MÉTHODES – Topologie des espaces vectoriels normés

Continuité d'une application sur un espace vectoriel normé

Il est très important de retenir que la continuité d'une application définie sur un espace vectoriel normé se démontre toujours de la même façon : **en y reconnaissant des sommes, produits, quotients et compositions d'applications continues usuelles**. Encore faut-il connaître ces applications usuellement continues :

FIGURE 1 – Applications continues usuelles : tableau général.

Les fonctions usuelles de la variable réelle (exp, cos, sin, ln, etc.)
Les applications polynomiales en n indéterminées (*réelles ou complexes*).
Les applications linéaires et multilinéaires (*en dimension finie*).
Les normes
Les applications lipschitziennes

Les applications lipschitziennes ne sont pas à mettre sur le même plan que les autres, parce que la lipschitzianité d'une fonction ne se voit pas « à l'œil nu ». Nous ne l'utiliserons, *dans ce contexte*, que pour le cas très particulier des applications linéaires en dimension infinie : voir la section 2. → page 5

Avec ces outils à disposition, vous pouvez déjà en déduire la continuité d'à peu près n'importe quelle application sur $\mathbb{R}^n$: vous avez la continuité des fractions rationnelles partout où le dénominateur ne s'annule pas, puisqu'elles ne sont rien d'autres que des quotients applications polynomiales ; par exemple les applications :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1} \end{cases}, \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \dfrac{z^3}{(x+y+z)^2+x^2+1} \end{cases}$$

sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement en tant que quotient d'applications polynomiales.

Par composition vous en déduisez ensuite la continuité de n'importe quelle fraction en plusieurs variables qui fait intervenir les fonctions usuelles. Donc, finalement, de l'immense majorité des fonctions rencontrées. Il faut simplement se souvenir que si une fonction usuelle de la variable réelle est continue (exponentielle, fonctions trigonométriques, etc.), alors elle « reste continue si on rajoute artificiellement des variables ». Par l'exemple qui suit, vous aurez compris toute la stratégie :

Exemple 1. Montrons que l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^4+\exp(y)}} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$:

1. **Pour le numérateur** : on voit le sinus (fonction usuelle) et xy (polynomial), donc c'est continu. Formalisons :
   — l'application $(x,y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale, et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
   — le sinus est continu sur $\mathbb{R}$.
   Par *composition* de fonctions continues, l'application $(x,y) \mapsto \sin(xy)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. **Pour le dénominateur**, on a x^2+y^4 (polynomial), $\exp(y)$ (fonction usuelle), et la racine carrée (fonction usuelle), donc c'est continu. Formalisons ceci en précisant soigneusement les opérations qui lient ces fonctions :
   — l'application $(x,y) \mapsto x^2+y^4$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale ;
   — l'application $(x,y) \mapsto \exp(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que *composition* de l'application polynomiale $(x,y) \mapsto y$, continue sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de l'exponentielle continue sur $\mathbb{R}$;

— en tant que *somme* d'applications continues, l'application $(x, y) \mapsto x^2+y^4+\exp(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (en effet nous avons une somme de fonctions positives donc c'est positif) ;
— la racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par *composition* de fonctions continues, l'application $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2+y^4+\exp(y)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, et ne s'annule pas grâce à la stricte positivité de l'exponentielle.

En tant que *quotient* de fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annule pas, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Dans les sections suivantes, nous parlons plus spécifiquement des applications définies sur des espaces vectoriels plus abstraits que $\mathbb{R}^n$.

1 Cas de la dimension finie

Nous parlons plus spécifiquement des applications définies sur des espaces vectoriels de dimension finie ($\mathbb{C}$, $\mathrm{M}_n(K)$, $K_n[X]$). Par exemple :

$$f : \begin{cases} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ M & \mapsto \sqrt{|\det(M)+\mathrm{tr}(M)|} \end{cases}, \; g : \begin{cases} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(M) \\ \mathrm{tr}(M^2) \\ \mathrm{tr}(M^4) \end{pmatrix} \end{cases}, \; h : \begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto \dfrac{\bar{z}^2+(\mathrm{Re}(z))^2}{(\mathrm{Im}(z))^2+1} \end{cases}. \quad (1)$$

La stratégie n'a toujours pas changé ! Il s'agit d'y reconnaître des sommes, produits, quotients et compositions d'applications continues usuelles, que nous avons rappelées dans le tableau de la figure 1. Seulement, il faut **penser** à reconnaître des applications linéaires, bilinéaires, etc. Pour y penser avec vivacité, ayez en permanence en tête le tableau de la figure 2, qui récapitule les opérations les plus courantes dans les espaces de dimension finie classiques.

FIGURE 2 – Applications continues les plus courantes en dimension finie.

$\mathbb{C}$	Preuve	$\mathrm{M}_n(K)$	Preuve	$\mathbb{R}_n[X]$	Preuve	E euclidien	Preuve
$z \mapsto \mathrm{Re}(z)$	linéaire	$A \mapsto AB$	linéaire	$P \mapsto P'$	linéaire	$\lVert\cdot\rVert$	norme
$z \mapsto \mathrm{Im}(z)$	linéaire	$A \mapsto BA$	linéaire	$P \mapsto \int_I P$	linéaire	$\langle\cdot,\cdot\rangle$	bilinéaire
$z \mapsto \bar{z}$	linéaire	$A \mapsto \mathrm{tr}(A)$	linéaire	$P \mapsto P(\alpha)$	linéaire	$\cdot \wedge \cdot$	bilinéaire
$z \mapsto \lvert z\rvert$	norme	$A \mapsto A^\top$	linéaire	$P \mapsto a_k$	linéaire	$\vec{x} \mapsto \langle\vec{x},\vec{y}\rangle$	linéaire
$z \mapsto e^z$	série entière	$A \mapsto a_{i,j}$	linéaire	$P \mapsto P^{(k)}(\alpha)$	linéaire	$\vec{x} \mapsto \vec{x}\wedge\vec{y}$	linéaire
$\cos, \sin, \cosh, \sinh$	série entière	$A \mapsto PAP^{-1}$	linéaire	$(P,Q) \mapsto PQ$	bilinéaire	isométrie	linéaire
$z \mapsto P(z)$	polynomial	$(A,B) \mapsto AB$	bilinéaire				
		$(A,B) \mapsto \mathrm{tr}\left(A^\top B\right)$	bilinéaire				
		$A \mapsto \det(A)$	n-linéaire				

Exercice 1. Utiliser les applications continues des figures 1 et 2 pour démontrer la continuité de f et h.

La continuité de g sera traitée dans l'exemple 2. → page 4

Nous allons détailler plus bas quelques cas particuliers d'applications continues sur ces espaces et que nous rencontrons plus souvent que les autres :
— les applications « presque linéaires » (de la forme « linéaire + constante ») ; → page 3
— les produits de matrices, de polynômes, etc. ;
— les puissances de matrices ;
— le polynôme caractéristique. → page 5

Mise en garde 1. Ne confondez pas la linéarité et la bilinéarité. D'abord, quand il n'y a qu'une seule variable, il n'y a pas d'ambiguïté possible : ce ne peut pas être bilinéaire (vu que « bilinéaire » signifie : linéaire par rapport à chacune des **deux** variables). Dans le cas d'une application définie sur $E \times E$ (deux variables), être linéaire revient à faire la vérification en prenant pour vecteurs des *couples* $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E$: ainsi les deux variables sont prises simultanément dans la vérification de la linéarité (plus rigoureusement :

les deux variables sont considérées comme étant une seule). Alors que la bilinéarité ne regarde qu'une variable à la fois.

Si vous avez un doute, vérifiez HONNÊTEMENT : avez-vous $\varphi(A+\lambda A', B+\lambda B') = \varphi(A,B)+\lambda\varphi(A',B')$? Si NON, alors ce n'est PAS linéaire. Par exemple, si je prends pour φ le produit matriciel $(A,B) \mapsto AB$, alors :

$$\forall (A,B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \varphi(A,B) + \lambda\varphi(A',B') = AB + \lambda A'B', \quad \text{et :}$$

$$\forall (A,B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \varphi(A+\lambda A', B+\lambda B') = (A+A')(B+\lambda B') = AB + \lambda(AB' + A'B) + A'B',$$

et on voit bien que $\varphi(A+\lambda A', B+\lambda B') \neq \varphi(A,B) + \lambda\varphi(A',B')$ en toute généralité. En revanche φ est bilinéaire.

Mise en garde 2. Attention, si vous avez des fonctions définies sur $K[X]$, ce n'est pas parce que la variable est un polynôme P, que ces fonctions sont elles-mêmes polynomiales ! Ce n'est PAS un argument que vous pouvez invoquer pour justifier la continuité des applications :

$$\partial : P \mapsto P', \quad \mathscr{I} : P \mapsto \int_I P, \quad \mathscr{P} : P \mapsto \int_0^X P, \quad \varepsilon_\alpha : P \mapsto P(\alpha) \quad \text{avec } \alpha \in K \text{ fixé,}$$

sur $K[X]$. Si un K-espace vectoriel E est muni d'une multiplication **interne** (c'est le cas de $\mathrm{M}_n(K)$, $K[X]$, $\mathrm{C}^0(I,\mathbb{R})$...), une application f définie sur E est polynomiale s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$ tels que, pour tout $x \in E$, on ait : $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Autrement dit : l'image par f d'un élément de E est une combinaison linéaire des puissances de cet élément (avec des scalaires fixés). Par exemple, les applications :

$$P \mapsto P^3 + 2P^2, \quad P \mapsto P^4 + 1$$

définies sur $K[X]$ sont polynomiales. Nous en avons aussi donné beaucoup d'exemples dans le chapitre de réduction des endomorphismes, avec la notion de polynôme d'endomorphisme. Vous remarquerez que cette définition d'application polynomiale N'UTILISE PAS DU TOUT LA NATURE DE x : que ce soit une matrice, un polynôme, un réel ou une suite, peu importe !

Ainsi les applications listées ci-dessus ne sont pas de cette forme et ne sont donc pas polynomiales. La continuité proviendrait de la linéarité si on est en dimension finie. En dimension infinie, cela dépend de l'application et de la norme : voir les exercices 4 et 5 de ce document. → page 7

1.1 Cas d'une application « presque » linéaire (affine) : $\vec{x} \mapsto \alpha\vec{x} + \beta$ par exemple

Je pense à des applications telles que :

$$f : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \mathrm{I}_n + M \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & 1 + X - X^2 P'' \end{cases}, \quad \text{etc.,}$$

qui seraient linéaires si on enlevait un terme constant : I_n ou $1+X$ dans les deux exemples ci-dessus.

Ce n'est pas très compliqué de montrer leur continuité en recourant à la linéarité : on dit simplement qu'elles sont la somme d'une application continue car linéaire, et d'une application continue car constante.

Nous n'avons pas montré la continuité des applications constantes à proprement parler dans le cours, mais elle est évidente : elles vérifient la définition de la continuité pour n'importe quelle valeur de η ; elles vérifient la caractérisation séquentielle de la continuité trivialement ; elles sont K-lipschitziennes pour n'importe quelle constante K... Ce ne sont pas les arguments qui manquent.

Ainsi f est continue en tant que somme de l'application $M \mapsto M$ (continue car linéaire, c'est même l'identité) et de l'application $M \mapsto \mathrm{I}_n$ (continue car constante). De même pour g, en considérant $P \mapsto 1+X$ (constante : l'image ne dépend pas de P) et $P \mapsto -X^2P''$ (continue par linéarité de la dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie).

1.2 Argument à invoquer pour un produit de matrices, de polynômes, etc.

Les développements de cette section valent pour toute fonction qui N'est PAS à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais dont l'image fait apparaître des produits et puissances.

Pour justifier la continuité de l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P \cdot P' \end{cases},$$

nous aimerions simplement dire : c'est un produit de fonctions continues (car linéaires sur des espaces de dimensions finies), donc elle est continue. Problème : cet énoncé n'est au programme que si lesdites fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathrm{M}_n(K)$. Nous allons voir comment nous en sortir malgré tout sans sortir du cadre du programme.

La méthode : composer par l'application produit. Il suffit de remarquer que faire un produit de polynômes revient à appliquer l'application bilinéaire $\Pi_{\text{pol}} : (P, Q) \mapsto PQ$ en un couple convenable. Avec ces notations, on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = P \cdot P' = \Pi_{\text{pol}}(P, P'). \tag{2}$$

La justification devient alors très simple : f est obtenue comme composition de :
— l'application $P \mapsto (P, P')$, continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ parce que ses composantes $P \mapsto P$ et $P \mapsto P'$ le sont par linéarité ($\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie), et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$;
— et de $\Pi_{\text{pol}} : (P, Q) \mapsto PQ$, continue car bilinéaire sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie.

Comme composition de fonctions continues, f est continue. L'argument n'est pas complexe : il fallait simplement identifier par quoi composer Π_{pol} pour obtenir f : cela se trouvait en observant l'argument de Π_{pol} dans (2).

Si vous n'avez pas un produit de deux, mais ℓ polynômes, cela revient au même : vous composez par l'application :

$$\Pi_{\text{pol},\ell} : (P_1, \dots, P_\ell) \mapsto P_1 \times \cdots \times P_\ell, \tag{3}$$

qui est continue sur $(\mathbb{R}_n[X])^\ell$ en tant qu'application ℓ-linéaire sur un espace de dimension finie.

1.3 Cas particulier très fréquent : les puissances de matrices, polynômes, etc.

Les développements de cette section valent pour toute fonction qui N'est PAS à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une fois qu'on a compris comment obtenir la continuité de produits de matrices ou de polynômes (voir paragraphe précédent), il suffit de multiplier une matrice (ou un polynôme) par lui-même pour obtenir une fonction puissance. Plus précisément, avec la notation de (3) ci-dessus :

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall P \in K_n[X], \quad P^\ell = \underbrace{P \times \cdots \times P}_{\ell \text{ fois}} = \Pi_{\text{pol},\ell}(P, \dots, P).$$

Par conséquent, pour tout $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ l'application $P \mapsto P^\ell$ est continue en tant que composition :
— de l'application $P \mapsto (P, \dots, P)$, continue sur $K_n[X]$ parce que toutes ses composantes $P \mapsto P$ sont continues (en tant qu'applications linéaires sur un espace de dimension finie), et à valeurs dans $(K_n[X])^\ell$;
— et de $\Pi_{\text{pol},\ell}$ continue sur $(K_n[X])^\ell$ (en tant qu'application ℓ-linéaire sur un espace de dimension finie).

Pour $\ell = 0$, il s'agit d'une application constante, donc elle est bien sûr continue.

Exemple 2. Reprenons l'application g page 2, ligne numérotée (1). Elle est continue si et seulement si chaque composante est continue ; nous sommes donc ramenés à l'étude de la continuité des applications : ← page 2

$$M \mapsto \operatorname{tr}(M), \quad M \mapsto \operatorname{tr}\left(M^2\right), \quad M \mapsto \operatorname{tr}\left(M^4\right).$$

Or, par l'argument que nous venons d'invoquer (pour $\ell = 2$ et $\ell = 4$; c'est même plus simple puisque nous savons d'après le cours que le produit matriciel est continu), les applications $M \mapsto M^2$ et $M \mapsto M^4$ sont continues sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Par composition avec la trace, qui est linéaire sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ (qui est de dimension finie) donc continue, on en déduit que ces composantes sont toutes continues. Ainsi g est continue composante par composante, donc est continue sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Tout ce que nous avons écrit là vaut également pour les applications définies sur $K_n[X]$.

Une fois que nous avons la continuité de toutes les fonctions puissances, nous avons aussi la continuité de toutes les applications polynomiales, en tant que sommes de puissances. Ainsi les applications :

$$M \mapsto M^3 - 2M^2 + M, \quad P \mapsto P^4 + (P')^2$$

sont continues sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ respectivement (pour $P \mapsto (P')^2$ encore faut-il composer avec la dérivation convenablement : nous vous laissons écrire les détails). Plus généralement, pour tout polynôme $P \in K[X]$ *fixé*, l'application :

$$\tilde{P}_{\mathrm{mat}} : \begin{cases} \mathrm{M}_n(K) & \to & \mathrm{M}_n(K) \\ M & \mapsto & P(M) \end{cases}$$

est continue. C'est très utile si l'on peut interpréter P comme un polynôme annulateur d'une suite de matrices, par exemple.

Mise en garde 3. Une erreur très fréquente est de dire que $M \mapsto M^2$ (par exemple) s'obtient en composant $M \mapsto (M, M)$ et $(M, M) \mapsto M^2$, en disant ensuite que la première est linéaire et la seconde linéaire ou bilinéaire selon votre humeur... Mais c'est totalement incorrect à deux égards :

— si vous considérez que la deuxième application est définie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors elle est MAL définie : en effet, il faudrait expliquer ce qu'est l'image par cette application de TOUT couple de matrices (A, B), pas seulement pour deux matrices égales ;

— si vous considérez qu'elle est définie sur $\{(M, M) \mid M \in \mathrm{M}_n(K)\}$ (qui est effectivement un espace vectoriel de dimension finie, quoique inhabituel...), alors elle N'est PAS linéaire DU TOUT, comme on le voit en reprenant les calculs de la mise en garde 1. ← page 2

Restez-en à l'approche proposée.

1.4 Cas particulier fréquent : le polynôme caractéristique

Lorsque nous parlons de continuité du polynôme caractéristique, nous ne parlons bien sûr pas de la continuité de l'application $\lambda \mapsto \chi_M(\lambda)$, qui est évidente (il s'agit d'une application polynomiale sur $\mathbb{R}$: tout ce qu'il y a de plus classique). Là, il s'agissait de faire varier le réel λ : mais que se passe-t-il *si l'on fait plutôt varier la matrice* ? Autrement dit, pour $\lambda \in K$ **fixé**, on s'intéresse à la continuité sur $\mathrm{M}_n(K)$ de l'application :

$$M \mapsto \chi_M(\lambda).$$

Pour cela, vous notez que le polynôme caractéristique s'écrit à l'aide du déterminant, que l'on sait être continu... Mais il faut être plus précis, en revenant à la définition qu'on a donnée : $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - M) = \det \circ f(M)$ où l'on a posé $f(M) = \lambda \mathrm{I}_n - M$ pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(K)$. On invoque alors la continuité par composition du déterminant et de f (qui rentre dans la catégorie « application presque linéaire », abordée page 3). ← page 3

La question du polynôme caractéristique est une question tout à fait essentielle pour savoir, par exemple, si le fait d'avoir λ pour valeur propre est une propriété « qui se préserve par passage à la limite » (en l'occurrence : oui).

2 Applications linéaires : cas de la dimension infinie

On rencontre en général cette situation lorsqu'on étudie des fonctions ou polynômes. On donne quelques exemples d'applications linéaires pouvant nous intéresser dans ce cas-là page 7. → page 7

En dimension infinie nous ne savons pas *a priori* si une application linéaire est continue ou non. Tout peut arriver. *En théorie* rien n'est exigible en dimension infinie, mais vous avez tous les outils théoriques à disposition pour démontrer et utiliser la continuité dans ce cas-là : on peut donc vous interroger là-dessus.

Néanmoins, je n'ai pas d'exemple récent, ni à l'écrit ni à l'oral, où l'on vous fait **contredire** la continuité d'une application linéaire en dimension infinie. Je n'en parle que pour la culture scientifique et par souci d'exhaustivité.

2.1 Démontrer la continuité d'une application linéaire

Il n'y a qu'une seule approche pour démontrer la continuité d'une application linéaire **en dimension infinie**, et c'est finalement la même que celle utilisée en cours pour montrer la continuité en dimension finie :

> Pour démontrer la continuité d'une application **linéaire** en dimension infinie (ou non connue) : montrez qu'elle est lipschitzienne !

Concrètement, vous devez donc majorer $\|f(\vec{x})\|_F$ pour tout $\vec{x} \in E$ par $\|\vec{x}\|_E$, à une constante près. Concentrez-vous sur le « **comment** » de cette affirmation, et la constante K viendra naturellement ensuite : ne tentez pas de la deviner *a priori.*

Cette méthode DOIT marcher (quand c'est continu), parce qu'une application *linéaire* continue est TOUJOURS LIPSCHITZIENNE (ce qui n'est pas le cas de toute application continue : par exemple l'exponentielle est continue mais non lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, sinon elle serait dominée par une fonction affine).

Pour ceux qui veulent comprendre pourquoi une application linéaire continue sur E est nécessairement lipschitzienne : elle est en particulier continue en $\vec{0}$, donc par définition de la continuité (avec $\varepsilon = 1$) il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\vec{x} \in E$, l'inégalité $\|\vec{x} - \vec{0}\| \leqslant \eta$ implique $\|f(\vec{x}) - f(\vec{0})\| \leqslant 1$. Je rappelle que cette définition reflète quelque chose d'intuitif : dire que f est continue en $\vec{0}$ signifie que lorsque $\vec{x}$ est près de $\vec{0}$, $f(\vec{x})$ est aussi près de $f(\vec{0})$. Ces quantificateurs servent à formaliser ce que veut dire « être près ».
Ceci étant dit, on a donc : $\forall \vec{x} \in E$, $\|\vec{x}\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(\vec{x})\| \leqslant 1$, étant donné que $f(\vec{0}) = \vec{0}$ pour une application linéaire. Or, pour tout vecteur $\vec{x}$ *non nul*, si l'on pose : $\vec{y} = \frac{\eta}{\|\vec{x}\|}\vec{x}$ (on « diminue la taille de $\vec{x}$ » pour le « rendre suffisamment près » de $\vec{0}$) , on a : $\|\vec{y}\| = \eta \leqslant \eta$, donc en appliquant ce qui précède : $\|f(\vec{y})\| \leqslant 1$. En écrivant que $f(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}\|}{\eta} f(\vec{y})$, on en déduit : $\|f(\vec{x})\| \leqslant \frac{1}{\eta}\|\vec{x}\|$. Ce résultat est aussi vrai si $\vec{x} = \vec{0}$, trivialement. Ainsi f est $\frac{1}{\eta}$-lipschitzienne, ce qu'on voulait démontrer.
En analysant plus finement cette démonstration, on peut en tirer un résultat incroyable : une application linéaire est continue sur E si et seulement si elle est continue en $\vec{0}$.

Exemple 3. Si l'on munit un espace préhilbertien E de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ associée à son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors pour tout $\vec{y} \in E$ fixé l'application $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ est TOUJOURS continue sur $(E, \|\cdot\|_2)$. Elle est en effet $\|\vec{y}\|_2$-lipschitzienne d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
On a aussi la continuité de l'application bilinéaire $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ sur $E \times E$ pour une norme convenable, mais il faut un peu plus travailler (toujours à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Cet exemple est très utile parce que de nombreuses applications sont des produits scalaires déguisés : **y penser notamment en présence d'une intégrale**.

Appliquez cette stratégie pour traiter l'exercice suivant.

Exercice 2. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose : $\forall x \in [-1,1]$, $\tilde{f}(x) = f(-x)$.

1. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto \tilde{f}$ est continue sur E pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.
2. En déduire que l'ensemble des fonctions continues et paires sur $[-1,1]$ est une partie fermée de E pour ces trois normes, et de même pour l'ensemble des fonctions continues et impaires sur $[-1,1]$.

2.2 ☢ Contredire la continuité d'une application linéaire

Notons que d'après l'encart ci-dessus, on peut déduire facilement le principe suivant : pour montrer qu'une application **linéaire** n'est pas continue, il faut et il suffit de démontrer qu'elle est pas continue en

$\vec{0}$. Pour ce faire, on contredit la caractérisation séquentielle de la continuité. Notons que $f(\vec{0}) = \vec{0}$ si f est linéaire. Ce qui donne déjà une **première méthode, qu'on utilise toutefois peu** :

Pour montrer qu'une application **linéaire** f n'est pas continue, on construit une suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ telle que :
$$\vec{u}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \vec{0} \text{ et } f(\vec{u}_n) \underset{n\to+\infty}{\not\to} \vec{0}.$$

Une deuxième méthode, plus simple dans plusieurs cas : en adaptant la démonstration de l'encart ci-dessus, on peut montrer qu'une application linéaire est continue sur E si et seulement si elle est bornée sur la boule unité fermée.

Exercice 3. Démontrer cette affirmation. Le théorème des bornes atteintes n'est pas utilisable : il n'est vrai qu'en dimension **finie**.

On n'a pas besoin de l'équivalence pour en déduire un moyen de contredire la continuité. Seule l'implication directe suffit, ou plutôt sa contraposée : s'il existe une suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\|\vec{u}_n\| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire à valeurs dans la boule unité fermée) et $\|f(\vec{u}_n)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors nous avons démontré que f n'est pas bornée sur la boule unité, et n'est donc pas bornée.

En vérité, on peut même être moins exigeant : si $\|\vec{u}_n\| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où M est un réel positif quelconque, alors quitte à diviser $\vec{u}_n$ par M on obtient une suite à valeurs dans la boule unité, et l'image par f de cette nouvelle suite est toujours de norme arbitrairement grande grâce à la linéarité de f et l'homogénéité de la norme. En résumé, voici une **deuxième méthode plus souple** :

> Pour montrer qu'une application **linéaire** f n'est pas continue, on construit une suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ bornée telle que $\|f(\vec{u}_n)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Un avantage de cette méthode, par rapport à la première, est que vous n'avez absolument pas besoin de construire une suite qui converge : c'est moins contraignant, en dimension infinie on ne voit pas forcément aisément qu'une suite converge. Pensez aux exemples de suites et séries de fonctions, pour vous en convaincre ! Alors que vérifier qu'une suite est bornée est plus facile.

Exemple 4. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\|P\| = \max_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Montrons que l'application $\delta : P \mapsto P'$ n'est pas continue pour cette norme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|X^n\| = \max_{x\in[0,1]} |x^n| = 1$, donc la suite $(X^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée ; mais pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :
$$\|\delta(X^n)\| = \|nX^{n-1}\| = n\|X^{n-1}\| = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
donc d'après ce qui précède on en déduit que δ n'est pas continue.

2.3 Les cas particuliers les plus fréquents

Les espaces de dimension infinie les plus souvent rencontrés sont les espaces de fonctions et $K[X]$. Dans le cas des espaces de fonctions, il est de bon ton d'avoir étudié au moins une fois la continuité des applications suivantes, selon que la norme soit $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$, et selon qu'on soit sur un segment ou non :
$$\delta : f \mapsto f', \quad \mathscr{I} : f \mapsto \int_I f, \quad \mathscr{P} : f \mapsto F, \quad \varepsilon_\alpha : f \mapsto f(\alpha) \quad \text{avec } \alpha \in I \text{ fixé,} \tag{4}$$
où F est l'unique primitive de f s'annulant en un certain point de I. C'est étudié avec énormément d'exhaustivité dans l'exercice suivant (les noms de ces fonctions ne sont bien sûr que des fantaisies de votre serviteur, que j'introduis afin de les citer rapidement). Si vous le faites intégralement, il sera difficile de vous prendre au dépourvu sur ce genre de question.

☢ **Exercice 4.** Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur [0,1]. Pour étudier la continuité de $\delta : E \to E$ et $\mathscr{P} : E \to E$ dans ce qui suit, nous munissons systématiquement E de la même norme au départ et à l'arrivée. Pour $\mathscr{I}$ et ε_α, qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, nous prenons bien sûr la valeur absolue classique à l'arrivée.

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0{,}1]$, $f_n(t) = (\sin(\pi n t))^2$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\delta(f_n)\|_1$, et en déduire que δ n'est pas continue sur E si on le munit de la norme $\|\cdot\|_1$. S'inspirer de ce choix de fonctions pour montrer que δ n'est pas continue non plus au sens de la norme $\|\cdot\|_2$.
2. À l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que $\mathscr{I}$ est 1-lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_1$, et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer qu'elle est 1-lipschitzienne également pour la norme $\|\cdot\|_2$.
3. Montrer que $\mathscr{I}$ est 1-lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0{,}1]$, $f_n(t) = \frac{1}{t+n+1}$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mathscr{P}(f_n)\|_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que $\mathscr{P}$ n'est pas continue sur E si on le munit de la norme $\|\cdot\|_1$. S'inspirer de ce choix de fonctions pour montrer que $\mathscr{P}$ n'est pas continue non plus au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ ni pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (changer n en autre chose dépendant de n pour avoir $\|\mathscr{P}(f_n)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$).
5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0{,}1]$, $f_n(t) = t^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\|f_n\|_1$, $\|f_n\|_2$ et $|\varepsilon_1(f_n)|$: en déduire que l'application ε_1 n'est pas continue au sens de la norme $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$: adapter le raisonnement à ε_α pour tout $\alpha \in [0{,}1]$.
6. Montrer que pour tout $\alpha \in [0{,}1]$, l'application ε_α est continue au sens de $\|\cdot\|_\infty$.

Nous résumons la variété des situations dans ce tableau :

Continuité ?	$I = [0{,}1]$		
Normes	$\|\cdot\|_1$	$\|\cdot\|_2$	$\|\cdot\|_\infty$
δ	Non	Non	Non
$\mathscr{I}$	Oui	Oui	Oui
$\mathscr{P}$	Non	Non	Oui
ε_α	Non	Non	Oui

Dans la mise en garde 2, nous disions qu'on ne peut pas justifier la continuité d'une application définie sur $K[X]$ en disant à tort qu'elle est polynomiale (sous prétexte que sa variable est un polynôme). L'exercice suivant donne plusieurs exemples d'applications sur $\mathbb{R}[X]$ qui ne sont pas continues. ← page 3

Exercice 5. Étudions la continuité sur $\mathbb{R}[X]$ des applications ∂, $\mathscr{I}$, $\mathscr{P}$ et ε_α définies ci-dessus, pour les normes définies par les formules :

$$\forall P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^i \in \mathbb{R}[X], \quad \mathrm{N}_1(P) = \sum_{i=0}^{\deg(P)} |a_i|, \quad \mathrm{N}_\infty(P) = \max_{i \in [\![0,\deg(P)]\!]} |a_i|.$$

On prend $I = [0{,}1]$ dans tout ce qui suit, pour la définition de $\mathscr{I}$. Dans le cas de $\partial : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{P} : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, la norme est toujours la même au départ et à l'arrivée. Pour $\mathscr{I}$ et ε_α, l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ et la norme est bien entendu la valeur absolue.

1. Montrer que ∂ n'est continue ni pour N_1 ni pour N_∞, à l'aide de la suite $(X^n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que $\mathscr{P}$ est 1-lipschitzienne au sens de la norme N_∞, mais que $\mathscr{I}$ ne l'est que si $I \subseteq [-1{,}1]$ (prenez pour I un intervalle borné, sinon $\mathscr{I}$ n'est pas correctement définie). Dans le cas contraire, construire une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ bornée au sens de N_1, telle que $|\mathscr{I}(P_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et en déduire que $\mathscr{I}$ n'est pas continue si $I \not\subseteq [-1{,}1]$.
3. Aboutir aux mêmes conclusions pour la norme N_1.
4. On suppose $\alpha \notin [-1{,}1]$. Montrer que $|\varepsilon_\alpha(X^n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et en déduire que ε_α n'est pas continue au sens de N_1 et N_∞ pour tout $\alpha \notin [-1{,}1]$.
5. On suppose $\alpha \in [-1{,}1]$. Montrer que ε_α est 1-lipschitzienne (donc continue) au sens de la norme N_1.
6. Montrer que si $\alpha \in]-1{,}1[$, alors ε_α est $\frac{1}{1-|\alpha|}$-lipschitzienne donc continue au sens de la norme N_∞, mais que si $\alpha \in \{-1{,}1\}$ alors la suite $\left(\sum_{i=0}^{n} X^i\right)_{n\geqslant 0}$ contredit la continuité de ε_α au sens de la norme N_∞.

Continuité ?	N_1	N_∞
∂	Non	Non
$\mathscr{I}$	Oui si $I \subseteq [-1{,}1]$, non sinon	Oui si $I \subseteq [-1{,}1]$, non sinon
$\mathscr{P}$	Oui	Oui
ε_α	Oui si $\alpha \in [-1{,}1]$, non sinon	Oui si $\alpha \in]-1{,}1[$, non sinon

3 À quoi sert la continuité ? (pour les incrédules)

Je ne parle ici que de l'utilisation de la continuité pour les applications définies sur un espace vectoriel normé autre que $\mathbb{R}$. Je n'y ferai donc pas mention du théorème des valeurs intermédiaires et autres théorèmes de 1re année. Nous utiliserons la continuité pour :
— passer à la limite « comme on pense » (paragraphe ci-dessous) ;
— étendre des identités (surtout matricielles) ; → page 11
— montrer qu'une application de plusieurs variables est bornée. → page 14
Elle sert également à démontrer que des ensembles sont fermés (ce qui est en fait lié au paragraphe ci-dessous) ou ouverts.

3.1 Pour passer à la limite « comme on pense »

Il apparaît souvent des questions où l'on se demande si une certaine propriété passe à la limite ou non : est-ce qu'une limite de suite :
— de matrices orthogonales (voir chapitre sur les espaces euclidiens) reste orthogonale ? (oui)
— de matrices symétriques reste symétrique ? (oui)
— de matrices inversibles reste inversible ? (non)
— de polynômes scindés de $\mathbb{R}_p[X]$ reste scindé ? (oui, mais c'est difficile à démontrer)
— etc.

Ces questions se ramènent à une question de continuité :

1. On traduit la propriété qu'on veut vérifier en une égalité ou inégalité ($M^\top M = \mathrm{I}_p$, $M^\top = M$, etc.).
2. On sait que cette propriété est vérifiée par les éléments de la suite, donc elles vérifient l'(in)égalité en question. On se demande alors si on peut simplement passer à la limite « comme on pense » pour en déduire que la limite vérifie aussi l'(in)égalité.

Ce passage à la limite « comme on pense » (si $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$, est-ce que $M_n^\top M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M^\top M$?) est un problème pouvant se mettre sous la forme :

$$\heartsuit_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \heartsuit \implies \clubsuit_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \clubsuit, \qquad \text{qu'on réécrit :} \quad \heartsuit_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \heartsuit \implies f(\heartsuit_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\heartsuit).$$

où f est une application. **C'est la caractérisation séquentielle de la continuité** : cette implication est toujours vérifiée **si et seulement si f est continue**. C'est donc généralement ce qu'il faut vérifier pour justifier que le passage à la limite est licite.

Comment identifier la fonction dont on doit vérifier la continuité ? Vous commencez par écrire le passage à la limite qu'on a envie de faire, sous la forme d'une implication :

$$\heartsuit_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \heartsuit \implies \clubsuit_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \clubsuit,$$

puis vous exprimez $\clubsuit_n$ en fonction de $\heartsuit_n$; alors, vous écrivez FAUSSEMENT que l'application est $f : \heartsuit_n \mapsto \clubsuit_n$; vous RECTIFIEZ (l'argument ne peut pas être une suite) en **remplaçant tout ce qui est indexé (par n) par une variable générique** (M si on est sur $\mathrm{M}_p(K)$, P si on est sur $K_n[X]$, etc.). Les exemples seront plus parlants.

Ensuite, il reste à justifier la continuité de f par les méthodes de la section précédente. Par caractérisation séquentielle de la continuité, notre passage à la limite est correct.

Exemple 5. Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ qui converge vers un polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ qui soit racine au moins double de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Est-ce que α est aussi racine au moins double de P ?

On commence par traduire en termes d'égalités ce qui est demandé. Demander que α soit une racine au moins double de P signifie :

$$P(\alpha) = 0, \quad P'(\alpha) = 0. \tag{5}$$

Or par hypothèse α est une racine au moins double de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on sait qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(\alpha) = 0, \quad P_n'(\alpha) = 0. \tag{6}$$

Le raisonnement naturel serait alors de passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans les égalités (6), pour obtenir (5). On se demande alors : est-il vrai qu'on a $P_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(\alpha)$ et $P_n'(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P'(\alpha)$ « comme on pense » ? Suivant le conseil ci-dessus, on commence par écrire sous la forme d'une implication les passages à la limite à justifier :

$$P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P \Longrightarrow P_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(\alpha), \quad \text{et :} \quad P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P \Longrightarrow P_n'(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P'(\alpha),$$

que nous analysons comme indiqué pour identifier les applications continues en jeu :

$$P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P \Longrightarrow P_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(\alpha), \qquad \text{et} \qquad P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P \Longrightarrow P_n'(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P'(\alpha).$$

l'argument de f l'image par f l'argument de g l'image par g

$$\begin{tikzcd} \text{(définition à rectifier)} & \boxed{P_n \mapsto P_n(\alpha)} \arrow[d, "\text{(on change } P_n \text{ en } Q)"'] \\ \text{(bonne définition de } f) & \boxed{Q \mapsto Q(\alpha)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \text{(définition à rectifier)} & \boxed{P_n \mapsto P_n'(\alpha)} \arrow[d, "\text{(on change } P_n \text{ en } Q)"'] \\ \text{(bonne définition de } g) & \boxed{Q \mapsto Q'(\alpha)} \end{tikzcd}$$

On voit que si l'on pose : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f(Q) = Q(\alpha)$, $g(Q) = Q'(\alpha)$ (j'appelle Q la variable, parce que la lettre P est déjà prise), alors nos passages à la limite reviennent à dire que si $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P$, alors $f(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(P)$ (en effet, par définition de f, on a $f(P_n) = P_n(\alpha)$ et $f(P) = P(\alpha)$) et $g(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(P)$ (en effet, par définition de g, on a $g(P_n) = P_n'(\alpha)$ et $g(P) = P'(\alpha)$). Notre méthode fut pertinente.

Voyez que si vous n'écrivez pas proprement l'implication, mais seulement le dernier passage à la limite, vous pouvez vous tromper sur l'argument : combien parmi vous auraient pris pour applications $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto P'(x)$?

Il est clair que f et g sont continues, puisqu'elles sont linéaires sur $\mathbb{R}_p[X]$ qui est de dimension finie. En effet : $\forall (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_p[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(Q_1 + \lambda Q_2) = (Q_1 + \lambda Q_2)(\alpha) = Q_1(\alpha) + \lambda Q_2(\alpha)$. De même pour g. On en déduit, par caractérisation séquentielle, que $f(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(P)$ et $g(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(P)$, c'est-à-dire : $P_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(\alpha)$, et : $P_n'(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P'(\alpha)$. Ainsi, prendre $n \to +\infty$ dans les égalités (6) donne bien : $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$, comme désiré. Le polynôme P admet bien α comme racine au moins double, ce qu'il fallait démontrer.

Exemple 6. Considérons une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de vecteurs colonnes de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, où : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, et : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$, et la réduction nous permet de calculer A^n explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}$. En l'occurrence, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0 = P \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} X_0, \text{ où : } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Seulement, calculer A^n peut induire des calculs spécialement coûteux, d'autant plus inutiles si les coordonnées de X_n ne nous intéressent pas tant que cela, mais seulement leurs valeurs limites. Ainsi :

Est-il possible de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \lim\limits_{n\to+\infty} A^n X_0$ sans faire le produit matriciel ci-dessus ?

La réponse semble affirmative. Il suffit en effet de prendre la limite de D^n quand $n \to +\infty$ composante par composante (j'appelle D la matrice diagonale ci-dessus), et de multiplier le résultat obtenu par P et $P^{-1}X_0$. Comme :

$$D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on se retrouve avec une matrice dont presque tous les coefficients sont nuls, et le produit matriciel devient terriblement simple. Là où se pose toutefois une question : a-t-on vraiment $X_n = A^n X_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} PLP^{-1}X_0$ sous prétexte que $D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$? Réécrit autrement, nous allons voir qu'il s'agit d'un problème de continuité. On veut en effet écrire :

$$D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \Longrightarrow PD^nP^{-1}X_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} PLP^{-1}X_0.$$

Une telle implication évoque la caractérisation séquentielle de la continuité. Mais de quelle fonction ? On utilise la méthode ci-dessus pour la définir :

$$D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \Longrightarrow PD^nP^{-1}X_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} PLP^{-1}X_0,$$

$\boxed{\text{l'argument de } f}$ $\boxed{\text{l'image par } f}$

$$\begin{array}{rc} \text{(définition à rectifier)} & \boxed{D^n \mapsto PD^nP^{-1}X_0} \\ \text{(on change } D^n \text{ en } M\text{)} & \big\downarrow \\ \text{(bonne définition de } f\text{)} & \boxed{M \mapsto PMP^{-1}X_0} \end{array}$$

Posons donc : $\forall M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = PMP^{-1}X_0$. L'application f est linéaire sur $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ (vérification facile), qui est de dimension finie, donc f est continue. Ainsi, par caractérisation séquentielle de la limite, le fait que $D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ implique $f(D^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(L)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} X_n = A^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} PLP^{-1}X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vous en conviendrez, le calcul est d'une simplicité enfantine, par rapport à celui qui nous aurait attendus dans (7). On en déduit que les coordonnées de X_n (que je note : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$) vérifient : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, et : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$.

Cette situation est très classique dans l'étude des chaînes de Markov (chapitre de probabilités), où seule une probabilité asymptotique nous intéresse (pour avoir la probabilité qu'un évènement se réalise au moins une fois par exemple, avec le théorème de continuité croissante).

3.2 Pour étendre des identités (surtout matricielles)

Une utilisation magnifique de la continuité est le prolongement des identités. Vous le savez déjà, pour une fonction de la variable réelle : si nous avons une fonction f « compliquée » mais continue sur $[a, b]$, et telle que, pour tout $x \in]a, b]$ (notez la différence avec le domaine de continuité), on ait :

$$f(x) = g(x),$$

où g est une fonction « simple » et aussi continue, alors on peut montrer que l'identité reste valable quand $x = a$ par passage à la limite. En effet, quand on fait tendre x vers a par valeurs supérieures, la limite en a de ces fonctions est égale à leur valeur en a par définition de la CONTINUITÉ en a, et donc : $f(a) = g(a)$.

En général, nous utilisons ce résultat dans le cas où f est une intégrale à paramètre, continue sur $[a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b]$, dont le calcul de la dérivée permet de trouver une expression simple $f(x) = g(x)$ pour $x \in]a, b]$. Cela se produit aussi dans le cas où f est une somme de série entière dont nous voulons étendre l'expression (trouvée par une dérivation ou intégration terme à terme par exemple) aux extrémités de son intervalle ouvert de convergence. C'est ainsi que nous démontrerons, dans le chapitre sur les séries entières :

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}, \quad \pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

en partant des développements en série entière en 0 de $x \mapsto \ln(1 + x)$ et de l'arc tangente qui n'étaient *a priori* valables que sur $] - 1,1[$.

Ces rappels ayant été effectués, la topologie nous permet d'étendre cette méthode de prolongement des identités à TOUS TYPES D'ÉGALITÉS dans des espaces vectoriels normés, à commencer par :

— les espaces de fonctions ;
— les espaces de matrices.

Au vu des outils à disposition des élèves de PSI, c'est surtout dans le cas des matrices que cette stratégie est utilisée, et que je la développe à présent. Mais je donne plus bas un exercice où j'applique la méthode aux fonctions.

Un certain nombre d'identités matricielles, telles que :

$$\forall (A, B, C, D) \in (\mathrm{M}_p(K))^4\,,\ CD = DC \Longrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC), \tag{8}$$

$$\forall (A, B) \in (\mathrm{M}_p(K))^2\,,\ \chi_{AB} = \chi_{BA}, \tag{9}$$

ou encore :

$$\forall A \in \mathrm{M}_p(K),\ \chi_A(A) = 0_{\mathrm{M}_p(K)} \quad \text{(le théorème de Cayley-Hamilton !)}, \tag{10}$$

sont difficiles à démontrer dans le cas général, mais plus faciles (voire triviales) avec des hypothèses supplémentaires :

— l'égalité (8) est plutôt facile à démontrer quand D est INVERSIBLE, en écrivant $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ comme un produit de matrices triangulaires par blocs (exercice) ;
— l'égalité (9) découle rapidement de la multiplicativité du déterminant quand A ou B est INVERSIBLE ;
— l'égalité (10) est presque immédiate lorsque A est DIAGONALISABLE, en utilisant le fait qu'elle soit triviale pour une matrice diagonale.

L'idée est alors d'obtenir l'égalité *pour toute* matrice par un passage à la limite.

Plus précisément, la stratégie d'extension des identités matricielles, utilisant la continuité, se décompose en trois étapes (parfois présentées dans un ordre contraire) :

1. **On montre l'identité désirée pour toute matrice d'un ensemble F « simple »**. En général, F est l'un de ces deux ensembles :
— l'ensemble des matrices inversibles ;
— l'ensemble des matrices *complexes* diagonalisables.
Il existe d'autres possibilités (l'ensemble des matrices semblables à une matrice compagnon), mais vous les croiserez moins.
2. On montre que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_p(K)$, **il existe une suite de matrices $(A_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans F telles que :** $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ (on dit dans ce cas que F est *dense* dans $\mathrm{M}_p(K)$). Vous pouvez en général construire explicitement une telle suite.
3. Soit $A \in \mathrm{M}_p(K)$ et soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in F^{\mathbb{N}}$ telle que : $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$. Comme $A_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'on a montré à la première étape que toute matrice de F vérifie l'identité désirée, **on peut en particulier écrire cette identité pour A_n ; on prend alors $n \to +\infty$ dans l'égalité en question**. Alors, par un argument de CONTINUITÉ (et plus précisément la caractérisation séquentielle de la continuité : voir le début de cette section), on en déduit qu'on peut remplacer A_n par A dans l'identité : d'où le résultat.

Exemple 7. Démontrons l'identité (9) pour toutes matrices A et B, **lorsque A est inversible**, puis illustrons la méthode de cette section.

Le fait de supposer A inversible permet de factoriser par A, puis d'utiliser la multiplicativité du déterminant. La clé est que même si les matrices ne commutent pas, leurs déterminants commutent (car ce sont des nombres réels ou complexes), ce qui permet d'écrire pour tout $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned}\det(\lambda \mathrm{I}_p - AB) = \det\left(A\left(\lambda A^{-1} - B\right)\right) = \det(A)\det\left(\lambda A^{-1} - B\right) = \det\left(\lambda A^{-1} - B\right)\det(A) &= \det\left(\left(\lambda A^{-1} - B\right)A\right)\\ &= \det(\lambda \mathrm{I}_p - BA),\end{aligned}$$

donc : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, pour toutes matrices A et B **telles que A soit inversible**. À présent, pour montrer que c'est vrai y compris si A n'est pas inversible : on dit qu'il existe une suite de matrices inversibles $(A_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers A (à savoir démontrer). Soit $\lambda \in K$. Comme A_n est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$, le résultat ci-dessus est vrai pour A_n et B, et on peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \chi_{A_nB}(\lambda) = \chi_{BA_n}(\lambda). \tag{$*$}$$

Or les applications $M \mapsto \chi_{MB}(\lambda)$ et $M \mapsto \chi_{BM}(\lambda)$ sont continues sur $\mathrm{M}_p(K)$ (revoir la section 1.4 si l'on ne parvient pas à le démontrer ! c'est très important !), donc elles sont séquentiellement continues et on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \chi_{A_nB}(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \chi_{BA_n}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$. Ainsi l'égalité ($*$) devient, quand $n \to +\infty$: $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$. Ceci vaut pour tout $\lambda \in K$, donc : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, d'où le résultat.

En soi, la stratégie ci-dessus se généralise à n'importe quel espace vectoriel normé. C'est simplement plus difficile de trouver des sous-ensembles denses en général. Nous donnons un exemple dans l'exercice suivant, que nous appliquons à la détermination du supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ dans un espace de fonctions.

Exercice 6. (l'orthogonalité à tout polynôme implique l'orthogonalité à toute fonction) Cet exercice nécessite d'avoir vu le chapitre sur les séries entières. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et soit E l'espace vectoriel des fonctions développables en série entière sur I.

1. Soit $f \in E$, et soit $[a, b]$ un segment inclus dans I. Montrer qu'il existe une suite d'applications polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 0}$ définies sur $[a, b]$, qui converge vers $f_{|[a,b]}$ au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (c'est-à-dire, qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f). Penser à introduire la somme de série entière égale à f.

On cherche à présent les applications $f \in E$ qui vérifient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{$*$}$$

2. Montrer que si $f \in E$ vérifie $(*)$, et si $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'applications polynomiales définies sur $[a,b]$ qui converge vers $f_{|[a,b]}$ au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (une telle suite existe d'après la première question), alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b P_n(x)f(x)\mathrm{d}x = 0.$$
3. Soit $f \in E$. Montrer que l'application $g \mapsto \displaystyle\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathrm{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$: on montrera qu'elle est lipschitzienne.
4. Déduire de tout ce qui précède que si $f \in E$ vérifie $(*)$, alors : $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x = 0$ (*on pourrait aussi traiter cette question sans la précédente, mais en la remplaçant par un théorème d'interversion limite-intégrale*).
5. Conclure.

Nous avons ici démontré que si E est l'espace vectoriel des fonctions développables en série entière sur un intervalle I contenant 0, que l'on munit du produit scalaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ où $[a,b]$ est inclus dans l'intérieur de I, alors : $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0_E\}$. En particulier : $\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}[X]^\perp = \mathbb{R}[X] \neq E$, ce qui fournit un contre-exemple à la décomposition en somme directe $F \oplus F^\perp = E$ dans le cas où F n'est pas de dimension finie.

Le résultat de cet exercice reste vrai si l'on remplace E par l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$, mais il devient plus difficile de démontrer qu'une fonction $f \in E$ est la limite d'une suite d'applications polynomiales au sens de la norme infinie : c'est un théorème dû à Weierstraß. Il est démontré *via* une méthode probabiliste dans le sujet de Mathématiques 2 de Mines-Ponts 2019, filière PSI (le sujet qui était faisable), mais en admettant un résultat « d'uniforme continuité ».

3.3 Pour montrer qu'une application de plusieurs variables est bornée

Nous voyons dans le cours qu'en dimension **finie**, une application à valeurs réelles et continue sur un **fermé borné** est bornée, et atteint ses bornes. L'hypothèse « fermé borné » remplace le segment du théorème des bornes atteintes vu en 1re année.

C'est avantageux parce qu'on nous demandera souvent de démontrer l'existence d'extremums pour des fonctions de plusieurs variables, au chapitre de calcul différentiel, mais on ne peut pas s'en sortir par un gentil tableau de variations comme dans le cas d'une seule variable. Cet argument sera souvent le seul à notre disposition pour démontrer le caractère borné. Il restera ensuite à trouver ces extremums par étude des points critiques. Voir aussi la section 4 (*Recherche des extremums*) du document *Méthodes* du chapitre de calcul différentiel.

Application utile : rendre triviale l'hypothèse de domination pour les intégrales à paramètres sur un segment. Si nous avons une intégrale à paramètre dont nous devons étudier la continuité ou classe C^1, de la forme :
$$g : \begin{cases} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{cases}$$
où l'intervalle d'intégration est un SEGMENT $[a,b]$ (en particulier cela ne s'applique pas à $]a,b]$ ou $[a,b[$, **attention aux éventuelles discontinuités** de l'intégrande aux extrémités !), et $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une application continue ou de classe C^1 sur $I \times [a,b]$, alors la vérification des hypothèses des théorèmes de régularité des intégrales à paramètres est très facile, comme nous allons le voir.

Pour montrer la continuité de g sur I, voici comment procéder :

1. Cas où $I = [c,d]$ est aussi un segment :

- la continuité (par morceaux) sur $[a, b]$ de $t \mapsto f(x, t)$ pour tout $x \in [c, d]$, et la continuité sur $[c, d]$ de $x \mapsto f(x, t)$ pour tout $t \in [a, b]$, découlent de la continuité sur $[c, d] \times [a, b]$ de f : il suffit pour cela de composer f avec $(x, t) \mapsto t$ et $(x, t) \mapsto x$ (qui sont continues car polynomiales) ;
- pour l'hypothèse de domination (c'est là que c'est intéressant) : comme f est continue sur le fermé borné $[c, d] \times [a, b]$ (ensemble fermé car défini par des inégalités larges, et borné car les coordonnées x et t sont bornées entre c et d, et a et b respectivement), le théorème des bornes atteintes permet d'en déduire qu'elle est bornée par une constante qu'on appelle M ; on a alors :

$$\forall (x, t) \in [c, d] \times [a, b], \quad |f(x, t)| \leqslant M \quad (\text{hypothèse de domination})$$

  et l'application $t \mapsto M$ est continue (par morceaux) sur le segment $[a, b]$, donc intégrable. Notez qu'on n'a pas du tout besoin d'expliciter M, c'est un grand avantage !

Toutes les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale sont vérifiées, donc l'application $g : x \mapsto \int_a^b f(x, t)\mathrm{d}t$ est continue sur $[c, d]$ (l'intégrabilité sur $[a, b]$ de $t \mapsto f(x, t)$ pour tout $x \in [c, d]$ était acquise dès le début, par continuité sur un segment).

2. Cas où I n'est pas un segment : vous vérifiez les hypothèses sur tout segment $[c, d]$ inclus dans I : comme $[c, d] \times [a, b] \subseteq I \times [a, b]$, la continuité de f sur $I \times [a, b]$ implique aussi la continuité sur $[c, d] \times [a, b]$.

Pour la classe C^1, vous en faites de même en utilisant la continuité de $(x, t) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sur $I \times [a, b]$.

Mise en garde 4. Puisque la réduction à des segments n'est possible que pour la variable par rapport à laquelle on étudie la régularité (le « paramètre »), et non pour la variable d'intégration, on oublie cette méthode lorsque l'intervalle d'intégration n'est pas un segment :

> L'intervalle d'intégration doit être un segment à tout prix ! N'osez même pas invoquer cet argument si c'est uniquement « l'autre » intervalle en jeu qui est un segment !

Or nous avons rencontré une majorité d'intégrales à paramètres sur $]0, +\infty[$ ou $]0,1]$, donc la méthode montre ses limites. Question de bon sens : s'il y avait un argument aussi efficace, nous vous le présenterions dès le début.

Table des matières

Table des figures