Méthodes (MP) – Suites et séries de fonctions

✓ Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Pour étudier le comportement d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définies sur I :

1. Pour tout $x \in I$, on regarde si $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe et est finie ; si oui, on appelle $f(x)$ la limite, et cela définit une fonction f sur I. Par définition, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers f.
2. On regarde le comportement de $\|f_n - f\|_\infty$ quand $n \to +\infty$: si les fonctions en présence sont simples, l'étude des variations de $f_n - f$ permet d'en déterminer les extremums, et donc d'en déduire la valeur exacte de $\|f_n - f\|_\infty$. Mais des inégalités peuvent suffire :
   (a) Pour montrer la convergence uniforme, on peut déterminer une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$, *ne dépendant pas de x* et convergeant vers 0, telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n.$$
   Dans ce cas on a, par propriété de la borne supérieure (marquée (†) dans le livret de cours) :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_n - f\|_\infty \leqslant \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   et donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers f.

   Majoration indépendante de n, de t, de x... Si l'on s'y perd, comment savoir : on veut un majorant de TOUS les $|f_n(x) - f(x)|$. Mais si le majorant dépend de x, alors il change pour chaque valeur de x, et donc il ne majore pas TOUS les $|f_n(x) - f(x)|$ (exemple : si $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{|x|}{n}$, alors pour $x = 1$ le majorant égale $\frac{1}{n}$, et pour $x = 2$ le majorant égale $\frac{2}{n}$: on voit que $\frac{1}{n}$ ne majore que $|f_n(1) - f(1)|$ et pas $|f_n(2) - f(2)|$ *a priori*).
   Pour éviter ce problème, et avoir un majorant de TOUS les $|f_n(x) - f(x)|$, il suffit qu'il ne dépende pas de x.

   Noter que si $f_n(x) - f(x)$ est de la forme d'une différence « petite » ainsi qu'étudiée dans *L'art de la majoration*, vous avez une méthode pour produire ce majorant α_n. Sinon, on se débrouille pour éliminer la dépendance en x, en suivant dans les grandes lignes les méthodes utilisées pour vérifier l'hypothèse de domination (*Méthodes* du chapitre d'intégration) pour éliminer la variable gênante (mais de façon moins exigeante, vu qu'on veut « seulement » que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

   (b) Pour contredire la convergence uniforme, il suffit de trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n tel que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ soit « grand », de sorte que s'il y avait convergence uniforme, on aurait une contradiction en écrivant :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \geqslant \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0}.$$
   Pour trouver x_n, faire des essais ($x_n = \frac{1}{n}$, $x_n = -n$, etc.). Bien sûr, ces essais ne sont pas totalement au hasard et se motivent : voir ci-dessous.

   À noter que si $f_n - f$ n'est pas bornée pour tout n assez grand, alors sa norme infinie vaut $+\infty$ et la convergence uniforme est déjà contredite.

Montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur I

1. Poser $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in I$ (convergence simple).
2. Majorer $|f_n(x) - f(x)|$ indépendamment de x : soit α_n le majorant.
3. En déduire : $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \alpha_n$. Si $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors : $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1 Contredire la convergence uniforme : détails

Il est difficile de donner une méthode systématique pour produire une minoration (avec de bons choix de x_n) contredisant la convergence uniforme. Le seul principe général qu'on peut édifier est : regarder quel terme, dans la convergence simple, assure la convergence vers la limite $f(x)$ (par exemple : une exponentielle dans le cas où nous utilisions le théorème des croissances comparées, ou une suite géométrique de raison $x \in]-1,1[$, ou un quotient par un polynôme en n, etc.), et voir si des choix de x_n peuvent « éliminer » ce terme.

Il faut que x_n dépende de n : si x_n est un réel x *fixé*, alors on ne peut pas avoir de contradiction, puisque $|f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par convergence simple.

Exemple 1. La suite de fonctions de terme général $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \end{cases}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{cases}$. On le voit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, en faisant l'équivalent : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \cdot \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Mais il n'y a pas convergence uniforme : pour le montrer, on note que ce qui nous permit de démontrer la convergence simple vers $f : x \mapsto x$ est l'équivalent $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ (utilisé avec $u = \frac{x}{n}$), qui nécessite pour cela que u tende vers 0. Par conséquent, si un choix de $x = x_n$ « empêche » u de tendre vers 0, cet équivalent devient faux et f_n ne devrait pas se rapprocher de f autour de ce x choisi.

Pour cela, je fais un choix $x = x_n$ de sorte que $\frac{x}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. C'est ce qui motive l'évaluation en n dans ce qui suit. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \|f_n - f\|_\infty \geqslant |f_n(n) - f(n)| = |n\ln(2) - n| = \underbrace{n(1-\ln(2))}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty},$$

donc $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\geqslant 1}$ ne peut pas converger vers 0 et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

Exercice 1.

1. Redémontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme avec une étude de variations.
2. Montrer qu'il y a convergence uniforme si l'on se restreint à des segments. Pourquoi n'y a-t-il plus la contradiction ci-dessus ?

1.1 Cas particulier fréquent : une fonction « puissance × polynôme en n »

Les exemples de suites de fonctions qui ne convergent pas uniformément, et que vous croiserez, auront souvent un terme général de la forme :

$$f_n : x \mapsto (\text{quantité dépendant de } x)^n \times (\text{polynôme en } n) \times \begin{pmatrix}\text{autre terme, souvent s'annu-} \\ \text{lant là où la puissance vaut 1}\end{pmatrix},$$

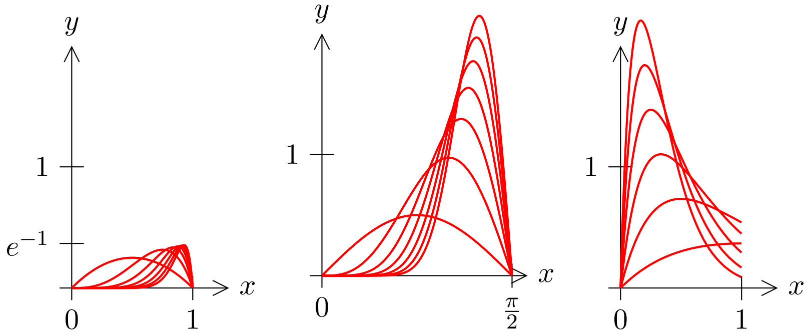
par exemple :

$$f_n : x \mapsto nx^n(1-x), \quad f_n : x \mapsto n\left(\sin(x)\right)^n \cos(x), \quad f_n : x \mapsto n^2 x e^{-nx}.$$

Je note $f_n(x) = (u(x))^n \cdot P(n) \cdot v(x)$ ces fonctions pour la suite.

Ce qui assure leur convergence simple (vers 0 dans ces trois exemples) est le théorème des croissances comparées : le terme exponentiel $(u(x))^n$ l'emporte sur le terme polynomial $P(n)$ en cas de forme indéterminée, donc dans le cas où $|u(x)| < 1$. Si $|u(x)| = 1$, un autre facteur est là pour annuler $f_n(x)$ et permettre la convergence simple vers 0 même en le point normalement problématique.

En revanche, il n'y a pas convergence uniforme **en général** (mais faites attention à ne pas généraliser à TOUS les exemples). En effet, quand $u(x) \approx 1$, on a $u(x)^n \approx 1$ et cette fonction puissance ne compense plus $P(n)$ qui tend vers $+\infty$. À cause de $P(n)$ qui n'est plus compensé par $(u(x))^n$, il apparaît un pic près du réel où $u(x) \approx 1$. La preuve en dessins, pour les trois exemples ci-dessus, où nous représentons à chaque fois f_n pour $n \in \{1,3,5,7,9,11,13\}$:



Pour le premier exemple, $x^n \approx 1$ pour $x \approx 1$. Pour le deuxième, $(\sin(x))^n \approx 1$ pour $x \approx \frac{\pi}{2}$. Ce n'est pas toujours pour $x \approx 0$ et il faut s'adapter à la situation.

Notez que le phénomène est vrai pour $u(x)$ « **se rapprochant** » de 1, pas ÉGAL à 1. Donc, pour produire rigoureusement les valeurs x_n telles que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ soit « grand » (et donc $\|f_n - f\|_\infty$ aussi, ce qui contredit la convergence uniforme), on prend une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ non constante et qui converge vers une valeur x telle que $u(x) = 1$.

Pour étudier le comportement de $(u(x_n))^n$ quand $n \to +\infty$, vous devez être au point sur les calculs de limites à l'aide des développements asymptotiques... À cet égard, **vous devez savoir retrouver la limite fréquemment rencontrée :** $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$**, indépendamment de votre niveau**. Je rappelle que lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à un exposant dépendant de n, le comportement asymptotique s'étudie en le mettant sous forme exponentielle. Ainsi on écrit : $(u(x_n))^n = e^{n\ln(u(x_n))}$ et on effectue un développement asymptotique de $n\ln(u(x_n))$.

Exemple 2. Nous vous laissons vérifier que la suite de fonctions de terme général :

$$f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & nx^n(1-x) \end{cases}$$

converge simplement sur $[0,1]$ vers $f = 0$. Montrons qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$: d'après ce qui précède, je dois choisir des x_n se rapprochant d'un réel x tel que $x^n \approx 1$, c'est-à-dire : x_n doit se rapprocher de 1. Je choisis par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \|f_n - f\|_\infty \geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Or, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n\times\left(-\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

Ainsi $\|f_n - f\|_\infty$ est minorée par une quantité convergeant vers $e^{-1} > 0$, et donc ne peut pas tendre vers 0 quand $n \to +\infty$. On en déduit que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 2. En vous inspirant de ce qui précède, montrer que les deux autres exemples de suites de fonctions ci-dessus ne convergent pas uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $[0,1]$ respectivement.

Exercice 3. (Gare aux généralisations hâtives) Montrer que la suite :

$$\left(f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & nx^n(1-x)^n \end{cases}\right)_{n\geqslant 0}$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f = 0$ (alors que f_n est de la forme des exemples ci-dessus).

1.2 Raisonner par l'absurde et utiliser un théorème d'interversion

On peut parfois trancher TRÈS rapidement en raisonnant par l'absurde, en supposant qu'il y a convergence uniforme. Une flopée de résultats d'interversion deviennent utilisables :

— la convergence uniforme conserve la continuité ;

— la convergence uniforme permet d'intervertir les doubles limites ;

— la convergence uniforme permet de passer à la limite sous les intégrales (et en particulier elle conserve les primitives : cela revient à intégrer sur $[a, x]$ pour x une variable) ;

et l'objectif est d'obtenir une contradiction du fait que la fonction limite ne soit pas continue. Le deuxième point est rarement utilisé : il faut du flair pour remarquer qu'il y a une contradiction en passant aux primitives. En revanche, la discontinuité d'une fonction peut se voir souvent « à l'œil nu », et dans certains cas simples c'est aussi le cas des limites en un réel.

Exemple 3. (Avec le théorème de continuité d'une limite uniforme) Étudions la suite de fonctions dont le terme général est $f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$. Sa limite simple est l'application :

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases} .$$

S'il y avait convergence uniforme alors, f_n étant continue sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa limite uniforme f serait également continue sur $[0,1]$. Mais on a manifestement discontinuité en 1, du fait que $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \neq f(1)$: c'est une contradiction. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Exemple 4. (Avec le théorème de la double limite) Même si on enlève 1 de l'intervalle, afin d'enlever le point de discontinuité, la suite de fonctions de terme général $f_n : \begin{cases} [0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$ vers sa limite simple $f : \begin{cases} [0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{cases}$. En effet, si c'était le cas, alors du fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = 1$, on aurait aussi : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, d'après le théorème de la double limite. Or : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, donc on aurait $0 = 1$: c'est absurde. Il n'y a donc pas convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0,1[$.

Table des matières