MÉTHODES – Topologie des espaces vectoriels normés
Étude d'une norme

1 Montrer qu'une application est une norme

Lorsqu'on veut démontrer qu'une application est une norme, *souvent* elle est définie comme une combinaison linéaire de valeurs absolues, modules, ou plus généralement de normes usuelles. Par conséquent, en utilisant le fait que ce soient des normes, notre application héritera souvent de :
— la propriété d'homogénéité ;
— l'inégalité triangulaire ;
— la positivité.

En vérité, l'inégalité triangulaire peut *éventuellement* poser problème : surtout en présence de puissances (songez ne serait-ce qu'à l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$, qui nécessite de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Mais dans le cas difficile, il n'y a pas de méthode systématique à connaître et on doit vous donner des indications.

Je ne parlerai donc pas des propriétés ci-dessus, **et me concentrerai uniquement sur la propriété de séparation**. Peu importe la norme, un principe revient souvent (comme dans l'étude des produits scalaires) :

Une somme de réels **positifs** est nulle seulement si chaque terme est nul.

Ce sera souvent le point de départ de votre vérification. Ensuite, selon les quantités en présence, les raisonnements diffèrent : je me concentre sur les espaces de fonctions et de polynômes.

1.1 ✓ Cas particuliers fréquents dans les espaces de fonctions : bornes supérieures et intégrales

Les normes sur les espaces de fonctions sont souvent définies avec une intégrale ou une borne supérieure :

$$f \mapsto \int_I |f|, \quad f \mapsto \sup_{x\in I} |f(x)|, \quad \text{(parfois écrit ainsi : } f \mapsto \|f\|_\infty).$$

Lorsque les fonctions ont une régularité (classe C^1), on peut privilégier des intégrales ou des normes infinies où apparaissent leurs dérivées :

$$\mathrm{N}_1 : \begin{cases} \mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \left(|f(x)| + |f'(x)|\right) e^x \mathrm{d}x \end{cases}, \quad \mathrm{N}_2 : \begin{cases} \mathrm{C}^2([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & |f(0)| + \|f'\|_\infty + \displaystyle\int_0^1 |f''| \end{cases}.$$

Le caractère séparé se démontre semblablement dans tous les cas : on se retrouve avec la valeur absolue ou le module d'une fonction (ou plusieurs). Elle est donc positive. Si une fonction **positive** et **continue** est **d'intégrale nulle**, alors elle est elle-même nulle par séparation de l'intégrale.

IL FAUT CITER TRÈS SOIGNEUSEMENT CES HYPOTHÈSES, ON VOUS NOTE PRÉCISÉMENT LÀ-DESSUS !

Si ce n'est pas $|f|$ qu'on intègre mais $|f'|$, $|f''|$, etc., alors la continuité de ces dérivées découle de la classe de f : la vérifier soigneusement. Si vous en déduisez que $f' = 0$ ou $f'' = 0$ par exemple, ce n'est pas encore suffisant pour conclure : intégrez ces relations pour en arriver à f, *sans oublier les constantes d'intégration*, et utilisez les autres quantités de la norme pour en déduire que $f = 0$.

Les conseils sont rigoureusement les mêmes avec des bornes supérieures. C'est même plus facile parce que la propriété de séparation de la norme infinie est utilisable sans hypothèses subtiles.

Exercice 1. Montrer que les deux applications ci-dessus sont des normes.

Mise en garde 1. Attention, il serait totalement faux d'écrire : $\displaystyle\int_0^1 |f'| = [|f|]_0^1 = |f(1)| - |f(0)|$. Une primitive de $|f'|$ n'est pas $|f|$: en effet $|f|$ n'est pas forcément dérivable (penser à $x \mapsto |x|$ qui n'est pas dérivable en 0), et MÊME si elle est dérivable on N'a PAS $|f|' = |f'|$, mais :

$$|f|' = \frac{f \times f'}{|f|} \neq |f'|.$$

Nous vous laissons vous en convaincre en écrivant $|f| = \sqrt{f^2}$ et en dérivant cette fonction comme une composition. Tout cela pour dire que vous ne pouvez pas vous contenter de montrer les différentes propriétés de la norme en simplifiant ces intégrales : $\displaystyle\int_0^1 |f'|$ n'est pas simplifiable en toute généralité.

Si ces normes sont définies sur $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{R}_n[X]$, **on n'oublie pas de passer des applications polynomiales aux polynômes** : le fait que $P(x) = 0$ pour tout $x \in I$ signifie que x est une racine de P pour tout $x \in I$. Cela fournit une infinité de racines de P, donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. **Cette étape n'est pas facultative**.

1.2 ✓ Normes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}[X]$: raisonnements sur les racines

Outre le cas des normes avec intégrales ou bornes supérieures (voir ci-dessus), vous aurez souvent à étudier des produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{R}_n[X]$ qui s'obtiennent en sommant différentes évaluations des polynômes, ou de leurs dérivées successives. Exemples :

$$\mathrm{N}_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \sum\limits_{i=0}^{n} |P(i)| \end{cases}, \quad \mathrm{N}_2 : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \left|P^{(i)}(2)\right| \end{cases}, \quad \mathrm{N}_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & |P(0)| + |P'(0)| + |P(1)| \end{cases}.$$

Quand les normes sont définies à l'aide des dérivées successives, il n'est pas rare d'avoir une somme infinie : il n'y a pourtant aucun problème de convergence, car les dérivées sont nulles à partir d'un certain rang et la somme est en vérité finie.

Pour démontrer le caractère séparé, on utilise d'abord le fait qu'une somme de termes positifs soit nulle si et seulement si chaque terme est nul, nous ramenant à plusieurs égalités de la forme : $P^{(k)}(a) = 0$. Ces égalités permettent d'invoquer trois résultats essentiels sur les racines :
- $P(a) = 0$ si et seulement si a est racine de P ;
- plus généralement, $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k)}(a) = 0$ si et seulement si a est racine de P d'ordre de multiplicité AU MOINS $k+1$ (et non k, attention : ce serait contraire à ce que vous savez en prenant $k = 1$) ;
- seul le polynôme nul a strictement plus de racines que son degré (racines comptées avec multiplicités).

On voit que la connaissance du degré des polynômes est essentielle. Si l'on est sur $\mathbb{R}[X]$ au lieu de $\mathbb{R}_n[X]$, on n'a pas de borne sur le degré. En revanche, dans ces cas-là, nous arrivons souvent à démontrer qu'il existe une infinité de racines (ou une racine d'ordre arbitrairement élevé), ce qui permet à coup sûr de dépasser le degré.

Exercice 2. Montrer que les trois applications proposées ci-dessus sont des normes. Raisonnez sur les racines y compris pour N_3, ou vous ne tirerez aucun enseignement de l'exercice.

Toutefois, vous OUBLIEZ cette méthode lorsque les évaluations des dérivées de P n'ont pas de rapport avec les évaluations de P. Par exemple, pour vérifier le caractère séparé de la norme définie sur $\mathbb{R}_1[X]$ par $P \mapsto |P(0)| + |P'(1)|$, le fait $P'(1) = 0$ n'apporterait AUCUNE information sur les racines de P, et certainement pas le fait que 1 soit racine de P (certes, cela nous dit que 1 est racine de P', mais cela n'implique pas que c'est une racine de P). Plus généralement, pour que l'information $P^{(k)}(a) = 0$ ait une influence sur les racines de P, il faut AUSSI $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$!
Dans ce cas-là, vous devez utiliser d'autres choses sur $P^{(k)}$: son degré, son coefficient dominant ou constant, etc.

Exercice 3. Les méthodes de la section ne s'appliquent pas à l'application $P \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(k)\right|$ (chaque dérivée successive est évaluée en un autre réel). Démontrer malgré tout le caractère séparé en explicitant le terme de la somme correspondant à $k = \deg(P)$ (si P est un polynôme non nul).

1.3 ✓ Normes issues de produits scalaires

Nous avons vu que la norme euclidienne associée à un produit scalaire est toujours une norme. Il vous suffira donc souvent d'invoquer ce résultat *quand vous verrez une norme définie comme la racine carrée d'une quantité (elle-même définie à l'aide de carrés)*. Par exemple :

$$\mathrm{N}_1 : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} (P(x))^2 \, e^{-x} \mathrm{d}x} \end{cases}, \quad \mathrm{N}_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2xy} \end{cases}.$$

Pour trouver quel serait le produit scalaire associé, vous utilisez une identité de polarisation. Par exemple, le produit scalaire associé à N_2 est défini, pour tout $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in (\mathbb{R}^2)^2$, par :

$$\begin{aligned} \langle (x_1,y_1),(x_2,y_2) \rangle &= \frac{1}{2}\left[(\mathrm{N}_2(x_1+x_2,y_1+y_2))^2 - (\mathrm{N}_2(x_1,y_1))^2 - (\mathrm{N}_2(x_2,y_2))^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left((x_1+x_2)^2 + 2(y_1+y_2)^2 - 2(x_1+x_2)(y_1+y_2)\right) - \left(x_1^2 + 2y_1^2 - 2x_1y_1\right) - \left(x_2^2 + 2y_2^2 - 2x_2y_2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2x_1x_2 + 4y_1y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y - 1\right] \\ &= x_1x_2 + 2y_1y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Un peu de flair et « d'artisanat » peut permettre de prédire *a priori* quel serait le bon produit scalaire, même sans passer par une identité de polarisation. Essayez avec N_1.

Évidemment, si le produit scalaire n'est pas usuel (comme pour ces deux normes), alors vous devez démontrer que c'en est effectivement un. On ne peut pas être gagnant sur tous les fronts.

Exercice 4. Démontrer que ces deux applications sont des normes associées à des produits scalaires.

2 Tracé de la boule unité

Il est bon de savoir tracer la boule (fermée) ou la sphère unité pour une norme « exotique » $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ qu'on nous présente. Par exemple :

$$\mathrm{N}_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |2x+y| + |x+2y| \end{cases}, \quad \mathrm{N}_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \max\left(|2x+y|, |x+2y|\right) \end{cases}.$$

Cela revient à déterminer les points (x,y) du plan tels que : $\|(x,y)\| \leqslant 1$ (pour la boule unité), ou : $\|(x,y)\| = 1$ (pour la sphère unité). En vérité, peu importe ce qu'on vous demande, **traitez le cas d'égalité**. C'est plus facile, et de toute façon si vous savez tracer la sphère unité, alors vous savez aussi tracer la boule unité (en coloriant l'intérieur).

La difficulté, dans la résolution de $\|(x,y)\| = 1$, vient de la présence des valeurs absolues et des maximums, très fréquents (si ce n'est systématiques) dans la définition d'une norme, et qui empêchent de résoudre simplement ces équations. On s'en sort alors avec des distinctions de cas **qui nous ramènent (souvent) à des équations de droites**.

Les distinctions de cas ont deux natures :

1. S'il apparaît une quantité de la forme $|\diamondsuit + \spadesuit|$, vous supposez tantôt $\diamondsuit + \spadesuit \geqslant 0$ et tantôt $\diamondsuit + \spadesuit \leqslant 0$ (connaître le signe de $\diamondsuit + \spadesuit$ permet de simplifier la valeur absolue, et d'écrire $|\diamondsuit + \spadesuit| = \diamondsuit + \spadesuit$ ou $|\diamondsuit + \spadesuit| = -(\diamondsuit + \spadesuit)$) ;

2. S'il apparaît une quantité de la forme $\max(\heartsuit, \clubsuit)$, vous supposez tantôt $\heartsuit \geqslant \clubsuit$, et tantôt $\heartsuit \leqslant \clubsuit$ (pour savoir qui est le maximum des deux et écrire $\max(\heartsuit, \clubsuit) = \heartsuit$ ou $\max(\heartsuit, \clubsuit) = \clubsuit$).

Une fois ces distinctions de cas faites :

1. Vous pouvez effectivement résoudre $\|(x, y)\| = 1$; vous aurez en général une équation de droite.
2. Vous tracez la droite correspondante, **dont vous gommerez tout ce qui sort de la région du plan correspondant à l'inégalité supposée dans votre distinction de cas** (ou bien vous pouvez attendre d'avoir fini de tracer toute la figure, et gommer tout ce qui est en-dehors de la surface clairement délimitée ; mais vous risquez de surcharger le dessin : à vous de voir). Par exemple, si l'inégalité supposée dans la distinction de cas était $y \geqslant 0$, vous gommez tout ce qui sort du demi-plan supérieur.

   Pour savoir à quelle région du plan correspond l'inégalité $\diamondsuit + \spadesuit \gtreqless 0$, quand ce n'est pas aisément identifiable (donc pas de la forme $x \gtreqless 0$ ou $y \gtreqless 0$) :

   (a) Vous isolez y, et mettez l'inégalité sous la forme $y \geqslant \alpha x + \beta$ ou $y \leqslant \alpha x + \beta$.

   (b) Ensuite, vous tracez la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ (elle ne fait pas partie de la sphère unité à tracer, ne vous emmêlez pas les pinceaux). Si votre inégalité était de la forme $y \geqslant \alpha x + \beta$, alors la région du plan délimitée par cette inégalité est AU-DESSUS de la droite tracée (parce que l'ordonnée y est dans ce cas SUPÉRIEURE à celle des points sur la droite). Si elle était de la forme $y \leqslant \alpha x + \beta$, alors la région du plan délimitée par cette inégalité est EN-DESSOUS de la droite tracée.

Tout cela a l'air compliqué. L'exemple 1 vous montrera que non, pas tant que cela.

Pour diminuer le nombre de distinctions de cas, notez qu'une boule devant être symétrique par rapport à son centre (exercice 6 ci-dessous), si vous avez traité tous les sous-cas qui correspondant à $\diamondsuit + \spadesuit \geqslant 0$ (par exemple), alors tous les sous-cas correspondant à $\diamondsuit + \spadesuit \leqslant 0$ s'obtiennent *via* une symétrie centrale.

Pour détecter vos erreurs :

— une boule ou une sphère est symétrique par rapport à son centre (exercice 6 ci-dessous) ; → page 5

— une **boule** est convexe ; (et pas une sphère, attention !)

— une boule ou une sphère a une frontière « sans discontinuité » (les sommets des arêtes doivent se rejoindre).

Vérifiez que votre tracé a bien ces propriétés.

Il vous arrive à tort de penser que votre tracé est faux si x et y « dépassent » -1 et 1. **Ce n'est pourtant pas un indice d'erreur**. Ces coordonnées peuvent très bien prendre des valeurs arbitrairement grandes, bien que $\|(x, y)\| = 1$, si la norme est très exotique.

Exemple 1. Nous vous laissons vérifier que l'application $\mathrm{N}_1 : (x, y) \mapsto |2x + y| + |x + 2y|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Traçons sa sphère unité. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons quatre distinctions de cas à faire pour résoudre explicitement $\mathrm{N}_1(x, y) = 1$, selon que $2x + y$ soit positif ou négatif, et selon que $x + 2y$ soit positif ou négatif. Mais, par symétrie, il suffit de traiter le cas $2x + y \geqslant 0$ et les deux sous-cas $x + 2y \geqslant 0$ et $x + 2y \leqslant 0$. On suppose donc ci-dessous que $2x + y \geqslant 0$, de sorte que $|2x + y| = 2x + y$. Si, de plus, on suppose :

— $x+2y \geqslant 0$, alors $|x+2y| = x+2y$, et donc : $\mathrm{N}_1(x, y) = 1 \iff (2x+y)+(x+2y) = 1 \iff y = \frac{1}{3} - x$;

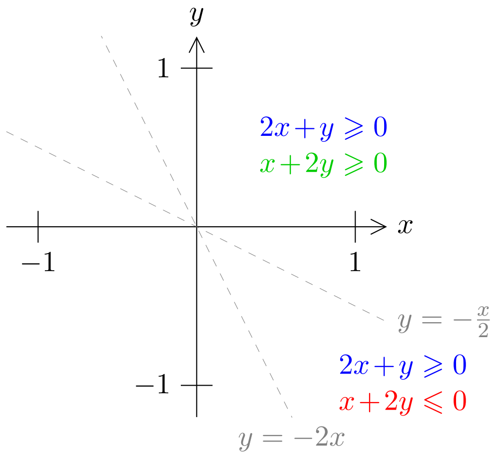
— $x + 2y \leqslant 0$, alors $|x + 2y| = -(x + 2y)$, et donc : $\mathrm{N}_1(x, y) = 1 \iff (2x + y) - (x + 2y) = 1 \iff y = x - 1$.

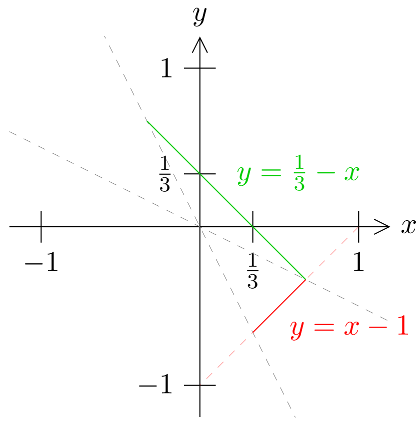
Nous devons donc tracer les droites d'équations $y = \frac{1}{3} - x$ et $y = x - 1$ respectivement, dans les régions du plan délimitées par $2x + y \geqslant 0$ et $x + 2y \geqslant 0$, puis par $2x + y \geqslant 0$ et $x + 2y \leqslant 0$. Tâchons d'abord de comprendre à quelles régions du plan elles correspondent, suivant la méthode expliquée ci-dessus :

— on a $2x + y \geqslant 0 \iff y \geqslant -2x$, donc cette inégalité correspond à la région du plan AU-DESSUS de la droite d'équation $y = -2x$;

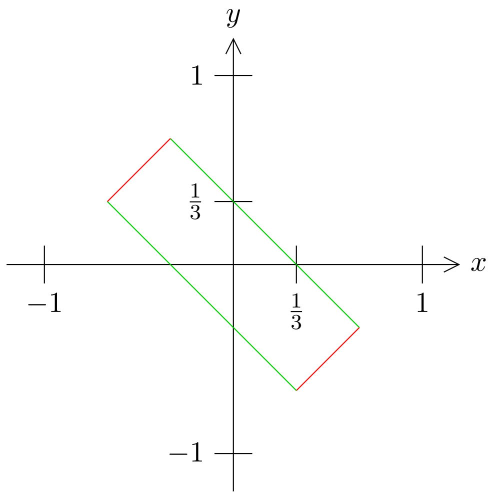
— on a $x + 2y \geqslant 0 \iff y \geqslant -\frac{x}{2}$, donc cette inégalité correspond à la région du plan AU-DESSUS de la droite d'équation $y = -\frac{x}{2}$;

Nous en déduisons, à gauche, les régions du plan délimitées par ces inégalités, et à droite nous traçons les droites correspondant aux points (x,y) vérifiant $\mathrm{N}_1(x,y)=1$ dans chaque région (d'après les équations obtenues) :





On complète le dessin par symétrie, et on obtient la sphère unité :



Exercice 5. Traiter de même la sphère unité pour la norme $\mathrm{N}_2 : (x,y) \mapsto \max\left(|2x+y|, |x+2y|\right)$, en vérifiant que c'en est effectivement une (l'inégalité triangulaire n'est pas si évidente : êtes-vous convaincus qu'on a bien $\max(a+b, c+d) \leqslant \max(a,c)+\max(b,d)$ pour tous réels a, b, c et d ?).

Vous aurez besoin de huit distinctions de cas, pouvant descendre à quatre par symétrie.

Exercice 6. Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soient $\vec{a} \in E$ et $r>0$. Montrer que si $\vec{x} \in E$, alors $\vec{x} \in \mathrm{B}_f(\vec{a},r)$ si et seulement si $2\vec{a}-\vec{x} \in \mathrm{B}_f(\vec{a},r)$. Exercice analogue avec $\mathrm{S}(\vec{a},r)$ et $\mathrm{B}(\vec{a},r)$.

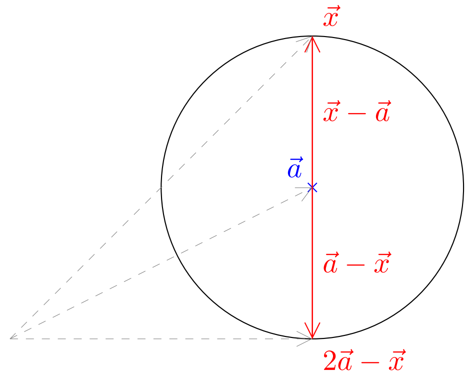
Exercice 7. (les rectangles sont des boules)

1. Soit $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Montrer que $[-\alpha,\alpha] \times [-\beta,\beta]$ est la boule fermée unité dans $\mathbb{R}^2$, pour une norme qu'on cherchera de la forme $\mathrm{N} : (x,y) \mapsto \max(\lambda|x|, \mu|y|)$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. Montrer que le rectangle $[a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ est une boule (non nécessairement centrée en $(0,0)$) pour une des normes explicitées ci-dessus. Un dessin permettra de conjecturer le centre, et le rayon s'obtiendra en comparant la largeur et la longueur de $[a,b] \times [c,d]$ à celles des rectangles de la première question.

3 Montrer que des normes ne sont pas équivalentes

Notons que la question ne se pose qu'en dimension infinie, vu qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Nous ne donnons pas de méthode consistant à démontrer que des normes

Figure 1 – Formalisation de la symétrie d'une boule : d'où sort ce $2\vec{a} - \vec{x}$?



sont équivalentes : il n'y a pas vraiment de stratégie générale, et le mieux reste de s'inspirer de la démonstration de l'équivalence des normes usuelles sur K^n ; souvent, imiter la démarche fonctionne même si l'on est sur un espace de fonctions (par exemple). Par exemple, pour comparer les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur K^n, on voit qu'il fut nécessaire d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; il en serait donc de même pour ces deux normes définies sur $\mathrm{C}^0([0{,}1],\mathbb{R})$.

Ceci étant dit, revenons au problème de cette section : comment démontrer que deux normes N_1 et N_2, sur un espace vectoriel normé E de dimension infinie (pensez à $K[X]$ ou à un espace de fonctions ; pour faciliter cette interprétation, je noterai ci-dessous avec la lettre f les éléments de E), ne sont pas équivalentes ? Pour cela, on commence par raisonner par l'absurde, en supposant l'existence de réels $a, b > 0$ tels que : $\forall f \in E,\ a\,\mathrm{N}_1(f) \leqslant \mathrm{N}_2(f) \leqslant b\,\mathrm{N}_1(f)$. Il s'agit alors de montrer qu'en choisissant bien f, nous avons une contradiction.

Comment bien choisir f ? Même s'il n'existe pas de méthode balisée, il importe d'avoir en tête ces deux choses :

— vous n'aurez JAMAIS de contradiction en prenant un seul choix de f, ou même un nombre fini : c'est avec un nombre *infini* de choix de f (dit autrement : **avec une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans E**) que vous pourrez obtenir une contradiction ;

— vous devez choisir f_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que f_n devienne « arbitrairement grand ou petit » pour une norme (disons N_1, ce qui veut dire : $\mathrm{N}_1(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ou : $\mathrm{N}_1(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) et « stagne » pour l'autre norme (disons N_2, ce qui veut dire idéalement : $(\mathrm{N}_2(f_n))_{n\geqslant 0}$ est constante, ou moins exigeant : $\mathrm{N}_2(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \notin \{0, +\infty\}$).

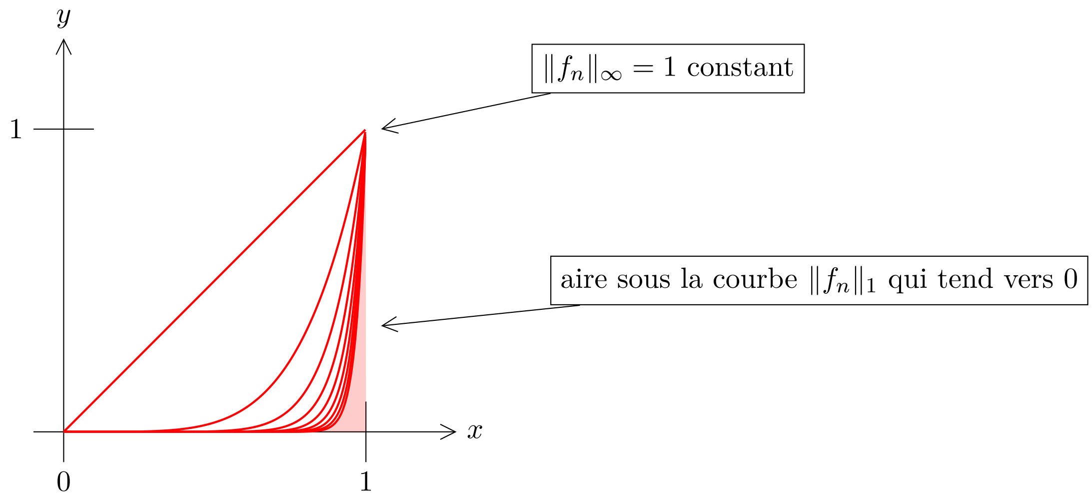
Voici la raison pour laquelle un nombre fini de choix de f ne peut pas apporter de contradiction : disons que nous avons regardé les normes de k choix $f_1, \ldots, f_k$. Si l'on se contente de raisonner avec ces k vecteurs, notre raisonnement aurait été le même en se plaçant dans $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$, or c'est un espace vectoriel de dimension finie (inférieure ou égal à k), et on sait que dans un tel espace vectoriel toutes les normes sont équivalentes : il est donc impossible d'y démontrer qu'elles ne le sont pas.

Cette explication permet de comprendre que pour faire un bon choix de suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$, **si on est dans un espace de polynômes, il faut que le degré de f_n devienne arbitrairement grand quand n varie**, ce qui conduit à des essais du type $f_n = X^n$, etc. Si ce n'est pas le cas, disons par exemple que $\deg(f_n) \leqslant k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors c'est au fond comme si l'on raisonnait dans $\mathbb{R}_k[X]$: c'est un espace vectoriel de dimension finie, sur lequel toutes les normes sont équivalentes : là encore, pas de contradiction possible. **Si l'on n'est pas dans un espace de polynômes**, il n'y a pas de notion de degré mais néanmoins le principe reste le même : la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne doit pas être dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, ce qu'on évite intelligemment si l'on fait en sorte que f_n ne soit pas combinaison linéaire de $f_0, \ldots, f_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour le second point (être arbitrairement grand ou petit pour N_1, stagner pour N_2), il n'y a pas de grand principe à vous enseigner : cela dépend du contexte. Si une norme est définie à l'aide d'une intégrale, l'interprétation géométrique en tant qu'aire sous la courbe peut vous aider à fabriquer des exemples dont l'aire devient arbitrairement grande ou petite. Si une norme est définie à l'aide d'une norme infinie, c'est plus facile de visualiser ce qu'il se passe : « stagner » pour une telle norme signifierait que le maximum des f_n serait toujours le même (et non nul). Commencez par méditer des exemples vérifiant ce que vous souhaitez *sur des dessins*, puis réfléchissez aux fonctions qui pourraient correspondre à ce que vous représentez.

Une fois que vous avez trouvé une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant ce que vous souhaitez, par exemple : $\mathrm{N}_1(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et : $\mathrm{N}_2(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+^*$, il suffit de prendre la limite quand $n \to +\infty$ dans l'encadrement : $a\,\mathrm{N}_1(f_n) \leqslant \mathrm{N}_2(f_n) \leqslant b\,\mathrm{N}_1(f_n)$, pour avoir une contradiction.

Exemple 2. Soit $E = \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Nous allons montrer que les normes $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E. On raisonne par l'absurde : supposons l'existence de $a, b > 0$ tels que : $\forall f \in E$, $a\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \leqslant b\|f\|_1$. Pour trouver une suite qui donnerait une contradiction, je cherche s'il est possible d'avoir des fonctions f_n dont la norme $\|f_n\|_1$ (c'est-à-dire l'aire sous la courbe) devient arbitrairement petite, tandis que $\|f_n\|_\infty$ reste constant, disons égal à 1 pour se fixer les idées. Il s'avère que prendre $f_n : t \mapsto t^n$ convient, comme le montre l'illustration ci-dessous :



Pour ce choix de fonctions f_n, on aurait : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a\|f_n\|_1 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant b\|f_n\|_1$. C'est-à-dire, comme : $\|f_n\|_\infty = 1$, et : $\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a}{n+1} \leqslant 1 \leqslant \frac{b}{n+1}.$$

Quand $n \to +\infty$, on obtient : $0 \leqslant 1 \leqslant 0$. Contradiction. Ce raisonnement par l'absurde démontre donc que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

Table des matières

Table des figures