Méthodes (PSI) – Suites et séries de fonctions

1 ✓ L'art de la majoration – lecture indispensable

Puisque ce chapitre est particulièrement exigeant dans la qualité des majorations produites (pour l'hypothèse de domination, pour majorer des normes infinies, etc.), vous ne pouvez pas vous contenter de vos difficultés en la matière. Lisez le document *L'art de la majoration* (qui peut d'ailleurs vous servir pour tout chapitre d'analyse). Je détaille plus bas ce qui me semble à revoir en vue de **ce** chapitre.

1.1 ✓ Inégalités sur un quotient de fonctions

Tout revoir. Vous ne devriez pas vous tromper dès la présence d'un dénominateur, c'est censé être facile pour quiconque de précautionneux.

1.2 ✓ Inégalités avec les puissances

S'attarder surtout sur la façon d'utiliser une interprétation graphique pour retrouver facilement toutes les propriétés des fonctions puissances (en particulier : comment les comparer, en songeant aux différences selon qu'on soit proche de 0 ou non).

1.3 Inégalités avec les valeurs absolues

Retenir les encadrés concernant les mauvais usages (majorer « dans » les valeurs absolues) et les premiers pas lorsqu'on veut majorer une valeur absolue (utiliser la multiplicativité, simplifier grâce au signe). Ne surtout pas utiliser l'inégalité triangulaire en cas de différence « petite ».

1.4 ✓ Majorer une différence « petite »

La section la plus importante, et de très loin, en vue de ce chapitre, pour retrouver et savoir utiliser à propos les inégalités issues du théorème de Taylor avec reste intégral, de l'inégalité des accroissements finis, ou de la convexité. Leur vertu provient du fait qu'elles ramènent des différences compliquées à l'étude d'un monôme, donc d'une fonction très simple. On retiendra le tableau récapitulatif indispensable de la figure 1.

Figure 1 – À placer sur votre réfrigérateur.

L'ART DE LA MAJORATION : KIT DE SURVIE

	Inégalités à retenir	Comment les démontrer	Quand les privilégier
f	$\lvert f(b)-f(a)\rvert \leqslant \lVert f'\rVert_\infty \lvert b-a\rvert$	Accroissements finis	Quand a est proche de b, et f' facile à encadrer
sin	$\lvert\sin(x)\rvert \leqslant 1$ $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$	C'est du cours Accroissements finis	Quand x est « grand » : $\lvert x\rvert \geqslant 1$ Quand x est « petit » : $\lvert x\rvert \leqslant 1$, x au voisinage de 0
arctan	$\lvert\arctan(x)\rvert \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\lvert\arctan(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$	C'est du cours Accroissements finis	Quand x est « grand » : $\lvert x\rvert \geqslant \frac{\pi}{2}$ Quand x est « petit » : $\lvert x\rvert \leqslant \frac{\pi}{2}$, x au voisinage de 0
ln	$\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$ $\forall x > 0$, $\ln(x) \leqslant x-1$	Taylor, concavité Taylor, concavité	Quand x est « petit » : x au voisinage de 0 Quand x est au voisinage de 1
exp	$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$	Taylor, convexité	Quand x est « petit » : x au voisinage de 0

1.5 Un exemple qui récapitule tous les conseils du document

Voir comment, dans cet exemple, on gère les valeurs absolues (quand utilise-t-on l'inégalité triangulaire ? et quand ne l'utilise-t-on pas ? comment faire « disparaître » une valeur absolue dès que possible ?), et comment on a recours à la formule de Taylor avec reste intégral.

2 ✓ Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Pour étudier le comportement d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définies sur I :

1. Pour tout $x \in I$, on regarde si $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe et est finie ; si oui, on appelle $f(x)$ la limite, et cela définit une fonction f sur I. Par définition, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers f.
2. On regarde le comportement de $\|f_n - f\|_\infty$ quand $n \to +\infty$: si les fonctions en présence sont simples, l'étude des variations de $f_n - f$ permet d'en déterminer les extremums, et donc d'en déduire la valeur exacte de $\|f_n - f\|_\infty$. Mais des inégalités peuvent suffire :
   (a) Pour montrer la convergence uniforme, on peut déterminer une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$, *ne dépendant pas de* x et convergeant vers 0, telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n.$$
   Dans ce cas on a, par propriété de la borne supérieure (marquée (†) dans le livret de cours) :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_n - f\|_\infty \leqslant \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   et donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers f.

   Majoration indépendante de n, de t, de x... Si l'on s'y perd, comment savoir : on veut un majorant de TOUS les $|f_n(x) - f(x)|$. Mais si le majorant dépend de x, alors il change pour chaque valeur de x, et donc il ne majore pas TOUS les $|f_n(x) - f(x)|$ (exemple : si $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{|x|}{n}$, alors pour $x = 1$ le majorant égale $\frac{1}{n}$, et pour $x = 2$ le majorant égale $\frac{2}{n}$: on voit que $\frac{1}{n}$ ne majore que $|f_n(1) - f(1)|$ et pas $|f_n(2) - f(2)|$ *a priori*).
   Pour éviter ce problème, et avoir un majorant de TOUS les $|f_n(x) - f(x)|$, il suffit qu'il ne dépende pas de x.

   Noter que si $f_n(x) - f(x)$ est de la forme d'une différence « petite » ainsi qu'étudiée dans *L'art de la majoration*, vous avez une méthode pour produire ce majorant α_n. Sinon, on se débrouille pour éliminer la dépendance en x, en suivant dans les grandes lignes les méthodes utilisées pour vérifier l'hypothèse de domination (*Méthodes* du chapitre d'intégration) pour éliminer la variable gênante (mais de façon moins exigeante, vu qu'on veut « seulement » que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

   (b) Pour contredire la convergence uniforme, il suffit de trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n tel que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ soit « grand », de sorte que s'il y avait convergence uniforme, on aurait une contradiction en écrivant :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \geqslant \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0}.$$
   Pour trouver x_n, faire des essais ($x_n = \frac{1}{n}$, $x_n = -n$, etc.). Bien sûr, ces essais ne sont pas totalement au hasard et se motivent : voir ci-dessous.
   À noter que si $f_n - f$ n'est pas bornée pour tout n assez grand, alors sa norme infinie vaut $+\infty$ et la convergence uniforme est déjà contredite.

Montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur I

1. Poser $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in I$ (convergence simple).
2. Majorer $|f_n(x) - f(x)|$ indépendamment de x : soit α_n le majorant.
3. En déduire : $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \alpha_n$. Si $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors : $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.1 Contredire la convergence uniforme : détails

Il est difficile de donner une méthode systématique pour produire une minoration (avec de bons choix de x_n) contredisant la convergence uniforme. Le seul principe général qu'on peut édifier est : regarder quel terme, dans la convergence simple, assure la convergence vers la limite $f(x)$ (par exemple : une exponentielle dans le cas où nous utilisions le théorème des croissances comparées, ou une suite géométrique de raison $x \in]-1,1[$, ou un quotient par un polynôme en n, etc.), et voir si des choix de x_n peuvent « éliminer » ce terme.

Il faut que x_n dépende de n : si x_n est un réel x *fixé*, alors on ne peut pas avoir de contradiction, puisque $|f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par convergence simple.

Exemple 1. La suite de fonctions de terme général $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \end{cases}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{cases}$. On le voit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, en faisant l'équivalent : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\cdot\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Mais il n'y a pas convergence uniforme : pour le montrer, on note que ce qui nous permit de démontrer la convergence simple vers $f : x \mapsto x$ est l'équivalent $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ (utilisé avec $u = \frac{x}{n}$), qui nécessite pour cela que u tende vers 0. Par conséquent, si un choix de $x = x_n$ « empêche » u de tendre vers 0, cet équivalent devient faux et f_n ne devrait pas se rapprocher de f autour de ce x choisi.

Pour cela, je fais un choix $x = x_n$ de sorte que $\frac{x}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. C'est ce qui motive l'évaluation en n dans ce qui suit. On aurait en effet, pour ce choix, *s'il y avait convergence uniforme sur* $\mathbb{R}_+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \geqslant |f_n(n) - f(n)| = |n\ln(2) - n| = \underbrace{n(1-\ln(2))}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty},$$

ce qui est absurde quand $n \to +\infty$. Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

Exercice 1.

1. Redémontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme avec une étude de variations.
2. Montrer qu'il y a convergence uniforme si l'on se restreint à des segments. Pourquoi n'y a-t-il plus la contradiction ci-dessus ?

2.1.1 Cas particulier fréquent : une fonction « puissance × polynôme en n »

Les exemples de suites de fonctions qui ne convergent pas uniformément, et que vous croiserez, auront souvent un terme général de la forme :

$$f_n : x \mapsto (\text{quantité dépendant de } x)^n \times (\text{polynôme en } n) \times \begin{pmatrix}\text{autre terme, souvent s'annu-} \\ \text{lant là où la puissance vaut 1}\end{pmatrix},$$

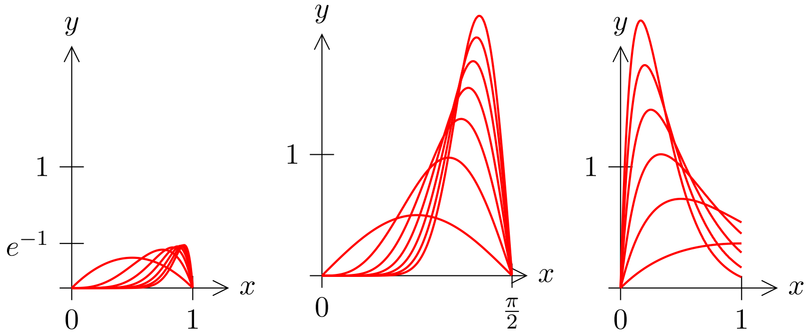
par exemple :

$$f_n : x \mapsto nx^n(1-x), \quad f_n : x \mapsto n\,(\sin(x))^n\cos(x), \quad f_n : x \mapsto n^2xe^{-nx}.$$

Je note $f_n(x) = (u(x))^n \cdot P(n) \cdot v(x)$ ces fonctions pour la suite.

Ce qui assure leur convergence simple (vers 0 dans ces trois exemples) est le théorème des croissances comparées : le terme exponentiel $(u(x))^n$ l'emporte sur le terme polynomial $P(n)$ en cas de forme indéterminée, donc dans le cas où $|u(x)| < 1$. Si $|u(x)| = 1$, un autre facteur est là pour annuler $f_n(x)$ et permettre la convergence simple vers 0 même en le point normalement problématique.

En revanche, il n'y a pas convergence uniforme **en général** (mais faites attention à ne pas généraliser à TOUS les exemples). En effet, quand $u(x) \approx 1$, on a $u(x)^n \approx 1$ et cette fonction puissance ne compense plus $P(n)$ qui tend vers $+\infty$. À cause de $P(n)$ qui n'est plus compensé par $(u(x))^n$, il apparaît un pic près du réel où $u(x) \approx 1$. La preuve en dessins, pour les trois exemples ci-dessus, où nous représentons à chaque fois f_n pour $n \in \{1,3,5,7,9,11,13\}$:



Pour le premier exemple, $x^n \approx 1$ pour $x \approx 1$. Pour le deuxième, $(\sin(x))^n \approx 1$ pour $x \approx \frac{\pi}{2}$. Ce n'est pas toujours pour $x \approx 0$ et il faut s'adapter à la situation.

Notez que le phénomène est vrai pour $u(x)$ « **se rapprochant** » de 1, pas ÉGAL à 1. Donc, pour produire rigoureusement les valeurs x_n telles que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ soit « grand » (et donc $\|f_n - f\|_\infty$ aussi, ce qui contredit la convergence uniforme), on prend une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ non constante et qui converge vers une valeur x telle que $u(x) = 1$.

Pour étudier le comportement de $(u(x_n))^n$ quand $n \to +\infty$, vous devez être au point sur les calculs de limites à l'aide des développements asymptotiques... À cet égard, **vous devez savoir retrouver la limite fréquemment rencontrée : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$, indépendamment de votre niveau**. Je rappelle que lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à un exposant dépendant de n, le comportement asymptotique s'étudie en le mettant sous forme exponentielle. Ainsi on écrit : $(u(x_n))^n = e^{n\ln(u(x_n))}$ et on effectue un développement asymptotique de $n\ln(u(x_n))$.

Exemple 2. Nous vous laissons vérifier que la suite de fonctions de terme général :

$$f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & nx^n(1-x) \end{cases}$$

converge simplement sur [0,1] vers $f = 0$. Montrons qu'il n'y a pas convergence uniforme sur [0,1] : d'après ce qui précède, je dois choisir des x_n se rapprochant d'un réel x tel que $x^n \approx 1$, c'est-à-dire : x_n doit se rapprocher de 1. Je choisis par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \|f_n - f\|_\infty \geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Or, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n\times\left(-\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

Ainsi $\|f_n - f\|_\infty$ est minorée par une quantité convergeant vers $e^{-1} > 0$, et donc ne peut pas tendre vers 0 quand $n \to +\infty$. On en déduit que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur [0,1].

Exercice 2. En vous inspirant de ce qui précède, montrer que les deux autres exemples de suites de fonctions ci-dessus ne convergent pas uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et [0,1] respectivement.

Exercice 3. (Gare aux généralisations hâtives) Montrer que la suite :

$$\left(f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & nx^n(1-x)^n \end{cases}\right)_{n\geqslant 0}$$

converge uniformément sur [0,1] vers $f = 0$ (alors que f_n est de la forme des exemples ci-dessus).

2.1.2 Raisonner par l'absurde et utiliser un théorème d'interversion

On peut parfois trancher TRÈS rapidement en raisonnant par l'absurde, en supposant qu'il y a convergence uniforme. Une flopée de résultats d'interversion deviennent utilisables :

— la convergence uniforme conserve la continuité ;

— la convergence uniforme permet de passer à la limite sous les intégrales (et en particulier elle conserve les primitives : cela revient à intégrer sur $[a, x]$ pour x une variable) ;

et l'objectif est d'obtenir une contradiction du fait que la fonction limite ne soit pas continue. Le deuxième point est rarement utilisé : il faut du flair pour remarquer qu'il y a une contradiction en passant aux primitives. En revanche, la discontinuité d'une fonction peut se voir souvent « à l'œil nu », et dans certains cas simples c'est aussi le cas des limites en un réel.

Exemple 3. (Avec le théorème de continuité d'une limite uniforme) Étudions la suite de fonctions dont le terme général est $f_n : \left\{\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}\right.$. Sa limite simple est l'application :

$$f : \left\{\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

S'il y avait convergence uniforme alors, f_n étant continue sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa limite uniforme f serait également continue sur $[0,1]$. Mais on a manifestement discontinuité en 1, du fait que $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \neq f(1)$: c'est une contradiction. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers f.

3 ✓ Convergence uniforme d'une série de fonctions

Il y a là trois modes de convergence :

— NORMALE : $\sum_{n \geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge ;

— UNIFORME : $\|R_N\|_\infty \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$;

— SIMPLE : $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$ converge pour tout $x \in I$.

Évidemment, pour que ces modes de convergence soient bien différents, et que vous ne les confondiez pas, il serait temps (on vous le dit depuis la 1re année... mais c'est plus important que jamais) de distinguer FONCTION f et NOMBRE $f(x)$. Sinon, comment voir la différence entre la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ et la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$?

Tous les théorèmes d'interversion utilisent la convergence uniforme ou simple comme hypothèse. Mais la convergence normale (qui n'existe pas pour les *suites* de fonctions) implique les autres. C'est donc un outil pratique.

Mise en garde 1. Nous l'avons déjà dit dans le cours, je le répète ici car c'est très important :

MONTRER QUE $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ OU $\|f_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ NE DÉMONTRE RIEN SUR $\sum_{n \geqslant 0} f_n$!

Pour démontrer la convergence normale ou uniforme d'une série de fonctions, vous n'avez pas le choix, vous devez suivre les approches ci-dessous.

3.1 ✓ Démontrer la convergence uniforme *via* la convergence normale

1. On montre l'existence d'une série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ convergente telle que pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ (ou tout n assez grand), on ait : $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$. Notez que α_n ne dépend pas de x.

   Majoration indépendante de n, de t, de x... Si l'on s'y perd, comment savoir : comme d'habitude, il faut songer à ce qu'on veut faire au lieu de retenir servilement. Pour démontrer la convergence normale, nous devons majorer $\|f_n\|_\infty$ en vue d'utiliser un critère de comparaison. Or nous avons vu abondamment que pour majorer $\|f_n\|_\infty$, il faut trouver un majorant de TOUS les $|f_n(x)|$ pour $x \in I$. Pour les raisons déjà expliquées dans la section 2, ce n'est un majorant de TOUS les $|f_n(x)|$ à la fois que s'il ne dépend pas de x.

2. Alors : $0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge.

   Dans le cas de la convergence uniforme d'une suite de fonctions, on voulait que la SUITE $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ soit convergente vers 0, et ici on veut que la SÉRIE $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge : comment comprendre ce qu'il faut ? S'il nous faut des conditions différentes sur α_n selon les cas, c'est parce qu'on ne démontre pas la même chose. Avant, on voulait montrer que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ avec le théorème des gendarmes : cela se fait en encadrant par des suites convergeant vers 0. Ici, on veut démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge, et nous savons qu'il ne suffit pas, pour cela, de montrer que $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: savoir que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ne servirait donc à RIEN. Non, ici on veut utiliser le critère de comparaison des séries à termes positifs, et donc majorer $\|f_n\|_\infty$ par le terme général d'une SÉRIE convergente. D'où l'exigence que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge.

   Pour produire une série convergente $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ convenable, ne réfléchissez pas à l'envers en vous demandant comment produire une série convergente *ex nihilo* : commencez d'abord par majorer $|f_n(x)|$ indépendamment de x, et nommez α_n le majorant produit. C'est seulement là que vous vous demandez si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge.

   Attention, α_n ne s'obtient pas par des relations de comparaison. Dire : « $f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc pour tout n assez grand : $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$ », est un raisonnement faux. En effet, dans ce raisonnement, le rang n_0 à partir duquel on peut écrire cette inégalité dépend *a priori* de x, et en particulier rien n'assure qu'il convient pour tous les $x \in I$ à la fois.

Montrer la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur I

1. Majorer $|f_n(x)|$ indépendamment de x pour tout $x \in I$. Soit α_n ce majorant.
2. En déduire $0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ par propriété de borne supérieure.
3. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$ converge, et conclure par comparaison.

Pour majorer $|f_n(x)|$ indépendamment de x, on procède comme pour les hypothèses de domination (section 5 du chapitre d'intégration) : *on ne touche pas à ce qui dépend de* n (vu que c'est seulement x qui pose problème et est à éliminer), et on regarde le maximum de ce qui dépend de x, quand x varie.

3.2 ✓ Contredire la convergence normale

1. On montre l'existence de réels $x_n \in I$ tels que $\sum\limits_{n\geqslant 0} |f_n(x_n)|$ diverge.

2. Comme $\|f_n\|_\infty \geqslant |f_n(x_n)| \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ diverge également.

Puisque, dans l'étude de la convergence normale, tout revient à majorer ou minorer convenablement $\|f_n\|_\infty$, TOUS les conseils formulés dans la section précédente (sur la convergence uniforme des SUITES de fonctions) restent valables.

Mise en garde 2. Attention au fait que même s'il n'y a pas convergence normale, il peut très bien y avoir convergence uniforme ! Ne faites pas de réciproque hâtive et fautive !

3.3 ✓ Démontrer la convergence uniforme *via* le théorème spécial des séries alternées

Si, pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ vérifie le théorème spécial des séries alternées, alors la série converge, et son reste d'indice N vérifie :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \quad |R_N(x)| \leqslant |f_{N+1}(x)| \leqslant \|f_{N+1}\|_\infty.$$

Par conséquent :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \|R_N\|_\infty \leqslant \|f_{N+1}\|_\infty.$$

On montre alors que $\lim_{N\to+\infty} \|f_{N+1}\|_\infty = 0$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{N\to+\infty} \|R_N\|_\infty = 0$, ce qui équivaut à la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

Mise en garde 3. Il ne suffit pas qu'il y ait un $(-1)^n$ pour que ce soit une série alternée ! Par exemple, $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n$ N'est PAS alternée si $x < 0$ (par exemple, pour $x = -1$, il s'agit de $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(-1)^n = \sum_{n\geqslant 0} 1$). Si $x \notin \mathbb{R}$, alors on oublie : la notion de signe n'existe plus. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{e^{in\theta}}{n}$ N'est PAS alternée pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ différent de 0 modulo 2π.

3.4 Contredire la convergence uniforme

3.4.1 ✓ En raisonnant par l'absurde et en utilisant un théorème d'interversion

On reprend la stratégie de la section 2.1 : on raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a convergence uniforme, ce qui donne accès à plusieurs théorèmes d'interversion : l'un d'eux devrait donner une contradiction, d'où le fait que la convergence uniforme ne soit pas vérifiée.

Une différence est notable par rapport aux suites de fonctions, où souvent c'est le théorème de continuité qui permet d'aboutir à une contradiction (parce qu'on voit à l'œil nu qu'une limite f est continue). Ici, si la somme d'une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ simplement convergente n'est pas explicitée à l'aide de fonctions usuelles, il n'est vraiment pas facile de constater qu'elle n'est pas continue. C'est donc, en général, le théorème de la double limite qui donne une contradiction, en particulier si la série $\sum_{n\geqslant 0} \lim_{x\to a} f_n(x)$ diverge.

Exemple 4. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ de terme général $f_n : \begin{cases}]-1{,}1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$ ne converge pas uniformément sur $]-1{,}1[$: si c'était le cas alors, d'après le théorème de la double limite, la série $\sum_{n\geqslant 0} \lim_{x\to 1^-} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} 1$ convergerait ; or elle diverge grossièrement, donc nous aboutissons à une contradiction. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1{,}1[$.

3.4.2 En minorant le reste : une comparaison entre série et intégrales

Nous rappelons que si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I (chose facile à démontrer en général), alors elle converge uniformément sur I si et seulement si la suite des restes $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle. Contredire la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ reviendrait donc à montrer que la suite $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I vers la fonction nulle. D'après les méthodes de la section 2, cela reviendrait à déterminer des x_N tels que $(|R_N(x_N)|)_{N\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, puisqu'on aurait alors, en cas de convergence uniforme : ← page 2

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\|R_N\|_\infty}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \geqslant \underbrace{|R_N(x_N)|}_{\underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0},$$

et ce serait contradictoire.

La difficulté est d'abord d'estimer $R_N(x)$ pour tout $x \in I$. Sinon, comment déterminer les choix pertinents de x_N ? Pour cela, nous vous renvoyons à la section 4, qui montre comment utiliser la comparaison entre série et intégrales pour encadrer le reste. On évalue alors cette minoration du reste en des réels x_N qui rendent « gros » le minorant, et empêchent la convergence vers 0 (voir section 2.1). ← page 3

Exemple 5. Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xne^{-nx} \end{cases}$. En utilisant le théorème des croissances comparées, on démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$; or $f_n \geqslant 0$, et la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Autrement dit : la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons qu'elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela, utilisons une comparaison entre série et intégrale pour minorer le reste. Soit N un entier au voisinage de $+\infty$, et soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $t \mapsto xte^{-tx}$ est continue et décroissante sur $\left[\frac{1}{x}, +\infty\right[$, donc sur $[N+1, +\infty[$ si $x \geqslant \frac{1}{N+1}$ (et c'est ce qu'on suppose à présent). Donc :

$$\forall n \geqslant N+1,\ \forall t \in [n, n+1], \quad xte^{-tx} \leqslant xne^{-nx}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[n, n+1]$, par croissance de l'intégrale on a :

$$\forall n \geqslant N+1, \quad \int_n^{n+1} xte^{-tx}\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} xne^{-nx}\mathrm{d}t, \text{ donc : } \forall n \geqslant N+1, \quad \int_n^{n+1} xte^{-tx}\mathrm{d}t \leqslant xne^{-nx}.$$

L'intégrale de gauche se calcule en intégrant par parties, et on en déduit :

$$\forall n \geqslant N+1, \quad \left(n + \frac{1}{x}\right)e^{-xn} - \left((n+1) + \frac{1}{x}\right)e^{-x(n+1)} \leqslant xne^{-nx}.$$

On somme de $n = N+1$ à $+\infty$. Puisqu'on somme des réels *positifs*, les sommes existent nécessairement et il n'est pas nécessaire de démontrer *a priori* qu'elles sont des sommes de séries convergentes. On a alors :

$$\left(N + 1 + \frac{1}{x}\right)e^{-x(N+1)} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} xne^{-nx} = R_N(x),$$

et cette inégalité est vraie pour tout $x \geqslant \frac{1}{N+1}$ (c'est aussi vrai si $x < \frac{1}{N+1}$ mais c'est délicat à prouver).

Mission accomplie : le reste est minoré explicitement. Pour trouver les évaluations en des réels x_N qui contredisent la convergence uniforme vers la fonction nulle, on suit les conseils de la section 2.1.1. On est d'ailleurs ici dans le cas d'une minoration par une fonction de la forme « puissance × polynôme en N », et il est donc pertinent de poser $x = \frac{1}{N+1}$ pour compenser le facteur « puissance » $e^{-x(N+1)}$. On obtient donc, pour tout N au voisinage de $+\infty$: ← page 3

$$\left|R_N\left(\frac{1}{N+1}\right)\right| \geqslant \left(N + 1 + \frac{1}{\frac{1}{N+1}}\right)e^{-\frac{1}{N+1}\cdot(N+1)} = 2(N+1)e^{-1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

et il est donc impossible d'avoir $\|R_N\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: le reste ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle, et la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4. Compléter les éléments de démonstration non détaillés dans cet exemple :

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'application $t \mapsto xte^{-tx}$ est décroissante sur $\left[\frac{1}{x}, +\infty\right[$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} xte^{-tx}\mathrm{d}t = \left(n + \frac{1}{x}\right)e^{-xn} - \left((n+1) + \frac{1}{x}\right)e^{-x(n+1)}$.

4 Séries de fonctions et comparaison entre série et intégrales

Dans le chapitre sur les séries numériques, nous utilisions la comparaison entre série et intégrales pour ramener l'étude d'une somme (en général difficile voire impossible à calculer simplement) à l'étude d'intégrales (souvent plus faciles à calculer grâce au théorème fondamental de l'analyse notamment). Cette méthode conserve son mérite ici, et permet de répondre à quelques problématiques où les autres outils du cours font défaut.

Le principe reste le même, mais comme il y a plusieurs variables en jeu, j'estime utile de mentionner quelques subtilités. Pour utiliser la comparaison entre série et intégrales avec la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ définies sur I :

- il faut que pour tout $x \in I$, $f_n(x)$ soit de la forme $f_n(x) = g(n, x)$, où $t \mapsto g(t, x)$ est une application monotone, en général décroissante, sur un intervalle de la forme $[n_0, +\infty[$ (**dit de manière moins formelle : « quand on remplace n par une variable t, on obtient une fonction monotone »**) ;
- supposons par exemple que $t \mapsto g(t, x)$ est décroissante sur $[n_0, +\infty[$; on fixe $x \in I$, et on écrit :
$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall t \in [n, n+1],\quad g(t,x) \leqslant g(n,x), \qquad \text{et : } \forall n \geqslant n_0 + 1,\ \forall t \in [n-1, n],\quad g(n,x) \leqslant g(t,x),$$
et donc, en intégrant ces inégalités sur leurs domaines de validité (rappelons que $g(n, x) = f_n(x)$) :
$$\forall n \geqslant n_0,\quad \int_n^{n+1} g(t,x)\mathrm{d}t \leqslant f_n(x), \qquad \text{et : } \forall n \geqslant n_0+1,\quad f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g(t,x)\mathrm{d}t;$$
souvenez-vous qu'un dessin vous permet de retrouver dans quel sens est l'encadrement !
- on calcule ces intégrales, et on somme de $n = n_0$ (ou $n = n_0 + 1$) à $+\infty$ (ou bien on somme d'abord, utilisant la relation de Chasles, et ensuite on calcule les intégrales : faites selon ce qui vous est le plus simple), pour obtenir finalement :
$$\int_{n_0}^{+\infty} g(t,x)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x) \leqslant f_{n_0}(x) + \int_{n_0}^{+\infty} g(t,x)\mathrm{d}t;$$
notons que si l'existence de ces quantités n'a pas encore été établie, *elle est automatique si g est positive*, mais sinon il faut le faire pour la série ou pour l'intégrale, préférablement pour l'intégrale, avant de sommer.

Remarque. Si l'objectif est de majorer le reste d'indice N, en général c'est le comportement quand $N \to +\infty$ qui nous intéresse, donc pour N « assez grand » ; en particulier, vous pouvez prendre N qui soit nettement supérieur à n_0 ($N \geqslant \lfloor n_0 \rfloor + 1$ suffit), et donc vous évitez « l'effet de bord » gênant qui vous conduit à sommer à partir de n_0 pour une borne, et à partir de $n_0 + 1$ pour l'autre. Vous pouvez écrire toutes les inégalités « pour tout $n \geqslant N + 1$ », et sommer de $n = N + 1$ jusqu'à $+\infty$.

Complication éventuelle. Il est possible que l'intervalle de décroissance de $t \mapsto g(t, x)$ *dépende de x*. C'est le cas en particulier dans l'exemple 5 de ce document. Dans ce cas, la comparaison n'est pas valable ← page 8 pour tout $x \in I$, mais pour tout x dans un intervalle dépendant de N. C'est la vie, vous NE pouvez PAS affaiblir cette condition.

Mise en garde 4. ATTENTION AU FAIT QUE CE SOIT L'INDICE DE SOMMATION n, ET NON x, QU'ON REMPLACE PAR UNE VARIABLE D'INTÉGRATION t ! Ne négligez pas cette confusion : PRESQUE TOUS VOS PRÉDÉCESSEURS se sont trompés là-dessus. C'est d'ailleurs très étonnant, car dans le cas des séries numériques, vous savez très bien que c'est l'indice de sommation n qui « devient » la variable d'intégration t. Au nom de quoi changerait-on ici ?

La comparaison entre série et intégrales, dans ce contexte, vous permettra majoritairement :

— de minorer finement le reste pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément, lorsque aucune autre approche ne fonctionne : voir section 3.4 ; ← page 7

— d'encadrer des sommes de séries de fonctions, en général pour montrer qu'elles admettent des limites infinies en une extrémité (rappelons que le théorème de la double limite ne s'applique qu'aux limites finies), et avoir un équivalent asymptotique en prime : voir section 5.3. → page 20

Quand faire une comparaison entre série et intégrale avec $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$

1. Pour minorer explicitement le reste et contredire la convergence uniforme.
2. Pour trouver une limite (infinie) voire un équivalent de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ quand x tend vers une extrémité de l'intervalle de définition de f.

Exemple 6. Je vous laisse vérifier que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ de terme général :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \dfrac{1}{n(1+nx)} \end{cases}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+nx)}$ sa somme, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherche un équivalent quand $x \to 0^+$ de $f(x)$ (dont on peut montrer aisément que la limite est $+\infty$ en cette extrémité ; soit grâce à l'équivalent qu'on va obtenir, soit *via* la méthode de la section 5.3). → page 20

Pour cela, on utilise le *meilleur* moyen d'estimer une somme, la comparaison entre série et intégrales. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+tx)}$ est clairement décroissante sur $]0, +\infty[$ (notez bien que c'est n et non x qu'on remplace par une nouvelle variable t). Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in [n, n+1], \quad \frac{1}{t(1+tx)} \leqslant \frac{1}{n(1+nx)}, \qquad \text{et : } \forall n \geqslant 2,\ \forall t \in [n-1, n], \quad \frac{1}{n(1+nx)} \leqslant \frac{1}{t(1+tx)},$$

et donc, en intégrant ces inégalités sur leurs domaines de validité :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{n(1+nx)}, \qquad \text{et : } \forall n \geqslant 2, \quad \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{n(1+nx)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}.$$

Or : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{n(1+nx)} = \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{n(1+nx)} = \frac{1}{n(1+nx)}$ (intégrale d'une fonction constante sur un segment de longueur 1), tandis qu'une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+tx)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+tx}$ (décomposition en éléments simples) est $t \mapsto \ln\left(\dfrac{t}{1+tx}\right)$. Donc, en sommant les inégalités ci-dessus de $n = 1$ (ou $n = 2$) à l'infini, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)} \leqslant f_1(x) + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)},$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \ln(1+x) - \ln(x)$$

(la vérification de l'existence de ces objets est normalement à établir avant de sommer ; ici, on peut par exemple mentionner le théorème de comparaison entre une série et une intégrale, pour lier la convergence connue de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(1+nx)}$ à celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}$).

Mission accomplie : on a encadré f par des fonctions plus simples, et on peut en déduire ce qu'on veut. Lorsqu'on divise chaque membre de l'encadrement par $-\ln(x) > 0$ (pour x au voisinage de 0), les deux extrémités de cet encadrement ont pour limite 1 quand $x \to 0^+$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{-\ln(x)} = 1$. On en déduit :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qu'on voulait démontrer. Si l'on voulait seulement montrer que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, on pourrait se contenter de la minoration (plus agréable à écrire, vu qu'il n'y a pas à prendre garde au premier terme).

5 ✓ Théorèmes d'interversion : retrouver les hypothèses, savoir lesquels utiliser

5.1 ✓ Comment retrouver les hypothèses et conclusions

Pour retrouver les hypothèses (au moins partiellement) des théorèmes d'interversion, **la première chose est de se souvenir du problème qu'ils doivent résoudre** (est-ce qu'on veut dériver ? passer à la limite ? intégrer ?), puis des conditions minimales d'existence des objets en présence. On retiendra que :

— **la régularité des fonctions f_n est celle que l'on espère obtenir pour la fonction obtenue par passage à la limite** : si l'on veut que la fonction limite soit continue, on doit supposer les f_n continues ; si l'on veut que la fonction limite soit dérivable, on doit supposer les f_n dérivables ; si l'on veut intégrer des fonctions, il faut qu'elles soient au moins continues par morceaux, etc. ;

— l'hypothèse de continuité par morceaux n'est faite que sur des fonctions qu'on INTÈGRE, et NULLE PART AILLEURS ; si on n'est pas sur un segment, il nous faut aussi une hypothèse d'intégrabilité, à moins qu'elle ne soit conséquence d'une autre hypothèse (en général l'hypothèse de domination) ;

— quand on veut dériver une application, il faut qu'elle soit dérivable ; et on se souviendra qu'en fait, pour des raisons qui ne sont flagrantes que dans les démonstrations, **il faut remplacer « dérivable » par « de classe C^1 »** (de même, « k fois dérivable » est remplacé par « de classe C^k ») ;

— si l'égalité à démontrer **fait intervenir une somme** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$, les hypothèses de convergence portent sur des SÉRIES de fonctions ; s'il n'y a pas de somme, ces hypothèses sont sur des SUITES de fonctions ;

— l'exigence de convergence la plus contraignante (la convergence uniforme) est sur une seule suite (ou série) de fonctions : celle qui concerne la propriété que l'on veut conserver par passage à la limite (donc si l'on veut dériver, la convergence uniforme est sur $(f_n')_{n\geqslant 0}$ ou $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n'$, mais en aucun cas sur $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ou $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$) ; les autres suites (ou séries) en jeu ne nécessitent que la convergence simple : hypothèse minimale pour assurer l'existence des fonctions limites ;

— en général, c'est la convergence uniforme qui permet de conserver les bonnes propriétés ; **s'il n'y a pas d'hypothèse de convergence uniforme du tout dans un théorème d'interversion, il faut la remplacer par une hypothèse « indevinable »** que vous n'avez pas d'autre choix que d'apprendre par cœur (hypothèse de domination ou convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$).

Un théorème de régularité des intégrales à paramètres ne fait intervenir ni suite, ni série de fonctions. Il serait donc absurde qu'il apparaisse des hypothèses de convergence uniforme ou simple. Ces notions n'ont aucun sens pour des fonctions de la forme $(x, t) \mapsto f(x, t)$.

Hypothèses de convergence : s'y retrouver

— Si l'on veut conserver une régularité (continuité, dérivabilité, limite) : CVU nécessaire.

— Sinon : CVS (hypothèse minimale d'existence des objets).

Si l'égalité à démontrer contient $\sum$: hypothèse de convergence sur $\sum_{n\geqslant 0} f_n$. Sinon : sur $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

S'il n'y a pas CVU : hypothèse indevinable (hypothèse de domination ou convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$).

Exiger DEUX hypothèses « difficiles » est IMPOSSIBLE :

Demander que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ CVU + hypothèse de domination :	IMPOSSIBLE (il y a CVS)
Demander que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVU + CV de $\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$:	IMPOSSIBLE (il y a CVS)

Hypothèses de régularité : s'y retrouver

On veut une fonction limite continue	$\Longrightarrow$	continuité de f_n.
On veut dériver	$\Longrightarrow$	classe C^1 de f_n.
On veut intégrer	$\Longrightarrow$	continuité par morceaux de f_n.

En analysant l'égalité à démontrer, nous obtenons donc les conditions nécessaires d'existence des objets en présence. Seulement, il faut encore trancher sur leur statut : est-ce que ces conditions sont des **hypothèses**, ou des **conclusions** du théorème d'interversion ? Pour le savoir :

— l'objectif (partiel) d'un théorème d'interversion étant d'apporter une réponse au problème : « est-ce que la fonction limite est continue ? dérivable ? intégrable ? etc. », il serait absurde que la réponse au problème soit une hypothèse de départ : c'est au contraire une conclusion (sinon le théorème ne nous enseignerait rien) ; par exemple, dans le théorème de dérivation terme à terme, le nœud du problème est de savoir si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable, et quelle est sa dérivée : il serait idiot que le fait d'être dérivable soit une hypothèse sur $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$;

— au contraire, **les conditions de régularité sur les f_n sont des hypothèses, puisque les f_n sont les données de départ du problème** (donc celles sur lesquelles on peut vérifier concrètement que les conditions requises sont vraies) ; une exception est l'intégrabilité conséquence du théorème de convergence dominée.

Hypothèse, ou conclusion ?

régularité de f_n	$=$	HYPOTHÈSES
régularité de la fonction limite (f ou $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$)	$=$	CONCLUSIONS

Exception : la continuité **par morceaux**, à supposer pour f_n ET pour f (ou $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$).

Nous détaillons ce principe dans le reste de la section. Mais évidemment, vous devez vous exercer pour retrouver vous-mêmes les hypothèses et conclusions. Nous vous laissons donc quelques théorèmes à titre d'exercices.

5.1.1 ✓ Théorèmes de régularité

Préserver la continuité. Ce théorème est sans doute le plus facile à retenir. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définies sur I et qui converge (au moins simplement) vers une fonction f. Le problème à résoudre est : « est-ce que f est continue sur I ? » et à la lumière des conseils de la section précédente :

— puisqu'on veut que f soit continue sur I, il faut supposer que les f_n sont continues sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$;

— pour préserver la continuité des f_n, il faut que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge **uniformément** sur I (ou sur tout segment de I : voir section 5.2). → page 20

On en déduit le théorème :

régularité attendue pour la fonction limite

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur I. On suppose que :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
— la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction f.
Alors f est continue sur I.

pour que la continuité soit préservée par passage à la limite

Préserver la dérivabilité. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I. On se demande à quelle condition suffisante la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable sur I, et si sa dérivée est obtenue « comme on pense », en dérivant terme à terme, c'est-à-dire est égale à : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$. On écrit l'égalité qu'on veut démontrer :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}',$$

et on regarde à quelles conditions les objets en présence existent :

pour que cette somme existe : $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ doit converger (au moins simplement)

pour que cette somme existe : $\sum\limits_{n\geqslant 0} {f_n}'$ doit converger (au moins simplement)

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}'}$$

pour qu'existe cette dérivée, il faut que f_n soit (au moins) dérivable

pour qu'existe cette dérivée, il faut que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ soit (au moins) dérivable

Maintenant, conformément aux conseils donnés plus haut :

— on remplace la condition « dérivable » par « de classe C^1 » ;

— puisque le théorème concerne la dérivation d'une fonction limite, l'hypothèse contraignante de convergence uniforme est sur la série des dérivées $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ (et non $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$) ;

— les conditions de régularité sur f_n sont des hypothèses, celles sur $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ sont des conclusions.

On en déduit l'énoncé du théorème de dérivation terme à terme :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions de classe C^1 sur I. On suppose que :

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I ;

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f'_n$ converge uniformément sur I.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I, et on a : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

hypothèse minimale pour que la somme existe

régularité attendue pour la fonction limite

pour que la dérivabilité soit préservée par passage à la limite

Ayez cette démarche méthodique pour retenir simplement le théorème, au lieu de citer des hypothèses au hasard.

Exercice 5. On veut dériver la limite d'une suite de fonctions. Compléter la figure suivante :

pour que $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ existe...

pour que $g = \lim_{n\to+\infty} (f'_n)$ existe...

pour qu'existe...

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} (f'_n)$$

pour qu'existe...

Clarifier ensuite ce qui est une hypothèse et ce qui est une conclusion, afin de reconstituer le théorème de dérivation d'une suite de fonctions.

Préserver la classe C^k. Même principe. On veut dériver k fois la somme d'une série de fonctions, et dériver « comme on pense », c'est-à-dire terme à terme. Mais si l'on peut calculer la dérivée k^{e}, on devrait aussi pouvoir dériver j fois où $j \leqslant k$. L'énoncé à démontrer est donc le suivant :

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)},$$

et on regarde à quelles conditions les objets en présence existent :

pour que cette somme existe : $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ doit converger (au moins simplement)

pour que cette somme existe : $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(j)}$ doit converger (au moins simplement)

pour qu'existe cette dérivée, il faut que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soit (au moins) dérivable j fois, où $j \in [\![0,k]\!]$

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$$

pour qu'existe cette dérivée, il faut que f_n soit (au moins) dérivable j fois, où $j \in [\![0,k]\!]$

Être au moins dérivable j fois, pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, équivaut bien sûr à être au moins dérivable k fois. Maintenant, conformément aux conseils donnés plus haut :

— on remplace la condition « dérivable k fois » par « de classe C^k » ;

— puisque l'énoncé concerne la dérivée k^{e} de la somme, l'hypothèse de convergence uniforme est sur $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$;

— les conditions de régularité sur f_n sont des hypothèses, celles sur $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sont des conclusions.

On en déduit l'énoncé du théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions de classe C^k :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions de classe C^k sur I. On suppose que :
- pour tout $j\in[\![0,k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^k sur I, et on a : $\forall j\in[\![0,k]\!]$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

hypothèse minimale pour que la somme existe

régularité attendue pour la fonction limite

pour que la classe C^k soit préservée par passage à la limite

Exercice 6. Reconstituer ainsi le théorème analogue dans le cas des suites de fonctions.

5.1.2 ✓ Théorème de régularité des intégrales à paramètres

Il n'y a pas de notion de convergence uniforme ou simple pour les intégrales à paramètres : une subtilité qui disparaît, ouf ! Pour recouvrer les théorèmes, on retiendra :
- les intégrales que l'on étudie doivent être correctement définies : cela *impose* la continuité par morceaux de toutes les applications en jeu de la variable t, en particulier de $t\mapsto f(x,t)$ (si on intègre selon la variable t) ;
- il faut aussi supposer qu'elles sont intégrables, **sauf** pour la fonction majorée dans l'hypothèse de domination : en effet, son intégrabilité est une conséquence de l'hypothèse de domination ;
- la propriété de régularité que l'on veut démontrer sur $g : x\mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$, fonction de la seule variable x, doit être vraie pour toutes les fonctions $x\mapsto f(x,t)$;
- il faut une hypothèse de domination sur la *dernière* dérivée : φ doit être intégrable et ne pas dépendre de x, et c'est cette difficulté qui justifie parfois de se ramener à l'étude de la régularité sur tout segment.

Continuité d'une intégrale à paramètre. Illustrons ceci sur le premier théorème de régularité : on cherche à quelle condition suffisante sur f l'intégrale à paramètre $g : x\mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit f une application définie sur $I\times J$. On suppose que :
- pour tout $x\in I$, l'application $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
- pour tout $t\in J$, l'application $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;
- il existe une application $\varphi : J\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t)\in I\times J$, $|f(x,t)|\leqslant \varphi(t)$ (HYPOTHÈSE DE DOMINATION).

Alors :

donne l'intégrabilité par comparaison

régularité attendue pour g

pour que l'intégrale existe

- pour tout $x\in I$, l'application $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J ;
- l'application $g : x\mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Classe C^1 d'une intégrale à paramètre. Cette fois-ci, on se demande à quelle condition suffisante sur f l'intégrale à paramètre $g : x\mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1, et si la dérivée se calcule « comme on pense », à savoir : $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$. Il y a ici deux intégrales en présence : il faut penser aux conditions d'existence de ces deux intégrales, ce qui exige la continuité par morceaux et l'intégrabilité de deux types d'applications ; on n'oublie pas que pour l'une des deux, l'intégrabilité est conséquence de l'hypothèse de domination (ce qui, d'après les remarques ci-dessus, n'est à vérifier que pour la dernière dérivée partielle).

Récapitulons à quelles conditions raisonnables tous les objets en présence existent :

pour que cette dérivée existe : $x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ (au moins) dérivable

pour que cette dérivée existe : f (au moins) dérivable par rapport à x

pour que cette intégrale existe : $t \mapsto f(x,t)$ c.p.m et intégrable

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$$

pour que cette intégrale existe : $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ c.p.m et intégrable

$+$ HYPOTHÈSE DE DOMINATION : il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in I \times J$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

implique par comparaison :

En vérité, pour que $\displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ existe, l'intégrabilité est de trop (la convergence suffirait). Mais c'est une exigence du programme.

On se souvient que les hypothèses de dérivabilité sont à remplacer par « de classe C^1 » dans les théorèmes d'interversion. Après avoir clarifié ce qui est une hypothèse et ce qui est une conclusion, on a l'énoncé du théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit f une application définie sur $I \times J$. On suppose que :
- pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- pour tout $t \in J$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I ;
- pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
- il existe une application $\varphi : J \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in I \times J$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ (HYPOTHÈSE DE DOMINATION).

Alors :

donne l'intégrabilité par comparaison

régularité attendue pour g

pour que l'intégrale existe

- pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur J ;
- l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I, et on a : $\forall x \in I$, $g'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Exercice 7. Compléter cette figure, et reconstituer le théorème de classe C^k des intégrales à paramètres.

pour que cette dérivée existe :

pour que cette dérivée existe :

pour que cette intégrale existe :

$$\forall j \in [\![0,k]\!],\ \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t$$

pour que cette intégrale existe :

$+$ HYPOTHÈSE DE DOMINATION :

5.1.3 ✓ Théorème de la double limite

Pour une série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ définies sur I, et a une extrémité de I, on cherche à quelle condition on peut écrire :

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

On regarde à quelles conditions les objets en présence existent :

pour que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe : $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ doit converger (au moins simplement)

pour que cette somme existe : il faut que $\sum_{n\geqslant 0} \ell_n = \sum_{n\geqslant 0} \lim_{x\to a} f_n(x)$ converge

il faut que $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

il faut que $\lim_{x\to a} f_n(x) = \ell_n$ existe (et soit finie)

Maintenant, conformément aux conseils donnés plus haut :

— pour conserver la régularité au voisinage de a, nous supposons la convergence **uniforme** de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$;

— les conditions sur f_n sont des hypothèses, celles sur $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sont des conclusions.

Il n'est pas si évident, *a priori*, de trancher entre une hypothèse et une conclusion pour la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \ell_n$. Mais puisque le problème que veut résoudre le théorème de la double limite est : « peut-on écrire $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$? » *a priori* l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$ n'est pas une hypothèse de départ (si on pouvait l'établir d'emblée, on n'aurait pas besoin d'un théorème pour nous donner une relation qu'elle vérifie). On le classe dans les conclusions.

On en déduit l'énoncé du théorème de la double limite :

Soient $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I, et a une extrémité de I. On suppose que :

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I ;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} f_n(x) = \ell_n$ existe et est finie.

Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \ell_n$ converge, et on a : $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

pour conserver la régularité autour de a

pour que cette quantité ait un sens

pour que cette somme existe

Exercice 8. Imaginons qu'on veuille trouver l'énoncé d'un théorème de la double limite pour les SUITES de fonctions (un tel énoncé existe bien). Compléter la figure suivante, sur le modèle des exemples ci-dessus :

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Clarifier ensuite ce qui est une hypothèse et ce qui est une conclusion, afin de reconstituer le théorème de la double limite d'une suite de fonctions.

5.1.4 ✓ Théorème de passage à la limite dans l'intégrale, d'intégration terme à terme

Pour tous ces théorèmes d'intégration, la régularité à retenir est facile : f_n doit **être continue par morceaux**, vu que c'est la régularité nécessaire pour intégrer des fonctions dans le programme de PSI.

Vous noterez que cette régularité n'apparaît dans aucun autre théorème sur les suites et séries de fonctions : impossible de se tromper.

Il faut aussi que les f_n soient intégrables ; mais si l'on est sur un segment, alors c'est automatiquement le cas et il n'y a pas besoin de le préciser. Si on n'est pas sur un segment, il faut que cette condition apparaisse, en hypothèse ou en conclusion : en conclusion si l'intégrabilité porte sur la fonction limite f ou $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, ou si c'est une conséquence de l'hypothèse de domination ; autrement, c'est en hypothèse.

Interversion limite-intégrale dans le cas d'un segment. On veut l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

On regarde à quelles conditions suffisantes les objets en présence existent :

pour que cette somme existe : $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge (au moins simplement)

pour que cette somme existe : $\sum_{n\geqslant 0} \int_a^b f_n$ converge

pour que cette intégrale existe : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux

$$\boxed{\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t}$$

pour que cette intégrale existe : f_n continue par morceaux

Au regard des principes donnés en début de section, on pourrait penser que la continuité par morceaux de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dans les conclusions du théorème. Mais il n'en est rien et c'est là une des exceptions à ces principes : la continuité par morceaux n'est en général pas conservée par passage à la limite, même en cas de convergence uniforme, donc nous sommes obligés de la mettre en hypothèse pour éviter les contradictions (dans le cadre du programme : dans la vraie vie mathématique, les hypothèses de régularité peuvent être relâchées considérablement). Si la régularité exigée avait été la *continuité*, la continuité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ aurait été une conclusion du théorème.

Cependant, pour le reste, il n'y a pas vraiment de surprise. La convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \int_a^b f_n$ fait partie des conclusions, et non des hypothèses, puisque le problème est *justement* de savoir si cette somme d'intégrales égale l'intégrale qu'on veut calculer : si cette somme d'intégrales était dans nos données connues, nous n'aurions pas besoin d'un théorème pour vérifier cette égalité.

Enfin, pour savoir s'il s'agit de convergence simple ou uniforme : la convergence uniforme suffit en général pour préserver les propriétés désirées. Si nous ne l'avons pas, nous devons rajouter une hypothèse indevinable, or nous n'en avons pas ici. La convergence supposée est donc uniforme. On obtient alors le théorème d'interversion suivant :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a,b]$. On suppose que :

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$;

— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est continue par morceaux sur $[a,b]$;

— l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Alors $\sum_{n\geqslant 0}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ converge, et on a : $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$.

bonne hypothèse de convergence pour intervertir

pour que cette intégrale existe

pour que cette intégrale existe

pour que cette somme existe

Exercice 9. Reconstituer ainsi le théorème analogue dans le cas des suites de fonctions.

Le théorème de convergence dominée. Comme le nom du théorème l'indique, on se souvient que ce théorème remplace l'hypothèse de convergence uniforme par l'hypothèse « indevinable » de domination. Analysons l'égalité à démontrer :

pour que cette limite existe : $\left(\int_I f_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ converge

pour que $f(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$ existe : $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge (au moins simplement)

pour que cette intégrale existe : f_n c.p.m et intégrable

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

pour que cette intégrale existe : f c.p.m et intégrable

implique par comparaison :

implique par comparaison :

$+$ Hypothèse de domination : il existe $\varphi : I\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que : $\forall (n,t)\in\mathbb{N}\times I$, $|f_n(t)|\leqslant\varphi(t)$

Comme nous l'avions dit pour le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, la continuité par morceaux de f est une hypothèse et non une conclusion. L'intégrabilité de f_n découle de l'hypothèse de domination et du théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, parce que φ est intégrable. C'est aussi le cas de l'intégrabilité de f, puisque l'inégalité $|f_n(t)|\leqslant\varphi(t)$ implique $|f(t)|\leqslant\varphi(t)$ quand $n\to+\infty$. Bref, l'intégrabilité de f_n et f n'est pas une hypothèse, mais une conclusion. Pour le reste, il n'y a pas de subtilité, et on obtient le théorème suivant :

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur I. On suppose que :

— la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers une fonction f ;

— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est continue par morceaux sur I ;

— l'application f est continue par morceaux sur I ;

— il existe une application $\varphi : I\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leqslant\varphi$ (Hypothèse de domination).

Alors :

— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est intégrable sur I ;

— l'application f est intégrable sur I ;

— la suite $\left(\int_I f_n(x)\mathrm{d}x\right)$ converge, et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x$.

hypothèse minimale pour que f existe

donne l'intégrabilité par comparaison

pour que cette limite existe

Exercice 10. Par une analyse analogue, retrouver l'énoncé du théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Exercice 11. Par une analyse analogue, retrouver l'énoncé du théorème d'intégration terme à terme. On se souviendra que l'hypothèse de convergence uniforme est remplacée par l'hypothèse que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_I |f_n|$ converge.

5.2 ✓ Théorèmes de régularité : quand se ramener à des segments

Tous les théorèmes concernant la RÉGULARITÉ d'une fonction (que ce soit pour la limite d'une suite de fonctions, une somme de série de fonctions, ou une intégrale à paramètre) admettent une version assouplie. C'est-à-dire : si la conclusion d'un théorème est la continuité, dérivabilité, classe C^1 (ou plus généralement classe C^k) sur I d'une fonction, alors il suffit de vérifier ses hypothèses non pas sur I, mais sur tout segment $[a,b]\subseteq I$.

Évidemment, pour certaines hypothèses, il n'y a aucune simplification du fait de se ramener à un segment. Il serait inutile de démontrer la convergence simple sur tout segment inclus dans I, vu que les calculs resteraient les mêmes que si l'on voulait démontrer la convergence simple sur I. Ainsi, on se ramène à des segments pour les hypothèses :

— de convergence uniforme ;

— de domination.

Insistons sur le fait que se ramener à des segments n'est permis que pour les théorèmes portant sur la régularité. **Il serait totalement illicite de se ramener à des segments pour le théorème de la double limite, ou un théorème d'interversion limite-intégrale**.

Quand est-il pertinent de se ramener à des segments ? La réponse est très simple : quand les hypothèses ne sont pas vérifiées sur tout l'intervalle I. Cela arrive très souvent lorsqu'on étudie la convergence uniforme (*via* la convergence normale) d'une série de fonctions définies sur un intervalle ouvert ou non borné : $]0,+\infty[$ est l'exemple par excellence. De même pour l'hypothèse de domination dans le cas des intégrales à paramètres. Ainsi, **ayez dans un coin de la tête que cela peut être nécessaire dès que I est un intervalle ouvert ou non borné**.

Songer à se ramener à des segments nécessite aussi du courage intellectuel. Vous êtes assez nombreux à faire des affirmations contre le sens commun pour « forcer » un résultat. Si vous le faites dans ce chapitre, vous vous privez du moindre espoir de penser à recourir aux segments, dans le cas où vous ne parvenez pas à appliquer un théorème de régularité des suites ou séries de fonctions, ou des intégrales à paramètres.

5.3 ✓ Calcul d'une limite de la forme : $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

5.3.1 ✓ Cas d'une limite finie

Nous avons envie d'écrire : $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$. L'interversion des symboles $\lim\limits_{x\to a}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ se fait avec le théorème de la double limite. Pour l'appliquer, il faut démontrer la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur un intervalle I qui n'est pas précisé dans l'énoncé à démontrer. Vous le choisissez **comme vous le voulez**, tant que a en est une extrémité. Puisque vous avez le choix, faites en sorte que ce soit un intervalle où il est facile de vérifier la convergence uniforme (*via* la convergence normale par exemple). Par exemple, si l'on doit déterminer la limite de $x\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{1+n^2x}$ quand $x\to+\infty$, il faut choisir un intervalle ayant $+\infty$ pour extrémité, mais il serait idiot de retenir $]0,+\infty[$: on ne parviendrait pas à démontrer la convergence normale sur cet intervalle, parce que la norme infinie de $x\mapsto\dfrac{1}{1+n^2x}$ est 1 (et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1$ diverge). En revanche, n'importe quel autre choix d'intervalle de la forme $[a,+\infty[$ permet de majorer la norme infinie par $\dfrac{1}{an^2}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

5.3.2 Cas d'une limite infinie

Le théorème de la double limite ne peut JAMAIS s'appliquer dans cette configuration, vu qu'il contient dans sa conclusion le fait que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ (dont la somme est la limite candidate) soit convergente. Vous devez donc procéder autrement. Deux approches sont possibles :

— en utilisant une comparaison entre série et intégrales, comme expliqué en section 4 ; ← page 9

— si la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est monotone, alors nécessairement elle admet une limite en a, finie ou infinie ; on exclut la première possibilité en supposant qu'il existe une limite finie, et en montrant que les sommes partielles deviennent arbitrairement grandes quand $x\to a$, pour en déduire une absurdité.

Les deux méthodes nécessitent que les fonctions f_n soient monotones.

La deuxième approche a l'avantage d'être en général (plutôt) facile à utiliser, lorsque a est un réel (et non une extrémité infinie) en lequel les f_n sont tous définis. Pour montrer que les sommes partielles deviennent arbitrairement grandes, il suffit que la série obtenue quand $x\to a$ soit à termes positifs et divergente.

La première s'applique en des cas plus généraux (pas seulement pour la limite en un réel a) et est plus précise : dans bien des cas, elle donne un équivalent asymptotique en plus de la limite, et un encadrement explicite pour tout x.

Exemple 7. Dans l'exemple 6, nous avons montré avec une comparaison entre une série et une intégrale ← page 10 que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+nx)} = +\infty$. Retrouvons cette limite avec la seconde approche ci-dessus.

Pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'application $x\mapsto \dfrac{1}{n(1+nx)}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, en tant que somme (certes infinie) de fonctions décroissantes, l'application $f: x\mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+nx)}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$. Elle admet donc une limite finie ou infinie en 0^+. Supposons qu'il s'agisse d'une limite finie ℓ. Pour tout $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, l'inégalité $f(x)\geqslant \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n(1+nx)}$ (vraie parce que nous sommons des termes POSITIFS) entraîne, quand $x\to 0^+$, l'inégalité : $\forall N\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ \ell\geqslant \sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}$. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ est divergente et à termes positifs, donc la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ et elle ne peut pas être majorée par ℓ : d'où une contradiction. On en déduit que f n'admet pas de limite finie en 0, donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+nx)} = +\infty$.

5.4 ✓ Calcul d'une limite de la forme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$, ou : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$

5.4.1 ✓ Cas d'une variable entière

Il s'agit de justifier l'interversion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$. La difficulté n'est pas de savoir de quel problème d'interversion il s'agit (on intervertit limite et intégrale), mais plutôt de trancher entre les deux théorèmes d'interversion que vous avez : le théorème de convergence dominée, et le théorème de passage à la limite sous le signe intégrale lorsque l'intervalle d'intégration est un segment. Pour une partie de la problématique, la réponse est dans le nom du théorème.

On utilise sans ambiguïté possible le théorème de convergence dominée lorsqu'on est dans une de ces deux configurations :

— l'intervalle d'intégration N'est PAS un segment :

— la limite obtenue pour la convergence simple N'EST PAS continue partout. En effet, dans ce cas de figure, vous êtes sûrs qu'il n'y a pas de convergence uniforme, et ce sans faire le moindre calcul : la convergence uniforme conserve la continuité.

Ainsi, lorsque vous avez une fonction f limite qui est définie « par morceaux » (en général lorsque vous avez calculé une limite simple de fonctions s'exprimant à l'aide de puissances), vérifiez s'il y a des incompatibilités de limites à gauche et à droite en les points de raccord : si c'est le cas, elle n'est pas continue, et il n'y a pas convergence uniforme. Voir la section 2.1. ← page 3

Attention au fait que même si on intègre entre deux réels, il peut s'agir d'une intégrale généralisée : par exemple $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(nt)}{t\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ n'est pas une intégrale sur un segment, parce que le dénominateur s'annule en 0 et l'application $t \mapsto \dfrac{\arctan(nt)}{t\sqrt{t}}$ est donc continue sur $]0,1]$ (ET NON $[0,1]$). Vous vous devez d'être très vigilants à ce sujet : la vérification scrupuleuse ne prend que quelques secondes et vous évite une erreur rédhibitoire.

Même si vous trouvez l'hypothèse de domination difficile à vérifier, en pratique elle est beaucoup moins contraignante à vérifier que la convergence uniforme (**au sens où l'hypothèse de domination est presque toujours vérifiée ! c'est loin d'être le cas de la convergence uniforme**), lorsque vous êtes sur un segment. En effet, dans ce cas-là, l'intégrabilité est automatique et il suffit donc de se concentrer sur la domination indépendante de n. On y parvient *via* les approches proposées dans la section 5.1 du document *Méthodes* du chapitre d'intégration.

Mais finalement, hors des cas génériques donnés plus haut, il est difficile de donner une règle générale sur le meilleur théorème d'interversion à utiliser. L'expérience vous donnera (je l'espère) l'intuition nécessaire pour voir en quels cas la convergence uniforme semble plus facile à obtenir que la fonction de domination, et inversement. Si l'une ou l'autre hypothèse se ramène à étudier une différence « petite » ainsi que définie dans *L'art de la majoration*, cela doit guider votre réflexion.

N'oubliez pas, aussi, que certaines limites de la forme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t$ peuvent être calculées sans théorème d'interversion, mais avec un encadrement par des intégrales explicitement calculables, et le théorème des gendarmes. Revoir à cet effet la section 6 du document *Méthodes* du chapitre d'intégration, ou le document *L'analyse, ou l'art de la majoration* (section 1.5).

Exemple 8. Montrons : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\sin(x)x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 \frac{\sin(x)x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{\sin(x)x^n}{1+x^n}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1\cdot x^n}{1+0}\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\sin(x)x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = 0$.

5.4.2 Cas d'une variable réelle

Si nous devons calculer une limite de la forme : $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ (avec a éventuellement infini), on remarque que la seule différence avec le paragraphe précédent est qu'on a remplacé le paramètre entier n par une variable réelle x. L'analogue du théorème de convergence dominée, dans ce cas-là, est alors le théorème de convergence dominée à paramètre continu (on se souvient qu'on parle de paramètre « continu » pour x par opposition au paramètre « discret » n : cela n'a rien à voir avec l'idée que l'application $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ serait continue). Il n'y a pas d'analogue au programme de la convergence uniforme dans le cas des intégrales à paramètres, donc il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le théorème à utiliser.

Si vous ne savez pas à quel intervalle doit appartenir x, pour appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu : qu'importe, tant qu'une extrémité de l'intervalle est l'endroit où l'on prend la limite de x (si l'on prend $x \to +\infty$, alors on applique le théorème de convergence dominée à paramètre continu avec $x \in [0, +\infty[$ par exemple). N'hésitez pas à « viser large », pour éviter d'éventuels problèmes de fonctions non bornées (qui empêcheraient une hypothèse de domination) : par exemple, la présence d'un $\frac{1}{x}$ doit vous conduire à éviter de prendre 0 pour première extrémité, car $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$ et cela pourrait poser problème dans l'hypothèse de domination. On « s'en éloigne » en se plaçant sur $[1, +\infty[$ à la place.

Notez bien qu'en dehors du fait de remplacer n par x, rien ne change par rapport aux hypothèses du théorème de convergence dominée classique : on pensera cependant bien à ne pas parler de « convergence simple » dans ce contexte (inexistant lorsqu'on n'a pas une suite ou série de fonctions).

Exemple 9. Montrons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1} \mathrm{d}t = 0$, avec le théorème de convergence dominée à paramètre continu. On pose : $\forall x \in [1, +\infty[$, $\forall t \in]0,1[$, $f(x,t) = \dfrac{t^x \ln(t)}{t-1}$. Alors :

— pour tout $x \in [1, +\infty[$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$;

— pour tout $t \in]0,1[$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,t) = 0$, et l'application $\ell : t \mapsto 0$ est continue par morceaux sur $]0,1[$;

— pour tout $x \in [1, +\infty[$ et tout $t \in]0,1[$, on a $t^x \leqslant t$ (le reste étant positif), si bien que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ \forall t \in]0,1[, \quad |f(x,t)| \leqslant \frac{t \ln(t)}{t-1} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}),$$

et $\varphi : t \mapsto \dfrac{t \ln(t)}{t-1}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, d'une part l'application $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, et d'autre part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \ell(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 0\mathrm{d}t = 0$. D'où le résultat.

Exercice 12. Vérifier que : $\forall t \in]0,1[$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,t) = 0$, et que φ est intégrable sur $]0,1[$.

Exercice 13. Calculer cette limite sans théorème d'interversion.

5.5 ✓ Démonstration d'une égalité de la forme : $\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$

Lorsqu'on vous demande de démontrer une égalité du type : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, vous comprenez ce qu'il faut faire : utiliser un des théorèmes d'interversion permettant de permuter $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_I$, puis calculer $\displaystyle\int_I f_n(x)\mathrm{d}x$ pour obtenir u_n ; mais lorsqu'on demande de démontrer une égalité du type : $\displaystyle\int_I f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, c'est moins clair !

L'idée, dans ce type d'exercices, est que f est une fonction trop compliquée pour que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)\mathrm{d}x$ soit directement calculable par un calcul de primitive. Mais il est possible de remplacer f par une somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ de fonctions dont les intégrales sont calculables. Il faut alors justifier qu'on puisse écrire :

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x,$$

ce qu'on fait grâce au théorème d'intégration terme à terme (celui se restreignant à un segment est rarement préférable dans cette configuration). Il ne reste plus qu'à calculer $\displaystyle\int_I f_n(x)\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour en déduire le résultat voulu.

Il s'agit de se demander comment écrire f sous forme de somme de fonctions plus simples à intégrer. **Cela passe très souvent par un développement en série entière**. En effet, les développements en série entière permettent de remplacer une fonction, si compliquée soit-elle, par une somme de monômes. Les monômes ne nous posent que rarement des problèmes en intégration : au pire, on peut souvent les éliminer en intégrant par parties.

Ainsi, pour écrire f comme somme de série, il faut en général reconnaître en f :

— une fonction développable en série entière, par exemple :

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \ ;$$

— une composition avec une fonction développable en série entière, par exemple :

$$f(x) = x^x = e^{x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln(x))^n}{n!} \ ;$$

— un produit d'une fonction simple avec une fonction du type précédent, par exemple :

$$f(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-nx}.$$

Le cas le plus fréquent est l'élimination d'un quotient (c'est souvent cela qui nous embête, en intégration) **en utilisant la formule :**

$$\boxed{\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n}$$

avec un choix adapté de u. N'oubliez pas qu'on doit avoir $|u| < 1$: si, au dénominateur, vous avez un facteur plus grand que 1, une factorisation préalable par ce terme prépondérant est nécessaire pour se ramener au cas $|u| < 1$. Comme dans l'exemple ci-dessous : pour tout $t \in]0, +\infty[$ on a :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t}{e^t(1-e^{-t})} = te^{-t} \times \frac{1}{1 - \underbrace{e^{-t}}_{\in]0,1[}} = te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n .$$

(on factorise par e^t pour obtenir une quantité u inférieure à 1 au dénominateur : en effet $e^t > 1$ ne permet pas d'utiliser le développement ci-dessus)

Attention, au moment de justifier l'intégration terme à terme : *même si vous avez utilisé un développement en série entière*, ce N'EST PLUS une série entière en général lorsqu'on la compose avec une autre fonction (hormis $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x}$ ci-dessus, aucune des fonctions ci-dessus n'est écrite comme somme de série entière) ; vous ne pouvez donc pas conclure brièvement en utilisant le fait qu'une série entière puisse être intégrée terme à terme sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence : vous devez vérifier des hypothèses !

Pour vous simplifier la vie. Au moment de justifier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, pour intégrer terme à terme : vous n'avez RIEN à justifier puisque vous avez utilisé un développement en série entière usuel pour faire apparaître $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$: vous avez donc implicitement utilisé le fait que vous sachiez déjà la convergence (simple) de cette série. Vous n'avez donc qu'à mentionner que vous savez que cette série converge du fait de son rayon de convergence, etc. Ne vous fatiguez pas à comparer à une série de Riemann, ou que sais-je !

Dans le théorème d'intégration terme à terme : justifiez rapidement la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ en citant la convergence d'une série usuelle !

5.5.1 Cas rare : si aucun des deux théorèmes d'intégration terme à terme ne s'applique

Il est possible qu'au moment de vouloir écrire : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$, les hypothèses des deux théorèmes d'intégration terme à terme soient mises en défaut, c'est-à-dire :

— la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur I, ou I n'est pas un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$ ne converge pas.

Cela se produit en général lorsque nous sommes en présence d'une série convergente qui n'est pas absolument convergente. Un exemple tout à fait concret où cela peut se produire est dans la démonstration de l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

Pour y parvenir en suivant les conseils de ce document, on utiliserait le développement en série géométrique dans l'espoir d'écrire :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{4n} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment (et de toute façon il n'y a pas convergence uniforme, ni même simple, sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (-1)^n x^{4n} \end{cases} \right)$, puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ diverge) ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 \left| (-1)^n t^{4n} \right| \mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Dans ces cas-là, nous avons deux possibilités :

1. Remplacer la borne problématique par une variable t (strictement supérieure ou inférieure à la borne problématique, 1 dans l'exemple ci-dessus), pour se ramener à des intervalles d'intégration $[0,t]$ où nous avons la convergence uniforme et pouvons intégrer terme à terme ; ensuite, on fait tendre t vers ladite borne, ce passage à la limite donnant ce qu'on veut d'après un théorème de continuité ou le théorème de la double limite.
2. Rappelons-nous que nous avions un autre théorème pour intervertir limite et intégrale : **le théorème de convergence dominée** ! Il n'est pas très pratique pour les séries de fonctions, mais reste utilisable **pourvu qu'il soit possible de calculer ou majorer les sommes partielles** (cas d'une série géométrique).

Nous parlons plus amplement du premier point, qui concerne surtout les fonctions développables en série entière, dans la section 5.6. Ici, nous nous concentrons sur la façon d'appliquer le théorème de convergence dominée aux séries de fonctions. Pour cela, on applique plus précisément ce théorème aux **sommes partielles**. → page 27

Pour l'utiliser en vue de démontrer : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$,

1. On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.

2. On montre que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I, et que sa somme est continue par morceaux sur I **(ce dernier point nécessite de savoir calculer explicitement cette somme : c'est en général le cas, car on a utilisé une somme de série entière usuelle)**.
3. On montre qu'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{n=0}^{N} f_n\right| \leqslant \varphi \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

(c'est l'ordre des quantificateurs qui nous l'enseigne encore : φ ne dépend pas de N ; notez surtout qu'on ne majore pas f_n ici, ni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, mais les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} f_n$).

Alors, en conclusion, f_n est intégrable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$ (non évident ici, vu que φ domine les SOMMES PARTIELLES et non les f_n : pour le démontrer, on note d'abord que $\sum_{n=0}^{N} f_n$ est intégrable sur I pour tout $N \in \mathbb{N}$; ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a : $f_N = \sum_{n=0}^{N} f_n - \sum_{n=0}^{N-1} f_n$, et une différence de fonctions intégrables est intégrable vu que $\mathrm{L}^1(I, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel, d'où le résultat), la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est également intégrable sur I, et on a :

$$\int_I \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \int_I \sum_{n=0}^{N} f_n(t)\mathrm{d}t \iff \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$$

(on « sort la somme » par linéarité de l'intégrale : c'est ici possible sans problème, car la somme est finie)

$$\iff \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Comme on le voit, il faut majorer les sommes partielles, ce qui est presque peine perdue si on ne sait pas les calculer explicitement. Il vaut mieux avoir affaire à une somme géométrique pour s'en sortir. Sinon, il reste la comparaison entre série et intégrales, comme on le rappelle en section 4. ← page 9

Exemple 10. Appliquons le théorème de convergence dominée à la justification de l'égalité :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{4n}\mathrm{d}x.$$

Pour cela, posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1[$, $f_n(x) = (-1)^n x^{4n}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4}$ (il s'agit d'une série géométrique de raison $-x^4 \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$.

Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| = \frac{1-(-x^4)^{N+1}}{1+x^4} \leqslant \frac{2}{1+x^4} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

(il faut se débarrasser de la dépendance en N, donc il suffit de majorer $-(-x^4)^{N+1}$, et comme $x \in [0,1[$ le tour est joué)

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2}{1+x^4}$ et continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée.

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, f et f_n sont intégrables sur $[0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on a : $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{4n}\mathrm{d}x$. C'est-à-dire, après calculs, conformément à ce qui

fut établi en début de section :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

Exercice 14. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer explicitement $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ (*c'est très calculatoire*), et en déduire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\pi + \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)$.

5.5.2 Cas encore plus rare : même le théorème de convergence dominée ne s'applique pas

On l'a vu plus haut : pour appliquer le théorème de convergence dominée avec succès, encore faut-il être en mesure de majorer les sommes partielles. Pour que ce soit le cas, il faut idéalement avoir des sommes partielles explicitement calculables (sommes géométriques, télescopiques), ou au moins explicitement majorables (comparaison série-intégrale). Hors de ce cas de figure, que faire ?

Il ne reste plus qu'à montrer l'intégration terme à terme à la main. C'est-à-dire : après avoir justifié que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable, on écrit :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \int_I \sum_{n=0}^{N} f_n + \int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{N} \int_I f_n + \int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n.$$

Le membre de droite converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ si et seulement si : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n = 0$. C'est donc ce qu'on s'échine à démontrer.

Intégration terme à terme : quand *vraiment* rien ne marche

$$\text{Montrer : } \lim_{N\to+\infty} \int_I R_N = 0$$

La fonction R_N est le reste d'indice N de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

Exemple 11. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n f_n$ une série de fonctions vérifiant le théorème spécial des séries alternées en tout $x \in I$, et telle que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I |f_n| = 0$. On veut montrer : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_I f_n$. D'après ce qu'on a dit plus haut, il suffit pour cela de montrer que la suite des intégrales des restes converge vers 0. Or, par le théorème spécial des séries alternées, on a :

$$\left| \int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n f_n \right| \leqslant \int_I \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n f_n \right| \leqslant \int_I |f_{N+1}| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n f_n = 0$. On conclut donc comme expliqué ci-dessus que l'intégration terme à terme est valable.

5.6 ✓ Utilisation de la continuité dans ce chapitre

Nous rappelons que par définition, une application f est continue en a si : $f(a) = \displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$. Nous utiliserons cette définition dans ce chapitre principalement ainsi :

— on montre une égalité du type : $f(x) = g(x)$, pour tout x dans un certain intervalle, et **différent de** a, avec f une intégrale à paramètre ou une somme de série entière, et g une application **continue** ;

— on aimerait montrer que cette égalité reste aussi valable quand $x = a$; pour cela, on écrit : $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$; comme g est continue, cela donne : $\lim_{x\to a} f(x) = g(a)$;

— il reste à vérifier que f est continue en a, et on en déduit : $f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = g(a)$, d'où le résultat.

Les raisons pour lesquelles l'égalité $f(x) = g(x)$ pourrait ne pas être vérifiée pour $x = a$ *a priori* sont en général :

— parce que f est une somme de série entière et a est sur le bord du domaine de convergence ;

— parce que f est une intégrale à paramètre, dont l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée sur les mêmes intervalles pour la continuité et la classe C^1 ;

mais il y a d'autres raisons possibles.

Évidemment, la continuité ne sert pas qu'à cela (à quoi d'autre, d'ailleurs ?). Mais c'est ainsi que vous l'utiliserez le plus souvent.

6 Équivalents et développements asymptotiques de sommes de séries de fonctions

Nous savons trouver des limites de sommes de fonctions $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en un point a, soit par le théorème de la double limite, soit par la méthode de la section **??** (ce qui ne couvre pas tout l'éventail des possibilités : vous trouverez d'autres résultats généraux dans les feuilles d'exercices, notamment pour l'étude des sommes alternées). Nous discutons ici de la recherche d'équivalents. Il y a essentiellement trois approches possibles : ← page **??**

1. **Effectuer une comparaison série-intégrale.** C'est abondamment discuté à la section 4. ← page 9
2. Si, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la fonction f_n **est négligeable devant** $f_0(x)$ **au voisinage de** a, alors on peut éventuellement *conjecturer* : $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \underset{x\to a}{o}\left(f_0(x)\right)$, de sorte que : $f(x) = f_0(x) + \underset{x\to a}{o}\left(f_0(x)\right) \underset{x\to a}{\sim} f_0(x)$.

   C'est en particulier le cas très souvent lorsque $f_0(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors que les f_n sont continues en a. De la sorte, si l'on montre la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ (noter qu'elle commence à $n = 1$), la fonction f s'écrit comme somme de f_0 qui tend vers l'infini et d'une somme ayant une limite finie (par continuité), donc : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f_0(x)$.

   Si l'on n'est pas dans ce cas très favorable : on montre à la main que $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right|$ est négligeable devant $f_0(x)$ par des majorations explicites ou en appliquant le théorème de la double limite à la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f_n}{f_0}$.
3. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(x)$ **est équivalente quand** $x \to a$ **à** $\alpha_n g(x)$ où la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge vers un nombre non nul, il est tentant de conjecturer : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$.

   On démontre la conjecture en essayant d'appliquer le théorème de la double limite à la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f_n}{g}$. Si l'on y parvient, alors on a : $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} \frac{f_n(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$. Après multiplication par $g(x)$, cela donne l'équivalent voulu.

Deux approches marchant épisodiquement :

4. **Chercher une relation entre** $f(x)$ **et** $f(x+1)$**.** Le changement d'indice $n' = n + 1$ permet éventuellement de faire apparaître le terme général de $f(x)$ dans l'expression de $f(x+1)$, ou du moins une

expression qui y ressemble. On peut aussi parfois reconnaître une somme télescopique en considérant $f(x) \pm f(x+1)$, etc.
Une fois que vous avez trouvé une relation simple entre $f(x)$ et $f(x+1)$, disons de la forme : $f(x) = f(x+1) + g(x)$ pour g ayant une limite infinie en a, il vous suffit de montrer la continuité de f en $a+1$ pour conclure : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ (en effet $f(a+1)$ est négligeable devant $g(x)$ qui a une limite infinie quand $x \to a$: c'est l'intérêt de l'approche).

5. **Accélération de convergence et transformation d'Abel.** Si vous n'arrivez pas à appliquer le théorème de la double limite comme indiqué dans les méthodes ci-dessus, vous pouvez essayer de vous ramener à une autre série dont le terme général converge plus vite vers 0 *via* une transformation d'Abel. Ceci, dans l'espoir de réussir à montrer la convergence uniforme pour cette nouvelle série.

Enfin, vous trouverez dans les feuilles d'exercices ces deux résultats généraux très utiles, à savoir adapter :

6. Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue, convexe et de limite nulle en l'infini, alors : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nh) = \frac{f(0)}{2}$.
L'hypothèse de convexité peut être remplacée par la stricte décroissance et la classe C^1, etc.
On peut parfois adapter la démonstration pour avoir, lorsque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n f_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{f_0(x)}{2}$.

7. Si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites positives telles que : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, et si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R qui diverge en R, alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to R}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ (chapitre VIII).
On utilise ce résultat en essayant de comparer a_n au coefficient général b_n d'une série entière dont on connaît la somme.

Comme vous le voyez, on est loin d'avoir une méthode systématique. Seule l'expérience vous permettra d'acquérir les bons réflexes pour adopter la bonne méthode d'emblée.

Trouver un équivalent de $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$: récapitulatif des méthodes

1. Effectuer une comparaison série-intégrale.
2. Montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \underset{x\to a}{o}(f_0(x))$ (cas favorable : $f_0(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$ et f_n continue en a si $n \geqslant 1$).
Alors : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f_0(x)$.
3. Si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\sim} \alpha_n g(x)$, montrer : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$, avec le théorème de la double limite appliqué à $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f_n}{g}$.
4. Chercher une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
5. Effectuer une transformation d'Abel et essayer les méthodes ci-dessus sur la nouvelle série.

Deux cas particuliers :

1. Avec le théorème spécial des séries alternées, parfois : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{f_0(x)}{2}$.
2. Série entière à termes positifs et divergente sur le cercle d'incertitude : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to R}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Si l'on cherche non pas un équivalent, mais un développement asymptotique, disons par exemple : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ il suffit d'appliquer ce qui précède à $f(x) - \frac{a}{x}$. Pour que cela se goupille bien, il faut cependant écrire $f(x) - \frac{a}{x}$ comme une somme de série, ou en tout cas s'y ramener : cela dépend comment vous avez obtenu le terme $\frac{a}{x}$ (par exemple, si la constante a fut obtenue par le calcul d'une somme, remplacez a par ladite somme).

Dans les exemples qui suivent, je ne me soucie pas de la question de l'existence de la somme. Bien entendu, vous ne la prendrez pas pour argent comptant et vous compléterez tout ce que j'ai omis.

Exemple 12. (Illustration du second cas) Cherchons un équivalent quand $x \to 0$ de : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.
On a :

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

Or l'application $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et donc en 0) pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\left(x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ *via* une application classique du théorème spécial des séries alternées. Sa somme est donc continue en 0, et en particulier a une limite finie en 0. Comme : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Exemple 13. (Autre illustration du second cas) Cherchons un équivalent quand $x \to +\infty$ de la somme $\zeta(x) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On est dans le second cas de figure, puisque : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, $\frac{1}{n^x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2^x}\right)$.
En effet : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^x = 0$, car : $\frac{2}{n} < 1$. Il est donc tentant de conjecturer : $\zeta(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$.
Montrons-le.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, $\forall x \in [2, +\infty[$, $f_n(x) = \left(\frac{2}{n}\right)^x$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 3} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[2, +\infty[$, étant donné que :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=3}^{+\infty} f_n(2) = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^2 = 4\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

par convergence des séries de Riemann d'exposant $2 > 1$. Par le théorème de la double limite, on a donc : $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=3}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Ceci équivaut à : $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2^x}\right)$, ce qui permet de conclure :

$$\zeta(x) - 1 = \frac{1}{2^x} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}.$$

Exercice 15. Montrer : $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2^x}\right)$, en utilisant une comparaison série-intégrale plutôt que le théorème de la double limite.

Exemple 14. (Illustration du troisième cas) Cherchons un équivalent quand $x \to +\infty$ de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(x+\sqrt{n})}$. Comme : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\frac{1}{n^2(x+\sqrt{n})} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\frac{1}{x}$, on conjecture naturellement :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(x+\sqrt{n})} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6x}$. Montrons-le en suivant la démarche indiquée, c'est-à-dire en appliquant le théorème de la double limite à la suite de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(f_n : x \mapsto \frac{x}{n^2(x+\sqrt{n})}\right)$. En utilisant : $\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+,\ x \leqslant x+\sqrt{n}$, on a facilement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty,$$

donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement (et uniformément) sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2(x+\sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

et donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(x+\sqrt{n})} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

Exemple 15. (Illustration du quatrième cas) Proposons une autre approche pour obtenir l'équivalent de l'exemple 12. Posons : $\forall x>0,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$. Pour tout $x>0$ on a, *via* changement d'indice :

$$f(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x} = -\left(f(x)-\frac{1}{x}\right),$$

donc : $\forall x>0,\ f(x) = \dfrac{1}{x} - f(x+1)$. Or f est continue en 1 (reprendre l'argument de convergence uniforme de l'exemple 12), donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x+1) = f(1) < +\infty$. Comme $\dfrac{1}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, on conclut : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{x}$.

Exemple 16. (Illustration du cinquième cas) Cherchons un équivalent quand $x\to+\infty$ de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$. Aucune des méthodes citées ci-dessus ne s'applique directement à l'étude d'un équivalent en l'infini (le vérifier pour s'en convaincre !). Effectuons une transformation d'Abel (d'abord avec les sommes partielles, puis on passe à la limite). On obtient :

$$\forall x>0,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+x} - \frac{1}{2n+1+x}\right).$$

Nous allons obtenir un équivalent de cette somme par une comparaison série-intégrale, l'application $t\mapsto \dfrac{1}{2t+x} - \dfrac{1}{2t+1+x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x>0$. On obtient pour tout $x>0$:

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2t+x}-\frac{1}{2t+1+x}\right)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+x}-\frac{1}{2n+1+x}\right) \leqslant \frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}+\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2t+x}-\frac{1}{2t+1+x}\right)\mathrm{d}t.$$

Le calcul de ces intégrales est sans mystère. On obtient pour tout $x>0$:

$$\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(x)\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+x}-\frac{1}{2n+1+x}\right) \leqslant \frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(x)\right).$$

Or : $\dfrac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(x)\right) = \dfrac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et : $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{x(1+x)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, donc l'encadrement ci-dessus donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+x}-\frac{1}{2n+1+x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}.$$

Exercice 16. Vérifier ce qui a été omis (expression de la transformation d'Abel, monotonie, comparaison série-intégrale, développements asymptotiques).

Table des matières