{ou } f(\vec{x}) \leqslant \alpha, \text{ ou } f(\vec{x}) = \alpha),$$

et là encore, ne vous focalisez pas sur le formalisme d'écrire une fonction dans un premier temps : cherchez une (in)égalité vérifiée par $\vec{x}$, ses coordonnées, etc., en partant de la définition de F.

Dès que vous avez traduit par une égalité (ou une inégalité large) le fait d'être un élément de F, vous la réarrangez pour la mettre sous la forme $\heartsuit \geqslant 0$ ou $\heartsuit = 0$ (en particulier, vous isolez tous les termes dans le membre de gauche), et vous posez $f(\vec{x}) = \heartsuit$. Il reste à vérifier que f est continue, avec les méthodes du chapitre (section *Continuité d'une application sur un espace vectoriel normé*).

Si vous avez un doute sur « ce qu'est $\vec{x}$ », pour poser $f(\vec{x}) = \heartsuit$: $\vec{x}$ est de même nature que les éléments de E (et donc de F). Par conséquent, si E est un ensemble de fonctions, alors $\vec{x}$ est en vérité une fonction (et vous la notez plus intelligemment que $\vec{x}$: φ, f, etc.).

Exemple 1. Exemple subtil où la confusion est possible : si $E = \mathrm{C}^0([0{,}1], \mathbb{R})$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$, et si vous étudiez l'ensemble F des fonctions $f : [0{,}1] \to \mathbb{R}$ positives en 0, alors le fait d'être positive en 0 s'écrit : $f(0) \geqslant 0$ (on a bien mis le fait d'appartenir à F sous la forme $\heartsuit \geqslant 0$). La variable $\vec{x}$ est ici une **fonction**, vu que E et F sont des ensembles de **fonctions**, donc dans l'inégalité $f(0) \geqslant 0$, f est la **variable** ! On pose alors : $\forall f \in E$, $\varphi(f) = f(0)$, de sorte que :

$$\forall f \in E, \quad f \in F \iff f(0) \geqslant 0 \iff \varphi(f) \geqslant 0, \text{ donc : } F = \{f \in E \mid \varphi(f) \geqslant 0\}.$$

On vérifie alors que φ est continue car 1-lipschitzienne, ce qui démontre que F est une partie fermée de E (pour $\|\cdot\|_\infty$).

Je pense que beaucoup auraient considéré à tort l'application $x \mapsto f(x)$, au lieu de φ. Soyez vigilants sur l'ensemble des vecteurs.

1.1.1 Et si f n'est pas à valeurs réelles ?

Dans ce cas on ne peut pas décrire un ensemble avec des inégalités larges : cela ne veut rien dire. En revanche les conseils de la section précédente restent valables si vous arrivez à traduire la condition d'appartenance à F par une **égalité**. Voyons comment : si vous traduisez l'appartenance à F par une égalité de la forme :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \vec{x} \in F \iff f(\vec{x}) = \vec{\alpha},$$

alors : $F = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{\alpha}\} = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) \in \{\vec{\alpha}\}\} = f^{-1}(\{\vec{\alpha}\})$. Or le singleton $\{\vec{\alpha}\}$ est fermé (comme tout singleton : c'est une boule fermée de rayon $\vec{\alpha}$ et de rayon nul), donc F est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. On ne fait que redémontrer implicitement une généralisation du résultat au programme.

1.1.2 Et s'il y a plus d'une inégalité ou égalité ?

S'il y a plus d'une inégalité large, cela reste en général un fermé, mais vous ne pouvez pas conclure aussi rapidement. Pour cela, vous utilisez la proposition du cours selon laquelle :

- une réunion FINIE de fermés est un fermé ;
- une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Pour reconnaître une intersection, il suffit de se souvenir qu'un « ET » (en langage ordinaire) se traduit par une intersection, tandis qu'un « OU » se traduit par une réunion. C'est un principe que vous avez déjà croisé en probabilités lorsqu'il fallait décrire des évènements.

Exemple 2. Si f et g sont deux applications continues sur un espace vectoriel normé E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si : $F = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \alpha,\ g(\vec{x}) = \beta\}$, alors :

$$F = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \alpha \text{ ET } g(\vec{x}) = \beta\} = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \alpha\} \bigcap \{\vec{x} \in E \mid g(\vec{x}) = \beta\}.$$

En tant qu'intersection de deux fermés (ensembles décrits par une égalité vérifiée par une application continue), F est un fermé.

Si les ensembles sont décrits mathématiquement et non en langage ordinaire, avec les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ », c'est au fond la même chose : les conditions faisant intervenir « $\forall$ » se traduisent par une intersection et celles avec « $\exists$ » se traduisent par une intersection. Cela tient au fait que propositions formulées avec « $\forall$ » pourraient s'écrire en langage ordinaire avec des « ET » (et de même avec « $\exists$ »). En effet, si l'on a par exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \geqslant 0$, cela signifie que : $f_0(x) \geqslant 0$ ET $f_1(x) \geqslant 0$ ET $f_2(x) \geqslant 0$, etc. En revanche : $\exists n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \geqslant 0$, signifierait qu'au moins un n vérifie la condition $f_n(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire : $f_0(x) \geqslant 0$ OU $f_1(x) \geqslant 0$ OU $f_2(x) \geqslant 0$, etc. En bref :

Présence de	$\forall$	ou	ET	:	penser à $\bigcap$
Présence de	$\exists$	ou	OU	:	penser à $\bigcup$

Exemple 3. Soient $P_1, \dots, P_n$ des polynômes à coefficients réels. L'ensemble :

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in [\![1, n]\!],\ P_k(x) = 0\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}$, puisque :

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} \{x \in \mathbb{R} \mid P_k(x) = 0\},$$

et tous les ensembles de cette réunion sont fermés puisqu'il s'agit d'ensembles décrits par une égalité vérifiée par une application continue (en effet une application polynomiale est continue), et une réunion *finie* de fermés est un fermé.

Exemple 4. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle$ un espace préhilbertien réel, et soit $G \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. L'ensemble : $G = F^{\perp}$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|_2)$ (on doit préciser la norme utilisée puisqu'on n'est pas en dimension finie *a priori*). En effet :

$$G = \{\vec{x} \in E \mid \forall \vec{y} \in F,\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0\} = \bigcap_{\vec{y} \in F} \{\vec{x} \in E \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0\}.$$

On sait démontrer (voir Continuité d'une application sur un espace vectoriel normé) que pour tout $\vec{y} \in F$, l'application $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ est $\|\vec{y}\|_2$-lipschitzienne donc continue. Ainsi, pour tout $\vec{y} \in F$, l'ensemble $\{\vec{x} \in E \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0\}$ est fermé puisqu'il est décrit par une égalité vérifiée par une application continue. Une intersection quelconque de fermés est fermée, donc G est fermé : d'où le résultat.

Exercice 1. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $f_{m,n}$ une fonction continue sur un espace vectoriel normé E et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Écrire $F = \{\vec{x} \in E \mid \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \in [\![0, m]\!],\ f_{m,n}(\vec{x}) \geqslant 0\}$ avec des réunions et intersections d'ensembles de la forme $F_{m,n} = \{\vec{x} \in E \mid f_{m,n}(\vec{x}) \geqslant 0\}$, et en déduire que F est fermé.

1.2 ✓ Avec la caractérisation séquentielle

Cette méthode a l'avantage de TOUJOURS marcher. Donc en cas de doute, vous pouvez oublier tout ce qui précède et revenir systématiquement à la caractérisation séquentielle.

Pour montrer que F est fermé avec cette méthode :

1. On introduit une suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans F, dont on suppose qu'elle converge vers un élément $\vec{\ell}$ de E. L'objectif est de démontrer que $\vec{\ell}$ appartient à F aussi.
2. Pour cela, on traduit le fait d'appartenir à F par des ÉGALITÉS ou des INÉGALITÉS LARGES.
3. On écrit le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n \in F$, de sorte que $\vec{u}_n$ vérifie les égalités ou inégalités en question.
4. On passe à la limite quand $n \to +\infty$ dans ces (in)égalités, et on en déduit que $\vec{\ell}$ les vérifie aussi, ce qui prouve que $\vec{\ell} \in F$. Par contre, pour s'assurer que ces passages à la limite donnent « ce qu'on pense » (à savoir : il suffit de remplacer $\vec{u}_n$ par $\vec{\ell}$), la continuité d'une ou plusieurs applications est à justifier.

Il est important que la suite introduite soit QUELCONQUE. Ne prenez pas un cas particulier !

Puisque, dans le deuxième point, on décrit F par des égalités et inégalités larges, il semble qu'on soit en train de faire la même chose qu'avec la première méthode (écrire F sous la forme de (1)). C'est vrai : c'est un simple travail de réécriture. C'est surtout si vous n'êtes pas à l'aise avec la manipulation des intersections et réunions que vous pouvez procéder ainsi.

Le document *À quoi sert la continuité ? (pour les incrédules)*, section *Pour passer à la limite « comme on pense »* complète cette méthode, et donne des exemples implicites de fermés (par exemple on y démontre implicitement que l'ensemble des polynômes ayant α pour racine double est un fermé de $\mathbb{R}_p[X]$). On y explique notamment comment définir correctement les applications dont on doit vérifier la continuité. Il FAUT la lire en complément de ce paragraphe.

1.2.1 Cas spécifique de la convergence pour $\|\cdot\|_\infty$ dans les espaces de fonctions

N'oubliez pas que dire qu'une suite de fonctions converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, signifie exactement qu'elle converge uniformément. Le fait que la convergence uniforme implique la convergence simple permet souvent de démontrer que la limite de la suite de fonctions étudiée vérifie les inégalités ou égalités qu'on veut. Traiter l'exemple 1 à la lumière de cette remarque. ← page 2

Exercice 2. Soit $E = \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'ensemble :

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant 0\}$$

est un fermé de E, à la lumière de tout ce qui a été dit ici (remarque sur le fait qu'il y ait une infinité d'inégalités à vérifier, et que la convergence pour $\|\cdot\|_\infty$ implique la convergence simple).

2 ✓ Montrer qu'une partie est ouverte

Soit U un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E. Vous avez besoin de démontrer qu'il est un ouvert, en vue de faire du calcul différentiel (ou tout simplement parce qu'on vous le demande). Si $U = E$, alors c'est toujours ouvert. Sinon, pour le démontrer, **commencez par regarder s'il s'agit d'un carré ou d'un disque** (sans le bord). Si oui, alors il s'agit d'une boule ouverte pour une des normes usuelles, donc c'est un ouvert. Pour la recherche des extremums, on vous placera souvent sur un carré ou un disque.

Notons que dans la section *Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel normé est bornée*, nous expliquons comment trouver le centre et le rayon d'un ensemble qu'on reconnaît comme étant une boule pour une certaine norme.

Si vous n'êtes pas dans le cas d'une boule ouverte, la situation la plus favorable est lorsqu'on peut mettre U sous la forme :

$$U = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) > \alpha\} \quad \text{ou} \quad U = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) < \alpha\},$$

où f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Quelques remarques sur cet énoncé :

- vous pouvez toujours vous ramener au cas où $\alpha = 0$ (cela revient à considérer $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) - \alpha$ au lieu de f), et au cas où la fonction est minorée et non majorée (il suffit de considérer $-f$ au lieu de f) : **ne vous focalisez pas sur le α, focalisez-vous sur le fait de décrire U par une inégalité stricte** ;
- remarquez qu'il faut $\vec{x} \in E$, et non $\vec{x} \in U$; sinon, une description qui marcherait pour tout ensemble, même non ouvert, serait $U = \{\vec{x} \in U \mid 1 > 0\}$ (avec donc $f = 1$), ce qui est complètement creux ; écrire U sous la forme demandée revient à trouver une fonction définie sur **tout l'espace**, continue, et telle que :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \vec{x} \in U \iff f(\vec{x}) > \alpha \quad (\text{ou } f(\vec{x}) < \alpha),$$

et là encore, ne vous focalisez pas sur le formalisme d'écrire une fonction dans un premier temps : cherchez une inégalité vérifiée par $\vec{x}$, ses coordonnées, etc., en partant de la définition de U.

Dès que vous avez trouvé une inégalité stricte qui décrit exactement les éléments de U, vous la réarrangez pour la mettre sous la forme $\heartsuit > 0$ (en particulier, vous isolez tous les termes dans le membre de gauche), et vous posez $f(\vec{x}) = \heartsuit$. Il reste à vérifier que f est continue, avec les méthodes du chapitre (section *Continuité d'une application sur un espace vectoriel normé*).

Si vous avez un doute sur « ce qu'est $\vec{x}$ », pour poser $f(\vec{x}) = \heartsuit$: $\vec{x}$ est de même nature que les éléments de E (et donc de U). Par conséquent, si E est un ensemble de polynômes, alors $\vec{x}$ est en vérité un polynôme (et vous le notez plus intelligemment que $\vec{x}$: P par exemple).

S'il y a plus d'une inégalité stricte, cela reste un ouvert : voir ci-dessous.

Si U n'est pas sous la forme ci-dessus, mais s'écrit :

$$U = \{\vec{x} \in E \mid \heartsuit \in \bigstar\}$$

alors posez : $f(\vec{x}) = \heartsuit$, et $Y = \bigstar$, de sorte que l'on reconnaisse là : $U = f^{-1}(Y)$, par définition d'une image réciproque. Il reste à vérifier que f est continue et que Y est un ouvert (songez aux ouverts de référence : boules ouvertes, intervalles ouverts). Un cas particulier fréquent est celui d'un ouvert décrit non pas par une inégalité stricte vérifiée par f, mais par un encadrement :

$$U = \{\vec{x} \in E \mid \alpha < f(\vec{x}) < \beta\} = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) \in]\alpha, \beta[\} = f^{-1}(]\alpha, \beta[),$$

et comme les intervalles ouverts sont des ouverts, il suffit de montrer que f^{-1} est continue pour conclure.

2.1 Et s'il y a plus d'une inégalité ?

S'il y a plus d'une inégalité stricte, cela reste en général un ouvert, mais vous ne pouvez pas conclure aussi rapidement. Pour cela, vous utilisez la proposition du cours selon laquelle :

- une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert ;
- une intersection FINIE d'ouverts est un ouvert.

Pour reconnaître une intersection, il suffit de se souvenir qu'un « ET » (en langage ordinaire) se traduit par une intersection, tandis qu'un « OU » se traduit par une réunion. C'est un principe que vous avez déjà croisé en probabilités lorsqu'il fallait décrire des évènements.

Exemple 5. Si f et g sont deux applications continues sur un espace vectoriel normé E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si : $U = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) > \alpha,\ g(\vec{x}) < \beta\}$, alors :

$$U = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) > \alpha \text{ ET } g(\vec{x}) < \beta\} = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) > \alpha\} \bigcap \{\vec{x} \in E \mid g(\vec{x}) < \beta\}.$$

En tant qu'intersection finie d'ouverts (ensembles décrits par une inégalité stricte vérifiée par une application continue), U est un ouvert.

Si les ensembles sont décrits mathématiquement et non en langage ordinaire, avec les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ », c'est au fond la même chose : les conditions faisant intervenir « $\forall$ » se traduisent par une intersection et celles avec « $\exists$ » se traduisent par une intersection. Cela tient au fait que propositions formulées avec « $\forall$ » pourraient s'écrire en langage ordinaire avec des « ET » (et de même avec « $\exists$ »). En effet, si l'on a par exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \geqslant 0$, cela signifie que : $f_0(x) \geqslant 0$ ET $f_1(x) \geqslant 0$ ET $f_2(x) \geqslant 0$, etc. En revanche : $\exists n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \geqslant 0$, signifierait qu'au moins un n vérifie la condition $f_n(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire : $f_0(x) \geqslant 0$ OU $f_1(x) \geqslant 0$ OU $f_2(x) \geqslant 0$, etc. En bref :

Présence de	$\forall$	ou	ET	: penser à $\bigcap$
Présence de	$\exists$	ou	OU	: penser à $\bigcup$

Exemple 6. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes à coefficients réels. L'ensemble :

$$U = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ P_n(x) > 0\}$$

est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, puisque :

$$U = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid P_n(x) > 0\},$$

et tous les ensembles de cette réunion sont ouverts puisqu'il s'agit d'ensembles décrits par une inégalité stricte vérifiée par une application continue (en effet une application polynomiale est continue), et une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

Exercice 3. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $f_{m,n}$ une fonction continue sur un espace vectoriel normé E et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Écrire $U = \{\vec{x} \in E \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in [\![0, n]\!],\ f_{m,n}(\vec{x}) > 0\}$ avec des réunions et intersections d'ensembles de la forme $U_{m,n} = \{\vec{x} \in E \mid f_{m,n}(\vec{x}) > 0\}$, et en déduire que U est ouvert.

2.2 ☢ Lorsque les conseils précédents ne marchent pas

La probabilité de tomber sur ce cas de figure est faible. Il n'y a pas de méthode générale, mais il y a une philosophie : on regarde « à quel point il faut s'écarter d'un point pour sortir de U ». Un ensemble est alors ouvert dès que cet écart est toujours non nul.

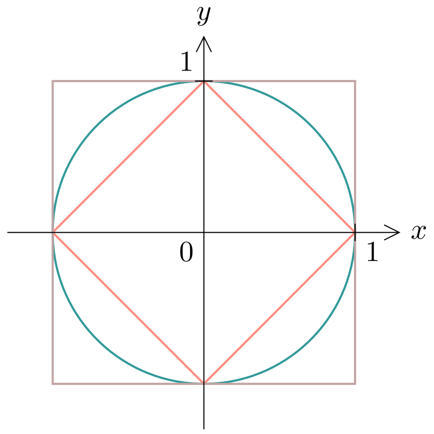
Je ne donne qu'une méthode basée sur des conjectures visuelles dans $\mathbb{R}^p$ (et partant de cette philosophie).

Pour montrer qu'un ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^p$ est ouvert :

1. **Conjecture géométrique.**
   (a) On le dessine, et on en dessine un point arbitraire, que j'appelle $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_p)$.
   (b) On regarde l'écart « horizontal » et l'écart « vertical » entre $\vec{a}$ et la frontière de U (c'est-à-dire : combien dois-je ajouter ou soustraire à l'abscisse ou l'ordonnée, si je veux atteindre la frontière de U ?). Cet écart doit être exprimé en fonction des coordonnées a_i de $\vec{a}$ (et éventuellement d'un max, d'un min...). Cela revient à chercher la longueur des côtés du plus grand carré de centre $\vec{a}$ inclus dans U.
   (c) On ne retient que le plus petit des deux écarts, et on prend alors pour ε la **moitié** de cet écart. Le dessin assure que $\mathrm{B}(\vec{a}, \varepsilon) \subseteq U$, où la boule est ici pour la norme infinie (les carrés sont des boules pour cette norme). Attention que si U a une « frontière diagonale », ce n'est pas forcément vrai et il faut éventuellement diminuer ε.
2. **Démonstration formelle.**
   (a) Pour tout $\vec{a} \in U$, vous devez montrer que $\mathrm{B}(\vec{a}, \varepsilon) \subseteq U$, c'est-à-dire : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^p,\ \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon \Rightarrow \vec{x} \in U$. Choisissez donc $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ vérifiant l'inégalité $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon$.
   (b) Nous n'avons pas précisé la norme : notons que suivant la figure 1, on a : $\mathrm{B}_1(\vec{a}, \varepsilon) \subseteq \mathrm{B}_2(\vec{a}, \varepsilon) \subseteq \mathrm{B}_\infty(\vec{a}, \varepsilon)$. Par conséquent, si votre raisonnement géométrique assurait que $\mathrm{B}_\infty(\vec{a}, \varepsilon) \subseteq U$, il devrait en être de même pour $\mathrm{B}_1(\vec{a}, \varepsilon)$ et $\mathrm{B}_2(\vec{a}, \varepsilon)$. Tout cela pour dire : **choisissez la norme qui simplifie les calculs selon le contexte, même si la conjecture géométrique fut avec la norme** $\|\cdot\|_\infty$.
   (c) **Écrivez ce que signifie concrètement le fait que** $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon$, et utilisez l'hypothèse que $\vec{a} \in U$ afin de montrer que $\vec{x}$ vérifie la condition requise pour appartenir à U. Si votre conjecture géométrique était bonne, et **si l'appartenance à U équivaut à des conditions du type $a_i > \gamma_i$, alors les coordonnées x_i de $\vec{x}$ devraient vérifier des inégalités du type** $x_i > \frac{a_i - \gamma_i}{2} + \gamma_i = \frac{a_i + \gamma_i}{2} > \gamma_i$ (le $a_i - \gamma_i$ représentant « l'écart » entre a_i et γ_i : ce qu'on devait mesurer dans la conjecture géométrique puis diviser par deux), ce qui prouve le résultat. Conclure.
   Précisez la norme ! Sinon, on ne comprendra rien à votre traduction de l'inégalité $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon$.

Exemple 7. Montrons que $U =]0, +\infty[^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On y parviendrait aisément en reconnaissant l'intersection de deux ouverts, mais je veux illustrer la stratégie ci-dessus sur un exemple plus simple que ceux que vous pourriez potentiellement rencontrer.

FIGURE 1 – Boules unités dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ (on ne colore pas l'intérieur pour ne pas alourdir la figure).



1. **Conjecture géométrique.** On dessine U, un point (a,b) dans U, et on représente l'écart de (a,b) à la frontière de U : voir figure 2.
   On voit que selon les cas, le plus petit écart à retenir (pour définir ε) est soit l'abscisse, soit l'ordonnée : en tous les cas, c'est le minimum des deux. Nous allons donc prendre $\varepsilon = \frac{\min(a,b)}{2}$ dans notre démonstration.
2. **Démonstration formelle.** Soit $(a,b) \in U$, et soit $\varepsilon = \frac{\min(a,b)}{2}$. Nous allons démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathrm{B}\left((a,b),\varepsilon\right)$, on a $(x,y) \in U$ (nous prenons la norme $\|\cdot\|_\infty$). Soit $(x,y) \in \mathrm{B}\left((a,b),\varepsilon\right)$. Pour montrer que $(x,y) \in U$, il faut prouver que $x > 0$ et $y > 0$. Or le fait que (x,y) soit dans cette boule se traduit par :

$$\begin{aligned}\|(x,y)-(a,b)\|_\infty < \varepsilon \iff \max(|x-a|,|y-b|) < \varepsilon &\iff |x-a| < \varepsilon \text{ et } |y-b| < \varepsilon \\ &\iff -\varepsilon < x-a < \varepsilon \text{ et } -\varepsilon < y-b < \varepsilon \\ &\iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \text{ et } b-\varepsilon < y < b+\varepsilon.\end{aligned}$$

   On en déduit : $x > a-\varepsilon$, $y > b-\varepsilon$. Or $\varepsilon = \frac{\min(a,b)}{2}$, donc $\varepsilon \leqslant \frac{a}{2}$ et $\varepsilon \leqslant \frac{b}{2}$, et on en déduit :

$$x > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0, \text{ et : } y > b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} > 0,$$

   donc $x \in U$. On a montré que pour ce choix de ε, tout $(x,y) \in \mathrm{B}\left((a,b),\varepsilon\right)$ appartient aussi à U, donc : $\mathrm{B}\left((a,b),\varepsilon\right) \subseteq U$.
   Puisqu'en tout élément de U, on peut trouver une boule centrée en cet élément et contenue dans U, on en déduit que U est un ouvert.

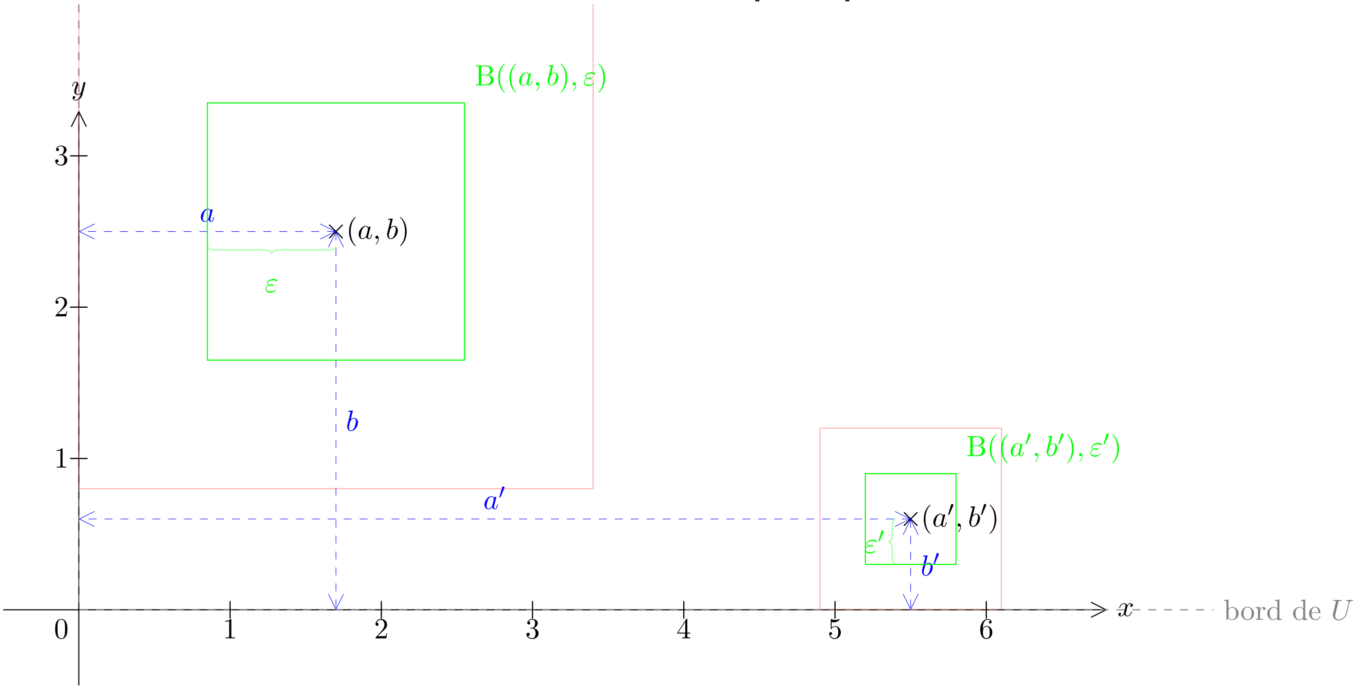
Mise en garde 1. On ne montre pas qu'un ensemble est ouvert en montrant qu'il n'est pas fermé. Ce n'est pas « soit l'un soit l'autre ». On peut être les deux à la fois (exemple : $\mathbb{R}^p$) ou aucun à la fois (exemple : $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$).

2.3 Montrer qu'une partie n'est pas ouverte : cas simples

Dans l'idée, un ensemble est ouvert dès que perturber légèrement un de ses éléments ne suffit pas pour sortir de cet ensemble (« perturber légèrement » se traduisant par : le remplacer par un élément à distance au plus ε, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{B}(\vec{x},\varepsilon)$). À l'inverse, une partie n'est pas ouverte s'il existe un élément qui sort de l'ensemble à la moindre perturbation, même infiniment petite.

Pour trouver l'élément à « perturber », et formaliser l'argument, une interprétation visuelle est préférable : on repère un point $\vec{x}$ sur la frontière de U, et on montre qu'en lui ajoutant ou soustrayant

FIGURE 2 – Démonstration que $U =]0, +\infty[^2$ est un ouvert.



convenablement $\frac{\varepsilon}{2}$ (ou à ses coordonnées, selon le sens que peut avoir cette affirmation), on obtient un élément hors de U. Comme cet élément appartient à $\mathrm{B}(\vec{x}, \varepsilon)$ (disons pour la norme infinie ; en effet, en ajoutant ou soustrayant $\frac{\varepsilon}{2}$ à ses coordonnées on obtient un élément à distance $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ de $\vec{x}$), on a montré qu'il existe un élément de $\mathrm{B}(\vec{x}, \varepsilon)$ qui n'est pas dans U, et ce pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci contredit la définition d'un ouvert.

PRÉCISEZ LA NORME ! Sinon, on ne comprendra RIEN à votre vérification d'appartenance à $\mathrm{B}(\vec{x}, \varepsilon)$. La norme infinie est souvent la plus commode dans ce contexte.

En pratique, lorsqu'un ensemble est défini par des inégalités larges, les points de la frontière sont ceux qui vérifient le cas d'égalité (dans l'exemple ci-dessous : $|x| = |y|$), et il suffit de considérer l'un d'entre d'eux pour montrer que ce n'est pas un ouvert.

Exemple 8. L'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geqslant |y|\}$ n'est pas un ouvert. Pour trouver un point de U me servant à contredire cette propriété, j'en choisis un sur sa frontière et j'ajoute ou soustrais convenablement $\frac{\varepsilon}{2}$. La figure 3 aide à faire ce choix (une infinité de choix sont possibles).

On a $(0,0) \in U$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(x, y) \in \mathrm{B}((0,0), \varepsilon)$ tel que $(x, y) \notin U$ (c'est-à-dire : qui ne vérifie pas $|x| \geqslant |y|$). Pour cela, la figure 3 incite à considérer $(x, y) = (0, \frac{\varepsilon}{2})$. On a bien $(0, \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathrm{B}((0,0), \varepsilon)$ car $\|(0, \frac{\varepsilon}{2}) - (0,0)\|_\infty = \|(0, \frac{\varepsilon}{2})\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, et pourtant $(0, \frac{\varepsilon}{2}) \notin U$ car on n'a pas $0 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

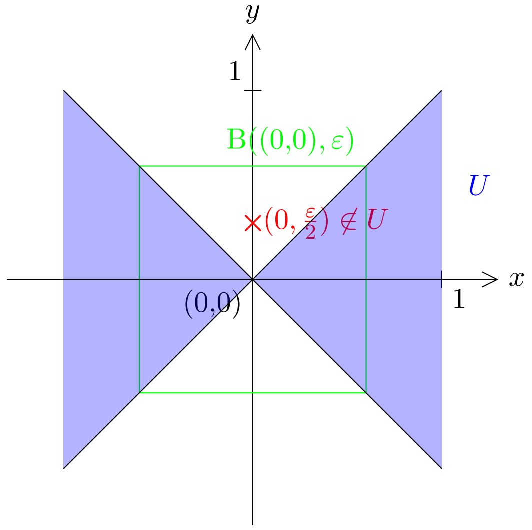
Ceci montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de $\mathrm{B}((0,0), \varepsilon)$ qui n'est pas dans U (à savoir : $(0, \frac{\varepsilon}{2})$), et donc que pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $\mathrm{B}((0,0), \varepsilon) \not\subseteq U$. Ainsi U n'est pas un ouvert.

Exemple 9. L'ensemble U des matrices NON inversibles d'ordre p n'est pas un ouvert. On a $0_{\mathrm{M}_p(K)} \in U$, et pourtant pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mathrm{B}\left(0_{\mathrm{M}_p(K)}, \varepsilon\right) \not\subseteq U$, comme nous allons le démontrer. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Considérons les boules pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a $\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{I}_p \in \mathrm{B}\left(0_{\mathrm{M}_p(K)}, \varepsilon\right)$ (en effet, on a : $\left\|\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{I}_p - 0_{\mathrm{M}_p(K)}\right\|_\infty = \|\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{I}_p\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2}$ (le plus grand de ses coefficients est trivialement $\frac{\varepsilon}{2}$), et pourtant $\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{I}_p$ est clairement inversible, donc on a $\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{I}_p \notin U$.

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de $\mathrm{B}\left(0_{\mathrm{M}_p(K)}, \varepsilon\right)$ qui n'est pas dans U, et donc que $\mathrm{B}\left(0_{\mathrm{M}_p(K)}, \varepsilon\right) \not\subseteq U$ pour tout $\varepsilon > 0$: ceci contredit le fait que U soit un ouvert.

Exemple 10. On munit $\mathbb{R}_p[X]$ de la norme infinie (c'est-à-dire : la norme d'un polynôme est le

Figure 3 – L'ensemble $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geqslant |y|\}$ n'est pas un ouvert.



maximum de ses coefficients en valeur absolue). Alors l'ensemble des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ (que j'appelle U) n'est pas un ouvert. En effet X^2 est scindé (donc $X^2 \in U$), mais pour tout $\varepsilon > 0$ le polynôme $P_\varepsilon = X^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas scindé (il n'a pas de racine réelle), donc $P_\varepsilon \notin U$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Or : $\|X^2 - P_\varepsilon\|_\infty = \|-\frac{\varepsilon}{2}\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $P_\varepsilon \in \mathrm{B}(X^2, \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

On a montré : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P_\varepsilon \in \mathrm{B}(X^2,\varepsilon)$ tel que $P_\varepsilon \notin U$. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathrm{B}(X^2, \varepsilon) \nsubseteq U,$$

ce qui contredit le fait que U soit un ouvert de $\mathbb{R}_p[X]$ (il existe un élément, à savoir X^2, qui est dans U mais pas dans son intérieur).

Exercice 4. Soit $k \in [\![0,p]\!]$. S'inspirer de cet exemple pour montrer que l'ensemble des polynômes de degré **exactement** k n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}_p[X]$.

Mise en garde 2. Cela peut aussi se vérifier en construisant une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *qui n'est pas à valeurs dans* U et telle que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \vec{x} \in U$. Cela prouve bien que peu importe la boule centrée en $\vec{x}$, il y existe des éléments hors de U (les $\vec{u}_n$: vu qu'ils se rapprochent indéfiniment de $\vec{x}$, ils finissent bien par se trouver dans la boule en question). Mais je ne veux pas développer cette façon de rédiger (la différence n'est que rédactionnelle). J'ai peur que vous mélangiez tout, surtout à cause de la ressemblance avec la caractérisation séquentielle des fermés. En combinant cette caractérisation des fermés, ce paragraphe, et une mauvaise mémoire (ou compréhension), vous en arriveriez vite à montrer qu'un ensemble est ouvert en « montrant » que toute suite convergente à valeurs dans U ne converge pas dans U. C'est faux et impossible (il y a toujours les suites constantes qui convergent sans sortir de l'ensemble).

2.4 ☢ Exemple en dimension infinie où l'on ne peut pas utiliser la continuité d'une application

La probabilité de tomber là-dessus est presque nulle. À titre exceptionnel, ici je ne donne pas de méthode mais seulement une illustration pour donner un aperçu :
- des arguments heuristiques qui mettent sur la voie ;
- de la façon de démontrer ou infirmer le résultat ;
- de la dépendance en la norme choisie.

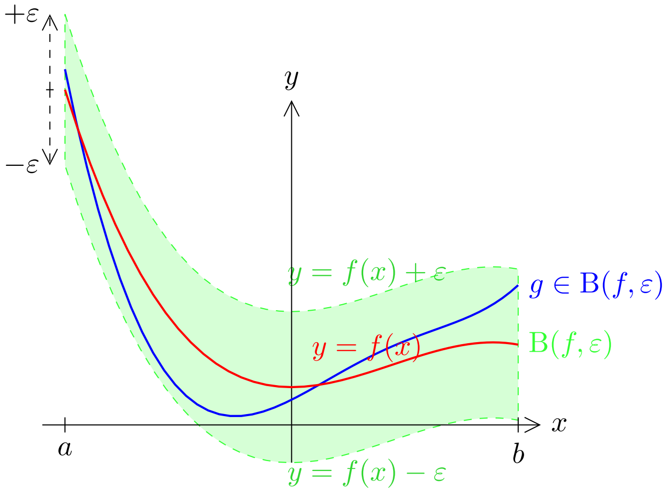
Exemple 11. Soit $E = \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Nous allons déterminer si l'ensemble suivant est ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, et pour la norme $\|\cdot\|_1$:

$$A = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1],\ f(x) > 0\}.$$

C'en est un pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On le pressent du fait de l'inégalité stricte, mais ce n'est pas suffisant. Nous allons voir qu'en fait, la méthode géométrique proposée plus haut fonctionne aussi ici, à condition ← page 6

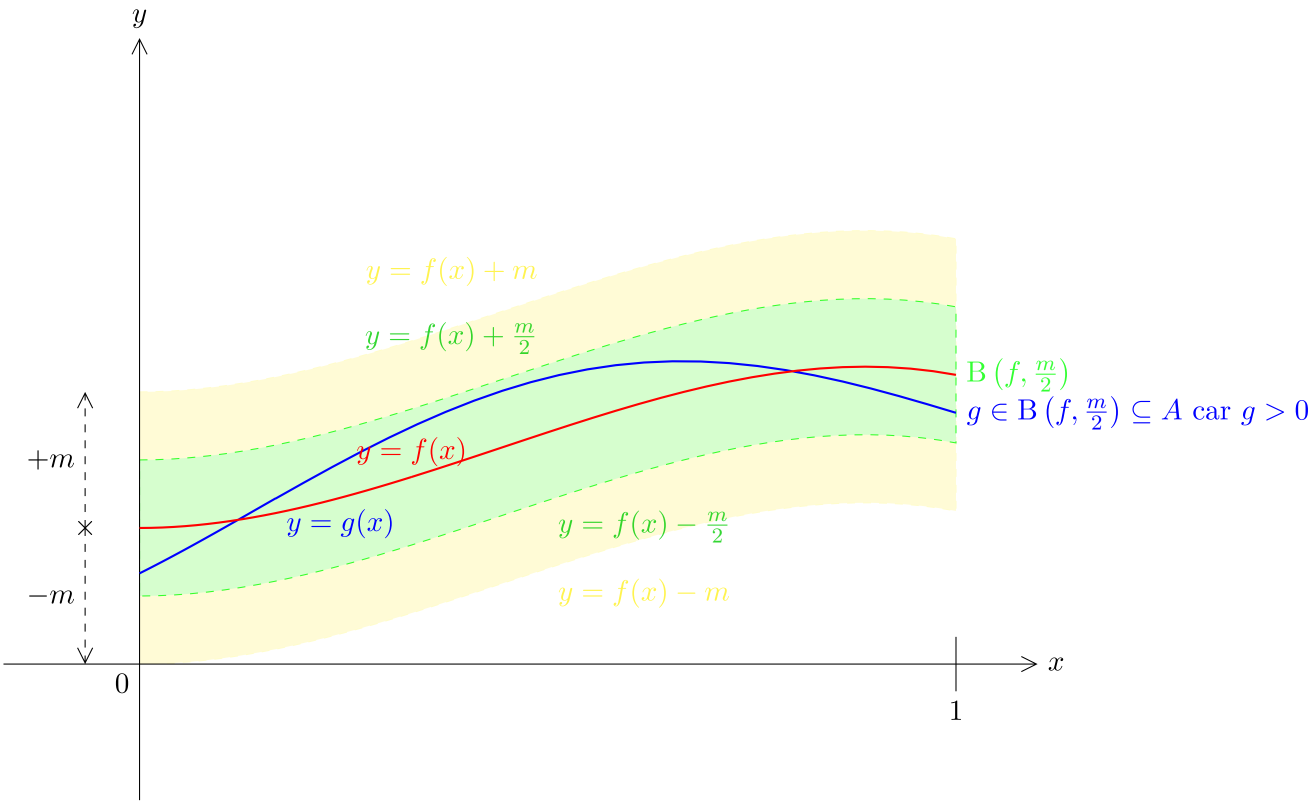
de réinterpréter ce qu'est une boule pour la norme $\|\cdot\|_\infty$: on rappelle que $g \in \mathrm{B}(f,\varepsilon)$ si et seulement si l'écart entre le graphe de f et le graphe de g n'excède jamais ε (voir figure 4).

FIGURE 4 – Boule centrée en f de rayon ε.



Conjecture géométrique. Pour trouver la valeur de $\varepsilon > 0$ telle que $g \in A$ pour tout $g \in \mathrm{B}(f,r)$, voyons sur la figure 5 que l'écart entre f et l'axe des abscisses (qu'il ne faut pas « toucher » sinon on n'a plus $g(x) > 0$) est égal à $\min(f) = m$. Il suffit donc de prendre $\varepsilon = \dfrac{m}{2}$ pour avoir $g > 0$ pour tout $g \in \mathrm{B}(f,\varepsilon)$: en effet, g ne pourra pas « descendre » davantage que la moitié de l'écart entre f et l'axe des abscisses, et en particulier g restera au-dessus dudit axe : cela assurera sa positivité et donc $g \in A$.

FIGURE 5 – Preuve que $A = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1],\ f(x) > 0\}$ est un ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$.



Démonstration formelle. Il faut d'abord justifier l'existence de ce minimum : comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = \min\limits_{[0,1]}(f)$, de sorte pour tout $x \in [0,1]$, on ait : $f(x) \geqslant f(x_0)$. Si l'on prend $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ comme annoncé, alors $\varepsilon > 0$ (car $f \in A$), et si $g \in \mathrm{B}(f, \varepsilon)$ alors on a $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$, ce qu'on traduit par :

$$\forall x \in [0,1],\ |g(x)-f(x)| < \varepsilon \iff \forall x \in [0,1],\ -\varepsilon < g(x)-f(x) < \varepsilon \iff \forall x \in [0,1],\ f(x)-\varepsilon < g(x) < f(x)+\varepsilon,$$

et particulier :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) > f(x) - \varepsilon \geqslant f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

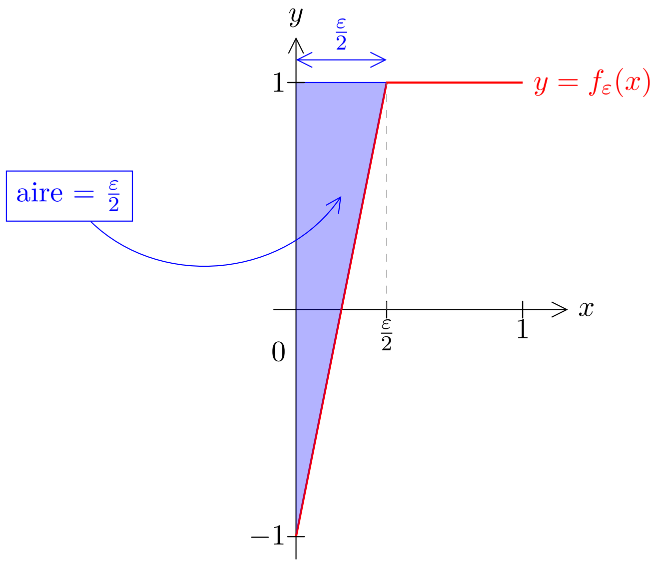
(notez que l'inégalité $g(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$ se voit sur la figure 5), donc $g > 0$ et $g \in A$, ce qui montre que $\mathrm{B}(f, \varepsilon) \subseteq A$: ainsi A est un ouvert.

Par contre A n'est pas un ouvert pour $\| \cdot \|_1$. En effet, dire que $g \in \mathrm{B}(f, \varepsilon)$, pour la norme $\| \cdot \|_1$, signifierait :

$$\int_0^1 |g - f| < \varepsilon,$$

ce qu'on traduit par le fait que l'aire (en valeur absolue) entre les courbes de f et g est petite (inférieure à ε). Dire que A est ouvert pour $\| \cdot \|_1$ signifierait donc : si f est strictement positive, alors toutes les fonctions g dont l'aire entre les courbes de f et g est petite sont aussi strictement positives. Mais c'est faux : on peut trouver des courbes arbitrairement proches de celle de f (en termes d'aires), mais qui passent sous l'axe des abscisses. On le voit sur la figure 6 dans l'exemple de la fonction f constante égale à 1 (qui est bien dans A). → page 11

Figure 6 – Graphe de f_ε.



Plus rigoureusement, nous allons montrer qu'aucune boule centrée en la fonction constante égale à 1 n'est entièrement contenue dans A (on pourrait le faire avec toute fonction $f \in A$, pour démontrer que l'intérieur de A est vide, mais ce n'est pas ma préoccupation), en explicitant à chaque fois une fonction qui y change de signe. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit f_ε la fonction dont le graphe est en figure 6, dont l'expression formelle est :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{2}{\frac{\varepsilon}{2}} x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\varepsilon}{2}\right], \\ 1 & \text{si } x \in \left[\dfrac{\varepsilon}{2}, 1\right]. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{4}{\varepsilon} x - 1 & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\varepsilon}{2}\right], \\ 1 & \text{si } x \in \left[\dfrac{\varepsilon}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

(on trouve la pente de la droite correspondant au graphe sur $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$ en calculant le taux d'accroissement).

On a clairement $f_\varepsilon \notin A$ pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $f_\varepsilon(0) = -1 \leqslant 0$. Or :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|f_\varepsilon - f\|_1 = \int_0^1 |f_\varepsilon - f| = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} |f_\varepsilon - f| + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 \underbrace{|f_\varepsilon - f|}_{=|1-1|=0} = \frac{4}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} x\mathrm{d}x = \frac{4}{\varepsilon} \times \frac{\varepsilon^2}{2 \cdot 2^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

donc $f_\varepsilon \in \mathrm{B}(1, \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci démontre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de $\mathrm{B}(1, \varepsilon)$ qui n'est pas dans A (à savoir f_ε), et donc que $\mathrm{B}(1, \varepsilon) \nsubseteq A$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci achève de démontrer que A n'est pas un ouvert de E pour $\| \cdot \|_1$. Et pourtant, A est défini par des inégalités strictes !

Nous voyons qu'en dimension *infinie*, être ouvert dépend de la norme.

Même si l'exemple est (beaucoup) plus compliqué, remarquez tout de même la ressemblance avec l'approche plus naïve (bien que ardue aussi) expliquée page 6.

Exercice 5. Adapter la fonction f_ε à toute fonction $f \in A$ pour montrer que l'intérieur de A est l'ensemble vide.

Exercice 6. En s'efforçant de raisonner aussi géométriquement que possible, à l'instar de l'exemple ci-dessus, étudier l'intérieur de l'ensemble $B = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ pour les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$.

Exercice 7. Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E, et $\vec{a} \in F$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(\vec{a}, \varepsilon) \subseteq F$ (autrement dit : $\vec{a}$ est intérieur à F).

1. Montrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe une combinaison linéaire convenable de $\vec{x}$ et de $\vec{a}$ qui appartient à $\mathrm{B}(\vec{a}, \varepsilon)$.
   Il serait une perte de temps de chercher cette combinaison linéaire à tâtons, et même si vous y parveniez vous n'en tireriez AUCUN *enseignement.* FAITES UN DESSIN *avec $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$, et représentez une boule « classique » de centre $\vec{a}$ et de rayon ε. Voyez comment obtenir un vecteur dans cette boule à l'aide de $\vec{x}$.*
2. En déduire que pour tout $\vec{x} \in E$ on a $\vec{x} \in F$.
3. En déduire que tout sous-espace vectoriel *strict* de E est d'intérieur vide.

Cette question de topologie peu évidente a été posée en 2017, filière PSI, SANS INDICATION, dans l'épreuve écrite de mathématiques... de la banque E3A. Pour être juste, c'était à quatre questions de la fin du sujet.

3 ✓ Montrer qu'une partie est convexe

Pour montrer qu'un sous-ensemble C d'un espace vectoriel normé E est convexe, d'abord regardez si vous êtes dans un de ces trois cas :

— si C est une boule (ouverte ou fermée, mais pas une sphère, attention !), alors C est convexe ;
— si C est un sous-espace vectoriel de E, alors C est convexe ;
— si C est de la forme : $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant f(x)\}$ où f est une fonction **convexe**, alors C est convexe.

Nous discutons plus bas du troisième cas, qui n'est pas du cours (et qui nécessite donc une démonstration systématique). Si vous n'êtes pas dans ces deux cas :

1. Vous prenez deux éléments $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans C. S'ils sont dans $\mathbb{R}^p$, vous donnez un nom à leurs coordonnées ((x, y) et (x', y') par exemple dans $\mathbb{R}^2$).
2. Vous introduisez $t \in [0,1]$, et vous vérifiez si vous avez $t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in C$. En général, **cela revient à démontrer que les coordonnées de $t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$ vérifient certaines inégalités qui définissent** C. Pour cela, vous commencez à les écrire clairement (par exemple : $t(x, y) + (1-t)(x', y') = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y')$, si l'on manipule des vecteurs de $\mathbb{R}^2$), vous les injectez dans les inégalités qui définissent C, vous développez et vous vérifiez si ces inégalités sont vraies.
   Vous aurez presque toujours besoin du fait que les coordonnées de $\vec{x}$ et $\vec{y}$ les vérifient, et du fait que $t + (1-t) = 1$. Y penser si vous bloquez, **en regroupant les coordonnées de $\vec{x}$, et en regroupant les coordonnées de $\vec{y}$, pour faire apparaître les inégalités qu'elles vérifient**.

Vous aurez alors démontré que tout point du segment $[\vec{x}, \vec{y}]$ est dans C, et donc que $[\vec{x}, \vec{y}] \subseteq C$. Puisque cela vaut pour tous $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans C, le résultat voulu est démontré.

Mise en garde 3. NE MAJOREZ ET MINOREZ SURTOUT PAS t ET $1-t$ DANS VOS CALCULS ! Simplifiez d'abord autant que possible la quantité en présence, et en regroupant les termes en t il apparaîtra souvent les simplifications :

$$t + (1-t) = 1, \quad \text{ou} \quad t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 = (t + (1-t))^2 = 1,$$

simplification essentielle pour en arriver aux inégalités souhaitées. Alors qu'avec les majorations ou minorations expéditives $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $0 \leqslant 1-t \leqslant 1$, vous ferez souvent apparaître des facteurs 2 que vous ne saurez pas simplifier.

3.1 Une inégalité très utile dans les démonstrations de convexité

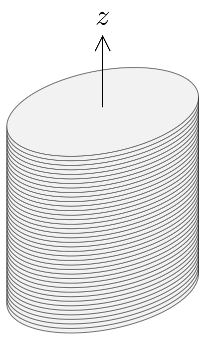
Lorsque vous avez un ensemble défini par des inégalités avec des coordonnées au carré (exemple : $x^2 - y^2 \geqslant 1$), vous aurez très souvent besoin de l'inégalité :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad 2|ab| \leqslant a^2 + b^2, \text{ équivalente à : } -a^2 - b^2 \leqslant 2ab \leqslant a^2 + b^2,$$

(on l'obtient en développant $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$), pour « séparer » x et x' dans le terme croisé $2xx'$ provenant du développement de $(tx + (1-t)x')^2$ (et de même pour $2yy'$ qui provient de $(ty + (1-t)y')^2$).

Exemple 12. Montrons que l'ensemble $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ (c'est un cylindre de rayon 1 et d'axe de révolution (Ox)) est convexe. On s'en convainc au moins visuellement (figure 7).

FIGURE 7 – L'ensemble $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est convexe.



Soient $(x,y,z) \in C$ et $(x',y',z') \in C$. Soit $t \in [0{,}1]$. Montrons que :

$$t(x,y,z) + (1-t)(x',y',z') = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y', tz + (1-t)z') \in C.$$

Pour cela, il faut vérifier qu'on a :

$$\left(tx + (1-t)x'\right)^2 + \left(ty + (1-t)y'\right)^2 \leqslant 1.$$

Développons le membre de gauche. Nous regrouperons les termes en x et y, et en x' et y', afin de profiter de ce qu'on sait sur (x,y,z) et (x',y',z') du fait d'appartenir à C (à savoir $x^2 + y^2 \leqslant 1$ et $x'^2 + y'^2 \leqslant 1$) :

$$\left(tx + (1-t)x'\right)^2 + \left(ty + (1-t)y'\right)^2 = t^2x^2 + 2t(1-t)xx' + (1-t)^2x'^2 + t^2y^2 + 2t(1-t)yy' + (1-t)^2y'^2$$

$$= \underbrace{t^2}_{\geqslant 0}\underbrace{(x^2+y^2)}_{\leqslant 1} + 2t(1-t)(xx'+yy') + \underbrace{(1-t)^2}_{\geqslant 0}\underbrace{(x'^2+y'^2)}_{\leqslant 1}$$

(comme conseillé, je regroupe les termes en x et y, et en x' et y', pour utiliser ce que je sais sur (x,y,z) et (x',y',z'))

$$\leqslant t^2 + 2t(1-t)(xx'+yy') + (1-t)^2$$

(là nous devons « séparer » x de x', y de y' ; nous allons utiliser l'inégalité $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$)

$$\leqslant t^2 + 2t(1-t)\left(\frac{1}{2}\left(x^2 + x'^2\right) + \frac{1}{2}\left(y^2 + y'^2\right)\right) + (1-t)^2$$

(nous regroupons à nouveau les termes en x et y, et en x' et y', pour utiliser ce que nous savons sur (x,y,z) et (x',y',z'))

$$\leqslant t^2 + 2t(1-t)\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + \frac{1}{2}\left(x'^2+y'^2\right)\right) + (1-t)^2$$

(comme $x^2 + y^2 \leqslant 1$ et $x'^2 + y'^2 \leqslant 1$, je peux majorer ; notez bien que $2t(1-t) \geqslant 0$ donc l'inégalité ne se renverse pas)

$$\leqslant t^2 + 2t(1-t)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + (1-t)^2$$
$$= t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 = (t + (1-t))^2 = 1,$$

donc on a bien $(tx + (1-t)x')^2 + (ty + (1-t)y')^2 \leqslant 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Comme c'est valable pour tout $(x, y, z) \in C$, tout $(x', y', z') \in C$ et tout $t \in [0{,}1]$, on en déduit que C est convexe. Remarquez bien que je n'ai JAMAIS touché aux termes en t et $1-t$ avant la fin, où je les ai regroupés pour simplifier $t + (1-t) = 1$.

3.2 Ensembles de la forme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant f(x)\}$ où f est convexe

Vous ne pouvez rencontrer cette situation que si vous vous intéressez à une partie du plan. Vous pouvez la reconnaître :

— visuellement, si C correspond à la partie du plan « au-dessus » d'une courbe ;

— par le calcul si, dans la description de C, vous parvenez à « isoler y » pour l'écrire sous la forme : $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant \bigstar\}$ (on pose alors $f(x) = \bigstar$).

Dans ce cas, pour montrer que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant f(x)\}$ est convexe :

— on introduit $t \in [0{,}1]$, $(x, y) \in C$ et $(x', y') \in C$, et on rappelle qu'on doit montrer : $t(x, y) + (1-t)(x', y') = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y') \in C$;

— on démontre si besoin que f est convexe, par exemple par la détermination du signe de f'' ; on en déduit, par **définition** d'une fonction convexe :

$$f(tx + (1-t)x') \leqslant tf(x) + (1-t)f(x') ;$$

— on conclut en disant que $f(x) \leqslant y$ (car $(x, y) \in C$) et $f(x') \leqslant y'$ (car $(x', y') \in C$), de sorte que :

$$f(tx + (1-t)x') \leqslant ty + (1-t)y',$$

ce qui démontre bien que : $t(x, y) + (1-t)(x', y') = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y') \in C$.

Ce raisonnement marche aussi si $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant f(x)\}$ avec f une fonction **concave**, du fait qu'une telle application vérifie toutes les inégalités des fonctions convexes en sens contraire : s'en convaincre.

Exemple 13. Montrons que l'ensemble : $\mathcal{H} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x^2 y \geqslant 1\}$ est convexe. Comme $x > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{H}$, on peut réécrire cet ensemble ainsi :

$$\mathcal{H} = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid y \geqslant \frac{1}{x^2}\right\}.$$

C'est bien de la forme annoncée ci-dessus, puisque $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous le montrons ci-dessous en passant.

Soient $t \in [0{,}1]$, $(x, y) \in \mathcal{H}$ et $(x', y') \in \mathcal{H}$. On veut montrer : $t(x, y) + (1-t)(x', y') \in \mathcal{H}$. Pour cela, on note que l'application $f : u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, puisqu'elle est de classe C^2 sur cet intervalle et vérifie :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(u) = \frac{6}{u^4} > 0,$$

et on en déduit, par définition de la convexité :

$$f\left(tx + (1-t)x'\right) \leqslant tf(x) + (1-t)f(x'),$$

c'est-à-dire :

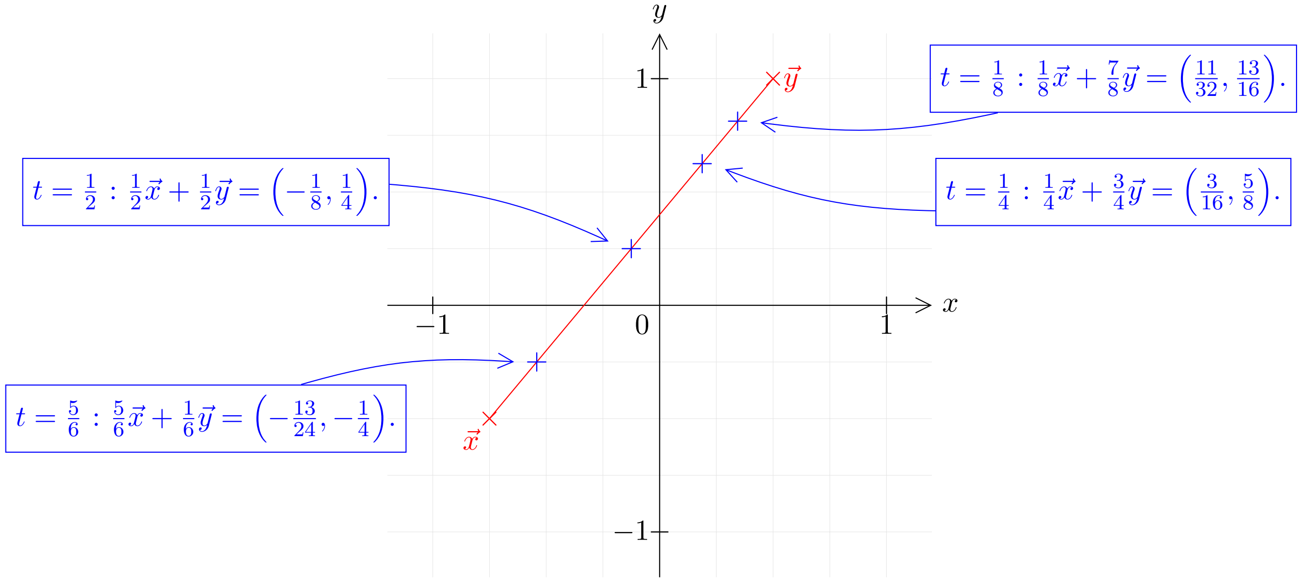
$$\frac{1}{(tx + (1-t)x')^2} \leqslant \frac{t}{x^2} + \frac{1-t}{x'^2} \leqslant ty + (1-t)y',$$

la dernière majoration découlant du fait que : $\frac{1}{x^2} \leqslant y$, et : $\frac{1}{x'^2} \leqslant y'$, par définition de $\mathcal{H}$. On a donc bien montré :

$$t(x, y) + (1-t)(x', y') = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y') \in \mathcal{H},$$

et cela vaut pour tous $t \in [0{,}1]$, $(x, y) \in \mathcal{H}$ et $(x', y') \in \mathcal{H}$, d'où le résultat : $\mathcal{H}$ est une partie convexe.

FIGURE 8 – Quelques points du segment $[\vec{x},\vec{y}]$, en fonction de $t \in [0,1]$. Ici $\vec{x} = \left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{y} = \left(\frac{1}{2},1\right)$.



3.3 Montrer qu'une partie n'est pas convexe

Cela peut être plus facile que de démontrer la convexité : il suffit de trouver des choix particuliers de $\vec{x} \in C$, $\vec{y} \in C$ et $t \in [0,1]$ tels que : $t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \notin C$ (cela correspond à un point du segment $[\vec{x},\vec{y}]$ qui n'est pas dans C). Si vous choisissez intelligemment $\vec{x}$ et $\vec{y}$, vous pourrez toujours vous en sortir avec le choix $t = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : vous pouvez trouver $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans C tels que :

$$\frac{1}{2}\left(\vec{x} + \vec{y}\right) \notin C.$$

Cela rend l'interprétation très visuelle : vous cherchez deux points de C dont le milieu n'est pas dans C. C'est ce qui doit mener vos recherches. Il est excessivement rare que vous n'y parveniez pas.

3.3.1 Trouver le réel t qui convient

Même si le choix $t = \frac{1}{2}$ s'impose dans quasiment tous les cas, je propose (sait-on jamais ?) de vous aider à interpréter graphiquement la quantité $t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$ en fonction de $t \in [0,1]$. Cela peut vous aider à faire un choix de point entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ qui n'est pas dans C.

Le réel $t \in [0,1]$ a en fait un « sens physique » : imaginez que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ soient deux corps massifs (des astres en mécanique céleste par exemple). Alors $t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$ est un point attiré par $\vec{x}$ pourvu d'une « masse t » et par $\vec{y}$ pourvu d'une « masse $1-t$ », dans sa position d'équilibre.

Par conséquent, quand t est proche de 1 (de sorte que $1-t$ soit proche de 0), le point $t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$ est très attiré par $\vec{x}$ qui est bien plus massif que $\vec{y}$. À l'inverse si t est proche de 0. Voir la figure 8 pour un exemple dans $\mathbb{R}^2$, et de quelques points du segment où la valeur de t prise est à chaque fois précisée. Vous vous convaincrez que plus t est près de 1, et plus le point est près de $\vec{x}$.

Il y a d'autres interprétations possibles issues de la Physique ou des Sciences Industrielles de l'Ingénieur, mais j'aurais peur de me ridiculiser. On peut aussi remarquer que $t\vec{x} + (1-t)\vec{y} = \vec{y} + t(\vec{x} - \vec{y})$ est la position d'un point mobile partant de $\vec{y}$ et se déplaçant avec le vecteur vitesse constant $\vec{x} - \vec{y}$, de sorte qu'il parte de $\vec{y}$ (pour $t = 0$) et arrive à $\vec{x}$ (pour $t = 1$). Il se rapproche donc de $\vec{x}$ quand le temps t augmente. Mais en fait, la meilleure notion pour aborder la chose serait celle de barycentre, dont la notion a malheureusement disparu du programme de mathématiques.

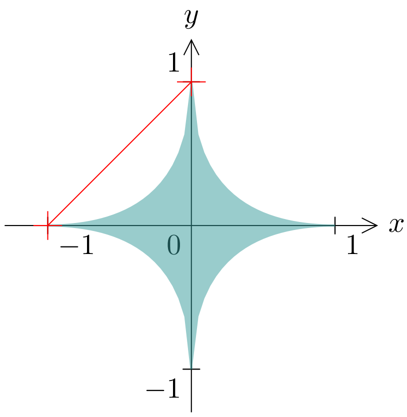
3.3.2 Exemples fréquents d'ensembles non convexes

Les ensembles de la forme $C = \{\vec{x} \in E \mid \bigstar = c\}$, avec $c \neq 0$, **sont rarement convexes** (si $c = 0$ alors au contraire ils le sont très souvent : faites attention à ne pas oublier ce détail...). Il marche souvent, dans ces cas-là, de prendre n'importe quel élément de C, et son opposé s'il est aussi dans C (ou un autre élément qui se simplifie facilement avec le précédent ; si l'interprétation est géométrique : essayer de prendre son symétrique par rapport à un centre, ou de changer l'abscisse en son opposée, etc.). En prenant la moyenne des deux, on obtient souvent un élément hors de C, contredisant ainsi sa convexité.

Si vous parvenez à en avoir une représentation visuelle, même très approximative, alors considérer le milieu de points qui s'apparentent à des « sommets » permet aussi d'avoir un point hors de l'ensemble, et d'en déduire qu'il n'est pas convexe.

Par exemple, si l'on pose $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2 \leqslant 1\right\}$ (qui est la « boule fermée unité » pour la « norme $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ » – qui n'en est pas une – définie par $(x,y) \mapsto \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$), alors on peut sentir même sans représentation visuelle concrète que $(-1{,}0)$ et $(0{,}1)$ sont des « sommets » de C. La figure 9 confirme cette interprétation.

FIGURE 9 – Une boule qui n'en est pas une : l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2 \leqslant 1$ n'est pas convexe.



Tout d'abord, ces points sont bien dans C, comme je vous laisse le vérifier en injectant leurs coordonnées dans l'inéquation $\left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2 \leqslant 1$. En considérant le milieu des deux, on obtient :

$$\frac{1}{2}(-1{,}0) + \frac{1}{2}(0{,}1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

et on vérifie que $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin C$ par ce calcul :

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 > 1.$$

Ainsi C n'est pas convexe (ce qui contredit en passant que $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ soit une norme : sinon, ses boules seraient convexes).

4 ✓ À quoi servent les parties ouvertes, fermées, convexes ?

Je ne compte pas répéter l'heuristique du cours, où je disais qu'en substance, pour que les théorèmes d'analyse de 1re année restent valables même avec des fonctions de plusieurs variables, il suffit de remplacer les intervalles ouverts par des ouverts, les intervalles fermés par des fermés, et d'ajouter l'hypothèse supplémentaire de convexité lorsqu'il est *essentiel* d'être sur un intervalle. On se souvient aussi que ce sont les résultats de continuité qui doivent être vérifiés sur des fermés, et les résultats de dérivabilité qui doivent être vérifiés sur des ouverts (comme pour les fonctions d'une seule variable réelle : pensez aux hypothèses du théorème de Rolle, des accroissements finis...).

Je me contente ici de résumer synthétiquement **toutes les généralisations des théorèmes de 1re année** et qui utilisent ces notions (il n'y a pas TOUS les résultats les utilisant). Cela ne vous prive pas de connaître les énoncés rigoureusement... À chaque fois, l'ensemble sur lequel on veut la propriété est l'ensemble de **départ** de la fonction étudiée.

Au programme de PSI, on a besoin :
- d'un **convexe** pour :
  - la caractérisation des fonctions de classe C^1 constantes ;
  - l'indépendance en x_i quand la dérivée partielle par rapport à x_i est nulle ;
- d'un **fermé** pour :
  - le théorème des bornes atteintes ;
- d'un **ouvert** pour :
  - la caractérisation des fonctions de classe C^1 constantes ;
  - l'indépendance en x_i quand la dérivée partielle par rapport à x_i est nulle ;
  - repérer les extremums locaux en les points critiques.

Autre présentation du même récapitulatif :

FIGURE 10 – Théorèmes d'analyse et hypothèses nécessaires.

Proposition	Convexe	Ouvert	Fermé	Borné	Régularité de f
Théorème des bornes atteintes			$\times$	$\times$	continue
Caractérisation des fonctions constantes	$\times$	$\times$			de classe C^1
Indépendance en une variable	$\times$	$\times$			de classe C^1
Extremums parmi les points critiques		$\times$			de classe C^1

Comme vous le voyez, dans ces théorèmes : la classe C^1 doit toujours être sur un ouvert, et la continuité doit toujours être sur un fermé. Aucune ambiguïté possible.

Il faut toujours justifier que les hypothèses sur l'ensemble (ouvert, fermé, convexe) sont vérifiées, même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Table des matières

Table des figures