MÉTHODES (MP) – Suites et séries de fonctions

✓ Théorèmes d'interversion : retrouver les hypothèses, savoir lesquels utiliser

1 ✓ Comment retrouver les hypothèses et conclusions

Pour retrouver les hypothèses (au moins partiellement) des théorèmes d'interversion, **la première chose est de se souvenir du problème qu'ils doivent résoudre** (est-ce qu'on veut dériver ? passer à la limite ? intégrer ?), puis des conditions minimales d'existence des objets en présence. On retiendra que :

— **la régularité des fonctions f_n est celle que l'on espère obtenir pour la fonction obtenue par passage à la limite** : si l'on veut que la fonction limite soit continue, on doit supposer les f_n continues ; si l'on veut que la fonction limite soit dérivable, on doit supposer les f_n dérivables ; si l'on veut intégrer des fonctions, il faut qu'elles soient au moins continues par morceaux, etc. ;

— l'hypothèse de continuité par morceaux n'est faite que sur des fonctions qu'on INTÈGRE, et NULLE PART AILLEURS ; si on n'est pas sur un segment, il nous faut aussi une hypothèse d'intégrabilité, à moins qu'elle ne soit conséquence d'une autre hypothèse (en général l'hypothèse de domination) ;

— quand on veut dériver une application, il faut qu'elle soit dérivable ; et on se souviendra qu'en fait, pour des raisons qui ne sont flagrantes que dans les démonstrations, **il faut remplacer « dérivable » par « de classe C^1 »** (de même, « k fois dérivable » est remplacé par « de classe C^k ») ;

— si l'égalité à démontrer **fait intervenir une somme** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$, les hypothèses de convergence portent sur des SÉRIES de fonctions ; s'il n'y a pas de somme, ces hypothèses sont sur des SUITES de fonctions ;

— l'exigence de convergence la plus contraignante (la convergence uniforme) est sur une seule suite (ou série) de fonctions : celle qui concerne la propriété que l'on veut conserver par passage à la limite (donc si l'on veut dériver, la convergence uniforme est sur $(f_n')_{n\geqslant 0}$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$, mais en aucun cas sur $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$) ; les autres suites (ou séries) en jeu ne nécessitent que la convergence simple : hypothèse minimale pour assurer l'existence des fonctions limites ;

— en général, c'est la convergence uniforme qui permet de conserver les bonnes propriétés ; **s'il n'y a pas d'hypothèse de convergence uniforme du tout dans un théorème d'interversion, il faut la remplacer par une hypothèse « indevinable »** que vous n'avez pas d'autre choix que d'apprendre par cœur (hypothèse de domination ou convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$).

Un théorème de régularité des intégrales à paramètres ne fait intervenir ni suite, ni série de fonctions. Il serait donc absurde qu'il apparaisse des hypothèses de convergence uniforme ou simple. Ces notions n'ont aucun sens pour des fonctions de la forme $(x, t) \mapsto f(x, t)$.

Hypothèses de convergence : s'y retrouver

— Si l'on veut conserver une régularité (continuité, dérivabilité, limite) : CVU nécessaire.
— Sinon : CVS (hypothèse minimale d'existence des objets).

Si l'égalité à démontrer contient $\sum$: hypothèse de convergence sur $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$. Sinon : sur $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

S'il n'y a pas CVU : hypothèse indevinable (hypothèse de domination ou convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$).

Exiger DEUX hypothèses « difficiles » est IMPOSSIBLE :

Demander que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ CVU + hypothèse de domination :	IMPOSSIBLE (il y a CVS)
Demander que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVU + CV de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$:	IMPOSSIBLE (il y a CVS)

Hypothèses de régularité : s'y retrouver

On veut une fonction limite continue $\Longrightarrow$ continuité de f_n.
On veut dériver $\Longrightarrow$ classe C^1 de f_n.
On veut intégrer $\Longrightarrow$ continuité par morceaux de f_n.

En analysant l'égalité à démontrer, nous obtenons donc les conditions nécessaires d'existence des objets en présence. Seulement, il faut encore trancher sur leur statut : est-ce que ces conditions sont des **hypothèses**, ou des **conclusions** du théorème d'interversion ? Pour le savoir :

— l'objectif (partiel) d'un théorème d'interversion étant d'apporter une réponse au problème : « est-ce que la fonction limite est continue ? dérivable ? intégrable ? etc. », il serait absurde que la réponse au problème soit une hypothèse de départ : c'est au contraire une conclusion (sinon le théorème ne nous enseignerait rien) ; par exemple, dans le théorème de dérivation terme à terme, le nœud du problème est de savoir si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable, et quelle est sa dérivée : il serait idiot que le fait d'être dérivable soit une hypothèse sur $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$;

— au contraire, **les conditions de régularité sur les f_n sont des hypothèses, puisque les f_n sont les données de départ du problème** (donc celles sur lesquelles on peut vérifier concrètement que les conditions requises sont vraies) ; une exception est l'intégrabilité conséquence du théorème de convergence dominée.

Hypothèse, ou conclusion ?

régularité de f_n = HYPOTHÈSES
régularité de la fonction limite (f ou $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$) = CONCLUSIONS

Exception : la continuité **par morceaux**, à supposer pour f_n ET pour f (ou $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$).

Nous détaillons ce principe dans le reste de la section. Mais évidemment, vous devez vous exercer pour retrouver vous-mêmes les hypothèses et conclusions. Nous vous laissons donc quelques théorèmes à titre d'exercices.

1.1 ✓ Théorèmes de régularité

Préserver la continuité. Ce théorème est sans doute le plus facile à retenir. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définies sur A et qui converge (au moins simplement) vers une fonction f. Le problème à résoudre est : « est-ce que f est continue sur A ? » et à la lumière des conseils de la section précédente :

— puisqu'on veut que f soit continue sur A, il faut supposer que les f_n sont continues sur A pour tout $n \in \mathbb{N}$;

— pour préserver la continuité des f_n, il faut que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge **uniformément** sur A (ou sur tout compact de A : voir section 2). → page 9

On en déduit le théorème :

régularité attendue pour la fonction limite

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur A. On suppose que :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A ;
— la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur A vers une fonction f.
Alors f est continue sur A.

pour que la continuité soit préservée par passage à la limite

Préserver la dérivabilité. Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I. On se demande à quelle condition suffisante la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable sur I, et si sa dérivée est obtenue « comme on pense », en dérivant terme à terme, c'est-à-dire est égale à : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$. On écrit l'égalité qu'on veut démontrer :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}',$$

et on regarde à quelles conditions les objets en présence existent :

pour que cette somme existe : $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ doit converger (au moins simplement)

pour que cette somme existe : $\sum_{n\geqslant 0} {f_n}'$ doit converger (au moins simplement)

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}'$$

pour qu'existe cette dérivée, il faut que f_n soit (au moins) dérivable

pour qu'existe cette dérivée, il faut que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soit (au moins) dérivable

Maintenant, conformément aux conseils donnés plus haut :

— on remplace la condition « dérivable » par « de classe C^1 » ;

— puisque le théorème concerne la dérivation d'une fonction limite, l'hypothèse contraignante de convergence uniforme est sur la série des dérivées $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ (et non $\sum_{n\geqslant 0} f_n$) ;

— les conditions de régularité sur f_n sont des hypothèses, celles sur $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sont des conclusions.

On en déduit l'énoncé du théorème de dérivation terme à terme :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions de classe C^1 sur I. On suppose que :

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I ;

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I, et on a : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

hypothèse minimale pour que la somme existe

régularité attendue pour la fonction limite

pour que la dérivabilité soit préservée par passage à la limite

Ayez cette démarche méthodique pour retenir simplement le théorème, au lieu de citer des hypothèses au hasard.

Exercice 1. On veut dériver la limite d'une suite de fonctions. Compléter la figure suivante :

pour que $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ existe...

pour que $g = \lim_{n\to+\infty} (f_n')$ existe...

pour qu'existe...

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} (f_n')$$

pour qu'existe...

Clarifier ensuite ce qui est une hypothèse et ce qui est une conclusion, afin de reconstituer le théorème de dérivation d'une suite de fonctions.

Préserver la classe C^k. Même principe. On veut dériver k fois la somme d'une série de fonctions, et dériver « comme on pense », c'est-à-dire terme à terme. Mais si l'on peut calculer la dérivée k^{e}, on devrait aussi pouvoir dériver j fois où $j \leqslant k$. L'énoncé à démontrer est donc le suivant :

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)},$$

et on regarde à quelles conditions les objets en présence existent :

pour que cette somme existe : $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ doit converger (au moins simplement)

pour que cette somme existe : $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(j)}$ doit converger (au moins simplement)

pour qu'existe cette dérivée, il faut que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ soit (au moins) dérivable j fois, où $j \in [\![0,k]\!]$

$$\boxed{\forall j \in [\![0,k]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}}$$

pour qu'existe cette dérivée, il faut que f_n soit (au moins) dérivable j fois, où $j \in [\![0,k]\!]$

Être au moins dérivable j fois, pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, équivaut bien sûr à être au moins dérivable k fois. Maintenant, conformément aux conseils donnés plus haut :

— on remplace la condition « dérivable k fois » par « de classe C^k » ;

— puisque l'énoncé concerne la dérivée k^{e} de la somme, l'hypothèse de convergence uniforme est sur $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$;

— les conditions de régularité sur f_n sont des hypothèses, celles sur $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ sont des conclusions.

On en déduit l'énoncé du théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions de classe C^k :

> Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions de classe C^k sur I. On suppose que :
>
> — pour tout $j \in [\![0,k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
>
> — la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I.
>
> Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^k sur I, et on a : $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

hypothèse minimale pour que la somme existe

régularité attendue pour la fonction limite

pour que la classe C^k soit préservée par passage à la limite

Exercice 2. Reconstituer ainsi le théorème analogue dans le cas des suites de fonctions.

1.2 ✓ Théorème de régularité des intégrales à paramètres

Il n'y a pas de notion de convergence uniforme ou simple pour les intégrales à paramètres : une subtilité qui disparaît, ouf ! Pour recouvrer les théorèmes, on retiendra :

— les intégrales que l'on étudie doivent être correctement définies : cela *impose* la continuité par morceaux de toutes les applications en jeu de la variable t, en particulier de $t \mapsto f(x,t)$ (si on intègre selon la variable t) ;

— il faut aussi supposer qu'elles sont intégrables, **sauf** pour la fonction majorée dans l'hypothèse de domination : en effet, son intégrabilité est une conséquence de l'hypothèse de domination ;

— la propriété de régularité que l'on veut démontrer sur $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$, fonction de la seule variable x, doit être vraie pour toutes les fonctions $x \mapsto f(x,t)$;

— il faut une hypothèse de domination sur la *dernière* dérivée : φ doit être intégrable et ne pas dépendre de x, et c'est cette difficulté qui justifie parfois de se ramener à l'étude de la régularité sur tout segment.

Continuité d'une intégrale à paramètre. Illustrons ceci sur le premier théorème de régularité : on cherche à quelle condition suffisante sur f l'intégrale à paramètre $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit f une application définie sur $I \times J$. On suppose que :

— pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;

— pour tout $t \in J$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;

— il existe une application $\varphi : J \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (HYPOTHÈSE DE DOMINATION).

Alors :

pour que l'intégrale existe

donne l'intégrabilité par comparaison

régularité attendue pour g

— pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J ;

— l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Classe C^1 d'une intégrale à paramètre. Cette fois-ci, on se demande à quelle condition suffisante sur f l'intégrale à paramètre $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1, et si la dérivée se calcule « comme on pense », à savoir : $g'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$. Il y a ici deux intégrales en présence : il faut penser aux conditions d'existence de ces deux intégrales, ce qui exige la continuité par morceaux et l'intégrabilité de deux types d'applications ; on n'oublie pas que pour l'une des deux, l'intégrabilité est conséquence de l'hypothèse de domination (ce qui, d'après les remarques ci-dessus, n'est à vérifier que pour la dernière dérivée partielle).

Récapitulons à quelles conditions raisonnables tous les objets en présence existent :

pour que cette dérivée existe : $x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ (au moins) dérivable

pour que cette dérivée existe : f (au moins) dérivable par rapport à x

pour que cette intégrale existe : $t \mapsto f(x,t)$ c.p.m et intégrable

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t}$$

pour que cette intégrale existe : $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ c.p.m et intégrable

implique par comparaison :

$+$ HYPOTHÈSE DE DOMINATION : il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in I \times J$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

En vérité, pour que $\displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ existe, l'intégrabilité est de trop (la convergence suffirait). Mais c'est une exigence du programme.

On se souvient que les hypothèses de dérivabilité sont à remplacer par « de classe C^1 » dans les théorèmes d'interversion. Après avoir clarifié ce qui est une hypothèse et ce qui est une conclusion, on a l'énoncé du théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit f une application définie sur $I \times J$. On suppose que :
- pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- pour tout $t \in J$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I ;
- pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
- il existe une application $\varphi : J \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in I \times J$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ (HYPOTHÈSE DE DOMINATION).

Alors :

donne l'intégrabilité par comparaison

régularité attendue pour g

pour que l'intégrale existe

- pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur J ;
- l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I, et on a : $\forall x \in I$, $g'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Compléter cette figure, et reconstituer le théorème de classe C^k des intégrales à paramètres.

pour que cette dérivée existe :

pour que cette dérivée existe :

pour que cette intégrale existe :

$$\forall j \in [\![0,k]\!],\ \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t$$

pour que cette intégrale existe :

+ HYPOTHÈSE DE DOMINATION :

1.3 ✓ Théorème de la double limite

Pour une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ définies sur I, et a une extrémité de I, on cherche à quelle condition on peut écrire :

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

On regarde à quelles conditions les objets en présence existent :

pour que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe : $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ doit converger (au moins simplement)

pour que cette somme existe : il faut que $\sum_{n\geqslant 0} \ell_n = \sum_{n\geqslant 0} \lim_{x\to a} f_n(x)$ converge

il faut que $\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

il faut que $\lim_{x\to a} f_n(x) = \ell_n$ existe (et soit finie)

Maintenant, conformément aux conseils donnés plus haut :
- pour conserver la régularité au voisinage de a, nous supposons la convergence **uniforme** de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$;
- les conditions sur f_n sont des hypothèses, celles sur $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sont des conclusions.

Il n'est pas si évident, *a priori*, de trancher entre une hypothèse et une conclusion pour la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ell_n$. Mais puisque le problème que veut résoudre le théorème de la double limite est : « peut-on écrire $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$? » *a priori* l'existence de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ n'est pas une hypothèse de départ (si on pouvait l'établir d'emblée, on n'aurait pas besoin d'un théorème pour nous donner une relation qu'elle vérifie). On le classe dans les conclusions.

On en déduit l'énoncé du théorème de la double limite :

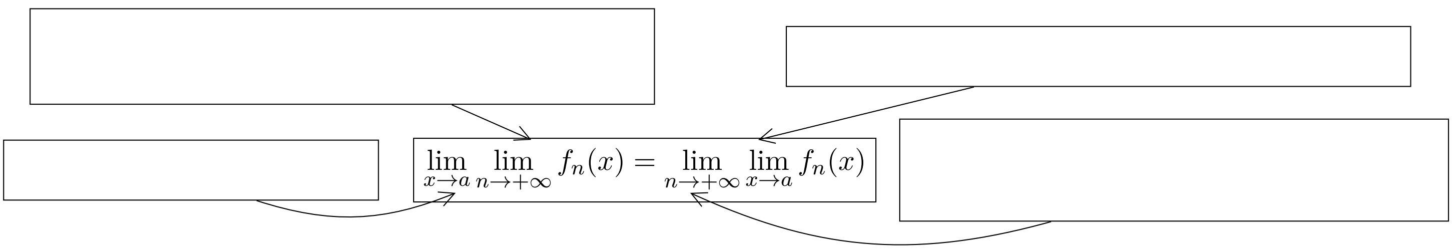
> Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur A, et a adhérent à A. On suppose que :
> — la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur A ;
> — pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \ell_n$ existe et est finie.
>
> Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ell_n$ converge, et on a : $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

pour conserver la régularité autour de a

pour que cette quantité ait un sens

pour que cette somme existe

Exercice 4. On veut retrouver l'énoncé du théorème de la double limite pour les SUITES de fonctions. Compléter la figure suivante, sur le modèle des exemples ci-dessus :



$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Clarifier ensuite ce qui est une hypothèse et ce qui est une conclusion, afin de reconstituer le théorème de la double limite d'une suite de fonctions.

1.4 ✓ Théorème de passage à la limite dans l'intégrale, d'intégration terme à terme

Pour tous ces théorèmes d'intégration, la régularité à retenir est facile : f_n doit **être continue par morceaux**, vu que c'est la régularité nécessaire pour intégrer des fonctions dans le programme de MP. Vous noterez que cette régularité n'apparaît dans aucun autre théorème sur les suites et séries de fonctions : impossible de se tromper.

Il faut aussi que les f_n soient intégrables ; mais si l'on est sur un segment, alors c'est automatiquement le cas et il n'y a pas besoin de le préciser. Si on n'est pas sur un segment, il faut que cette condition apparaisse, en hypothèse ou en conclusion : en conclusion si l'intégrabilité porte sur la fonction limite f ou $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, ou si c'est une conséquence de l'hypothèse de domination ; autrement, c'est en hypothèse.

Interversion limite-intégrale dans le cas d'un segment. On veut l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

On regarde à quelles conditions suffisantes les objets en présence existent :

pour que cette somme existe : $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge (au moins simplement)

pour que cette somme existe : $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_a^b f_n$ converge

pour que cette intégrale existe : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

pour que cette intégrale existe : f_n continue par morceaux

Au regard des principes donnés en début de section, on pourrait penser que la continuité par morceaux de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dans les conclusions du théorème. Mais il n'en est rien et c'est là une des exceptions à ces principes : la continuité par morceaux n'est en général pas conservée par passage à la limite, même en cas de convergence uniforme, donc nous sommes obligés de la mettre en hypothèse pour éviter les contradictions (dans le cadre du programme : dans la vraie vie mathématique, les hypothèses de régularité peuvent être relâchées considérablement). Si la régularité exigée avait été la *continuité*, la continuité de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ aurait été une conclusion du théorème.

Cependant, pour le reste, il n'y a pas vraiment de surprise. La convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_a^b f_n$ fait partie des conclusions, et non des hypothèses, puisque le problème est *justement* de savoir si cette somme d'intégrales égale l'intégrale qu'on veut calculer : si cette somme d'intégrales était dans nos données connues, nous n'aurions pas besoin d'un théorème pour vérifier cette égalité.

Enfin, pour savoir s'il s'agit de convergence simple ou uniforme : la convergence uniforme suffit en général pour préserver les propriétés désirées. Si nous ne l'avons pas, nous devons rajouter une hypothèse indevinable, or nous n'en avons pas ici. La convergence supposée est donc uniforme. On obtient alors le théorème d'interversion suivant :

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$. On suppose que :

— la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est continue par morceaux sur $[a, b]$;

— l'application $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

bonne hypothèse de convergence pour intervertir

pour que cette intégrale existe

pour que cette intégrale existe

Alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ converge, et on a : $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$

pour que cette somme existe

Exercice 5. Reconstituer ainsi le théorème analogue dans le cas des suites de fonctions.

Le théorème de convergence dominée. Comme le nom du théorème l'indique, on se souvient que ce théorème remplace l'hypothèse de convergence uniforme par l'hypothèse « indevinable » de domination. Analysons l'égalité à démontrer :

pour que cette limite existe : $\left(\int_I f_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ converge

pour que $f(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$ existe : $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge (au moins simplement)

pour que cette intégrale existe : f_n c.p.m et intégrable

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t}$$

pour que cette intégrale existe : f c.p.m et intégrable

implique par comparaison :

implique par comparaison :

$+$ HYPOTHÈSE DE DOMINATION : il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que : $\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times I$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$

Comme nous l'avions dit pour le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, la continuité par morceaux de f est une hypothèse et non une conclusion. L'intégrabilité de f_n découle de l'hypothèse de domination et du théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, parce que φ est intégrable. C'est aussi le cas de l'intégrabilité de f, puisque l'inégalité $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ implique $|f(t)| \leqslant \varphi(t)$ quand $n \to +\infty$. Bref, l'intégrabilité de f_n et f n'est pas une hypothèse, mais une conclusion. Pour le reste, il n'y a pas de subtilité, et on obtient le théorème suivant :

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur I. On suppose que :
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers une fonction f ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est continue par morceaux sur I ;
- l'application f est continue par morceaux sur I ;
- il existe une application $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$ (HYPOTHÈSE DE DOMINATION).

Alors :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est intégrable sur I ;
- l'application f est intégrable sur I ;
- la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant 0}$ converge, et on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x$.

hypothèse minimale pour que f existe

donne l'intégrabilité par comparaison

pour que cette limite existe

Exercice 6. Par une analyse analogue, retrouver l'énoncé du théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Exercice 7. Par une analyse analogue, retrouver l'énoncé du théorème d'intégration terme à terme. On se souviendra que l'hypothèse de convergence uniforme est remplacée par l'hypothèse que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_I |f_n|$ converge (par analogie, dans le théorème de Fubini, avec la sommabilité de la famille $\left(\displaystyle\sum_{j\in J}|x_{i,j}|\right)_{i\in I}$).

2 ✓ Théorèmes de régularité : quand se ramener à des compacts

Tous les théorèmes concernant la RÉGULARITÉ d'une fonction (que ce soit pour la limite d'une suite de fonctions, une somme de série de fonctions, ou une intégrale à paramètre) admettent une version assouplie. C'est-à-dire : si la conclusion d'un théorème est la continuité, dérivabilité, classe C^1 (ou plus généralement classe C^k) sur I d'une fonction, alors il suffit de vérifier ses hypothèses non pas sur I, mais sur tout compact inclus dans I (si I est un intervalle, alors se borner aux compacts $[a,b] \subseteq I$ suffit).

Évidemment, pour certaines hypothèses, il n'y a aucune simplification du fait de se ramener à un compact. Il serait inutile de démontrer la convergence simple sur tout compact inclus dans I, vu que les calculs resteraient les mêmes que si l'on voulait démontrer la convergence simple sur I. Ainsi, on se ramène à des compacts pour les hypothèses :

— de convergence uniforme ;
— de domination.

Insistons sur le fait que se ramener à des compacts n'est permis que pour les théorèmes portant sur la régularité. **Il serait totalement illicite de se ramener à des compacts pour le théorème de la double limite, ou un théorème d'interversion limite-intégrale**.

Quand est-il pertinent de se ramener à des compacts ? La réponse est très simple : quand les hypothèses ne sont pas vérifiées sur tout I. Cela arrive très souvent lorsqu'on étudie la convergence uniforme (*via* la convergence normale) d'une série de fonctions définies sur un intervalle ouvert ou non borné : $]0,+\infty[$ est l'exemple par excellence. De même pour l'hypothèse de domination dans le cas des intégrales à paramètres. Ainsi, **ayez dans un coin de la tête que cela peut être nécessaire dès que I est un intervalle ouvert ou non borné**.

3 ✓ Calcul d'une limite de la forme : $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

3.1 ✓ Cas d'une limite finie

Nous avons envie d'écrire : $\displaystyle\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$. L'interversion des symboles $\displaystyle\lim_{x\to a}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ se fait avec le théorème de la double limite. Pour l'appliquer, il faut démontrer la convergence uniforme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur une partie A qui n'est pas précisée dans l'énoncé à démontrer. Vous la choisissez **comme vous le voulez**, tant que a en est un point adhérent. Puisque vous avez le choix, faites en sorte que ce soit un intervalle où il est facile de vérifier la convergence uniforme (*via* la convergence normale par exemple). Par exemple, si l'on doit déterminer la limite de $\displaystyle x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x}$ quand $x\to+\infty$, il faut choisir un intervalle ayant $+\infty$ pour extrémité, mais il serait idiot de retenir $]0,+\infty[$: on ne parviendrait pas à démontrer la convergence normale sur cet intervalle, parce que la norme infinie de $\displaystyle x\mapsto\frac{1}{1+n^2x}$ est 1 (et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 1$ diverge). En revanche, n'importe quel autre choix d'intervalle de la forme $[a,+\infty[$ permet de majorer la norme infinie par $\displaystyle\frac{1}{an^2}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

3.2 Cas d'une limite infinie

Le théorème de la double limite ne peut JAMAIS s'appliquer dans cette configuration, vu qu'il contient dans sa conclusion le fait que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\lim_{x\to a} f_n(x)$ (dont la somme est la limite candidate) soit convergente. Vous devez donc procéder autrement. Deux approches sont possibles :

— en utilisant une comparaison entre série et intégrales, comme expliqué dans la section consacrée ;
— si la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est monotone, alors nécessairement elle admet une limite en a, finie ou infinie ; on exclut la première possibilité en supposant qu'il existe une limite finie, et en montrant que les sommes partielles deviennent arbitrairement grandes quand $x\to a$, pour en déduire une absurdité.

Les deux méthodes nécessitent que les fonctions f_n soient monotones.

La deuxième approche a l'avantage d'être en général (plutôt) facile à utiliser, lorsque a est un réel (et non une extrémité infinie) en lequel les f_n sont tous définis. Pour montrer que les sommes partielles deviennent arbitrairement grandes, il suffit que la série obtenue quand $x\to a$ soit à termes positifs et divergente.

La première s'applique en des cas plus généraux (pas seulement pour la limite en un réel a) et est plus précise : dans bien des cas, elle donne un équivalent asymptotique en plus de la limite, et un encadrement explicite pour tout x.

Exemple 1. Calculons : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+nx)}=+\infty.$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application $x \mapsto \dfrac{1}{n(1+nx)}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, en tant que somme (certes infinie) de fonctions décroissantes, l'application $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$. Elle admet donc une limite finie ou infinie en 0^+. Notons-la $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, l'inégalité $f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx)}$ (vraie parce que nous sommons des termes POSITIFS) entraîne, quand $x \to 0^+$, l'inégalité : $\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente et à termes positifs, donc quand $N \to +\infty$ on obtient : $\ell \geqslant +\infty$, c'est-à-dire : $\ell = +\infty$. On a montré : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)} = +\infty$.

3.3 Cas simples où l'interversion somme-limite est toujours valable

En s'inspirant du raisonnement de l'exemple ci-dessus, on peut démontrer que l'égalité :

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

reste valable sous les hypothèses suivantes : la convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ (condition minimale d'existence de la somme du membre de gauche), et :

— les f_n sont **décroissantes** et **positives** sur I, et a est la première extrémité de l'intervalle I (ces hypothèses s'adaptent sans mal à d'autres situations) ;

— les f_n sont **positives**, possèdent une limite en a, et **la série** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \lim_a f_n$ **diverge** (auquel cas l'égalité ci-dessus équivaut à : $\displaystyle\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = +\infty$).

toutes les limites et sommes étant bien définies grâce aux hypothèses sur les fonctions f_n (rappelons qu'on sait sommer des éléments de $[0,+\infty]$).

Comme ce n'est pas un résultat de cours, il faut bien sûr le redémontrer ! Voici comment faire dans le premier cas. Supposons que a est la première extrémité de l'intervalle I de définition des fonctions f_n, et que ces fonctions sont décroissantes et positives sur I. En utilisant le fait que, par décroissance, on ait : $\forall x > a$, $\displaystyle\lim_a f_n \geqslant f_n(x)$, et en sommant, on obtient :

$$\forall x > a, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_a f_n \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

En prenant la limite dans cette inégalité quand $x \to a$, on a l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_a f_n \geqslant \lim_a \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (la limite de cette somme existe puisqu'elle est décroissante en tant que somme de fonctions décroissantes).

De plus, en reprenant le raisonnement de l'exemple ci-dessus, on a par positivité des f_n :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \geqslant \sum_{n=0}^{N} f_n.$$

Quand $x \to a$, on obtient : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_a \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \geqslant \sum_{n=0}^{N} \lim_a f_n$. Quand $N \to +\infty$, on obtient l'inégalité ci-dessus mais en sens contraire : $\displaystyle\lim_a \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_a f_n$.

Par antisymétrie de la relation d'ordre, on a l'égalité.

Retenez dans les grandes lignes comment on a fait : il suffit en gros de faire les passages à la limite $x \to a$ et $N \to +\infty$ dans les deux ordres possibles pour avoir les deux inégalités. La monotonie sert à assurer l'existence de limites et à majorer $f_n(x)$ par sa limite en l'extrémité de l'intervalle ; la positivité sert à majorer la somme par les sommes partielles.

Exercice 8. Démontrer que l'interversion est valable sous les secondes hypothèses citées ci-dessus.

4 ✓ Calcul d'une limite de la forme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$, ou : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$

4.1 ✓ Cas d'une variable entière

Il s'agit de justifier l'interversion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$. La difficulté n'est pas de savoir de quel problème d'interversion il s'agit (on intervertit limite et intégrale), mais plutôt de trancher entre les deux théorèmes d'interversion que vous avez : le théorème de convergence dominée, et le théorème de passage à la limite sous le signe intégrale lorsque l'intervalle d'intégration est un segment. Pour une partie de la problématique, la réponse est dans le nom du théorème.

On utilise sans ambiguïté possible le théorème de convergence dominée lorsqu'on est dans une de ces deux configurations :

— l'intervalle d'intégration N'EST PAS un segment :

— la limite obtenue pour la convergence simple N'EST PAS continue partout. En effet, dans ce cas de figure, vous êtes sûrs qu'il n'y a pas de convergence uniforme, et ce sans faire le moindre calcul : la convergence uniforme conserve la continuité.

Ainsi, lorsque vous avez une fonction f limite qui est définie « par morceaux » (en général lorsque vous avez calculé une limite simple de fonctions s'exprimant à l'aide de puissances), vérifiez s'il y a des incompatibilités de limites à gauche et à droite en les points de raccord : si c'est le cas, elle n'est pas continue, et il n'y a pas convergence uniforme. Voir la section *Contredire la convergence uniforme*.

Attention au fait que même si on intègre entre deux réels, il peut s'agir d'une intégrale généralisée : par exemple $\int_0^1 \frac{\arctan(nt)}{t\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ n'est pas une intégrale sur un segment, parce que le dénominateur s'annule en 0 et l'application $t \mapsto \frac{\arctan(nt)}{t\sqrt{t}}$ est donc continue sur $]0,1]$ (ET NON $[0,1]$). Vous vous devez d'être très vigilants à ce sujet : la vérification scrupuleuse ne prend que quelques secondes et vous évite une erreur rédhibitoire.

Même si vous trouvez l'hypothèse de domination difficile à vérifier, en pratique elle est beaucoup moins contraignante à vérifier que la convergence uniforme (**au sens où l'hypothèse de domination est presque toujours vérifiée ! c'est loin d'être le cas de la convergence uniforme**), lorsque vous êtes sur un segment. En effet, dans ce cas-là, l'intégrabilité est automatique et il suffit donc de se concentrer sur la domination indépendante de n. On y parvient *via* les approches proposées dans la section 5.1 du document *Méthodes* du chapitre d'intégration.

Mais finalement, hors des cas génériques donnés plus haut, il est difficile de donner une règle générale sur le meilleur théorème d'interversion à utiliser. L'expérience vous donnera (je l'espère) l'intuition nécessaire pour voir en quels cas la convergence uniforme semble plus facile à obtenir que la fonction de domination, et inversement. Si l'une ou l'autre hypothèse se ramène à étudier une différence « petite » ainsi que définie dans *L'art de la majoration*, cela doit guider votre réflexion.

N'oubliez pas, aussi, que certaines limites de la forme $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$ peuvent être calculées sans théorème d'interversion, mais avec un encadrement par des intégrales explicitement calculables, et le théorème des gendarmes. Revoir à cet effet la section 6 du document *Méthodes* du chapitre d'intégration, ou le document *L'analyse, ou l'art de la majoration* (section 6).

Exemple 2. Montrons : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\sin(x)x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = 0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 \frac{\sin(x)x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{\sin(x)x^n}{1+x^n}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1\cdot x^n}{1+0}\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Or : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\sin(x)x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = 0$.

4.2 Cas d'une variable réelle

Si nous devons calculer une limite de la forme : $\lim_{x\to a}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ (avec a éventuellement infini), on remarque que la seule différence avec le paragraphe précédent est qu'on a remplacé le paramètre entier n par une variable réelle x. L'analogue du théorème de convergence dominée, dans ce cas-là, est alors le théorème de convergence dominée à paramètre continu (on se souvient qu'on parle de paramètre « continu » pour x par opposition au paramètre « discret » n : cela n'a rien à voir avec l'idée que l'application $x\mapsto\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ serait continue). Il n'y a pas d'analogue au programme de la convergence uniforme dans le cas des intégrales à paramètres, donc il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le théorème à utiliser.

Si vous ne savez pas à quel intervalle doit appartenir x, pour appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu : qu'importe, tant qu'une extrémité de l'intervalle est l'endroit où l'on prend la limite de x (si l'on prend $x\to+\infty$, alors on applique le théorème de convergence dominée à paramètre continu avec $x\in[0,+\infty[$ par exemple). N'hésitez pas à « viser large », pour éviter d'éventuels problèmes de fonctions non bornées (qui empêcheraient une hypothèse de domination) : par exemple, la présence d'un $\frac{1}{x}$ doit vous conduire à éviter de prendre 0 pour première extrémité, car $x\mapsto\frac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $]0,+\infty[$ et cela pourrait poser problème dans l'hypothèse de domination. On « s'en éloigne » en se plaçant sur $[1,+\infty[$ à la place.

Notez bien qu'en dehors du fait de remplacer n par x, rien ne change par rapport aux hypothèses du théorème de convergence dominée classique : on pensera cependant bien à ne pas parler de « convergence simple » dans ce contexte (inexistant lorsqu'on n'a pas une suite ou série de fonctions).

Exemple 3. Montrons : $\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^x\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t = 0$, avec le théorème de convergence dominée à paramètre continu. On pose : $\forall x\in[1,+\infty[$, $\forall t\in]0{,}1[$, $f(x,t) = \frac{t^x\ln(t)}{t-1}$. Alors :

— pour tout $x\in[1,+\infty[$, l'application $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0{,}1[$;

— pour tout $t\in]0{,}1[$, on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x,t) = 0$, et l'application $\ell : t\mapsto 0$ est continue par morceaux sur $]0{,}1[$;

— pour tout $x\in[1,+\infty[$ et tout $t\in]0{,}1[$, on a $t^x\leqslant t$ (le reste étant positif), si bien que :

$$\forall x\in[1,+\infty[,\ \forall t\in]0{,}1[,\quad |f(x,t)|\leqslant\frac{t\ln(t)}{t-1}\quad(\textsc{hypothèse de domination}),$$

et $\varphi : t\mapsto\frac{t\ln(t)}{t-1}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0{,}1[$.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, d'une part l'application $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0{,}1[$ pour tout $x\in[1,+\infty[$, et d'autre part : $\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \ell(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 0\mathrm{d}t = 0$. D'où le résultat.

Exercice 9. Vérifier que : $\forall t\in]0{,}1[$, $\lim_{x\to+\infty} f(x,t) = 0$, et que φ est intégrable sur $]0{,}1[$.

Exercice 10. Calculer cette limite sans théorème d'interversion.

5 ✓ Démonstration d'une égalité de la forme : $\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Lorsqu'on vous demande de démontrer une égalité du type : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, vous comprenez ce qu'il faut faire : utiliser un des théorèmes d'interversion permettant de permuter $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_I$, puis calculer $\displaystyle\int_I f_n(x)\mathrm{d}x$ pour obtenir u_n ; mais lorsqu'on demande de démontrer une égalité du type : $\displaystyle\int_I f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, c'est moins clair !

L'idée, dans ce type d'exercices, est que f est une fonction trop compliquée pour que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)\mathrm{d}x$ soit directement calculable par un calcul de primitive. Mais il est possible de remplacer f par une somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ de fonctions dont les intégrales sont calculables. Il faut alors justifier qu'on puisse écrire :

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x,$$

ce qu'on fait grâce au théorème d'intégration terme à terme (celui se restreignant à un segment est rarement préférable dans cette configuration). Il ne reste plus qu'à calculer $\displaystyle\int_I f_n(x)\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour en déduire le résultat voulu.

Il s'agit de se demander comment écrire f sous forme de somme de fonctions plus simples à intégrer. **Cela passe très souvent par un développement en série entière**. En effet, les développements en série entière permettent de remplacer une fonction, si compliquée soit-elle, par une somme de monômes. Les monômes ne nous posent que rarement des problèmes en intégration : au pire, on peut souvent les éliminer en intégrant par parties.

Ainsi, pour écrire f comme somme de série, il faut en général reconnaître en f :

— une fonction développable en série entière, par exemple :

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \ ;$$

— une composition avec une fonction développable en série entière, par exemple :

$$f(x) = x^x = e^{x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln(x))^n}{n!} \ ;$$

— un produit d'une fonction simple avec une fonction du type précédent, par exemple :

$$f(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-nx}.$$

Le cas le plus fréquent est l'élimination d'un quotient (c'est souvent cela qui nous embête, en intégration) **en utilisant la formule :**

$$\boxed{\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n}$$

avec un choix adapté de u. N'oubliez pas qu'on doit avoir $|u| < 1$: si, au dénominateur, vous avez un facteur plus grand que 1, une factorisation préalable par ce terme prépondérant est nécessaire pour se ramener au cas $|u| < 1$. Comme dans l'exemple ci-dessous : pour tout $t \in]0,+\infty[$ on a :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t}{e^t(1-e^{-t})} = te^{-t} \times \frac{1}{1 - \underbrace{e^{-t}}_{\in]0,1[}} = te^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n.$$

(on factorise par e^t pour obtenir une quantité u inférieure à 1 au dénominateur : en effet $e^t > 1$ ne permet pas d'utiliser le développement ci-dessus)

Attention, au moment de justifier l'intégration terme à terme : *même si vous avez utilisé un développement en série entière*, ce N'EST PLUS une série entière en général lorsqu'on la compose avec une autre fonction (hormis $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x}$ ci-dessus, aucune des fonctions ci-dessus n'est écrite comme somme de série entière) ; vous ne pouvez donc pas conclure brièvement en utilisant le fait qu'une série entière puisse être intégrée terme à terme sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence : vous devez vérifier des hypothèses !

Pour vous simplifier la vie. Au moment de justifier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$, pour intégrer terme à terme : vous n'avez RIEN à justifier puisque vous avez utilisé un développement en série entière usuel pour faire apparaître $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$: vous avez donc implicitement utilisé le fait que vous sachiez déjà la convergence (simple) de cette série. Vous n'avez donc qu'à mentionner que vous savez que cette série converge du fait de son rayon de convergence, etc. Ne vous fatiguez pas à comparer à une série de Riemann, ou que sais-je !

Dans le théorème d'intégration terme à terme : justifiez rapidement la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ en citant la convergence d'une série usuelle !

5.1 Cas rare : si aucun des deux théorèmes d'intégration terme à terme ne s'applique

Il est possible qu'au moment de vouloir écrire : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$, les hypothèses des deux théorèmes d'intégration terme à terme soient mises en défaut, c'est-à-dire :

- la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur I, ou I n'est pas un segment ;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$ ne converge pas.

Cela se produit en général lorsque nous sommes en présence d'une série convergente qui n'est pas absolument convergente. Un exemple tout à fait concret où cela peut se produire est dans la démonstration de l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

Pour y parvenir en suivant les conseils de ce document, on utiliserait le développement en série géométrique dans l'espoir d'écrire :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{4n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

- pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{1+x^4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment (et de toute façon il n'y a pas convergence uniforme, ni même simple, sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(f_n : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto (-1)^n x^{4n} \end{cases} \right)$, puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n$ diverge) ;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 \left|(-1)^n t^{4n}\right| \mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Dans ces cas-là, nous avons deux possibilités :

1. Remplacer la borne problématique par une variable t (strictement supérieure ou inférieure à la borne problématique, 1 dans l'exemple ci-dessus), pour se ramener à des intervalles d'intégration $[0, t]$ où nous avons la convergence uniforme et pouvons intégrer terme à terme ; ensuite, on fait tendre t vers ladite borne, ce passage à la limite donnant ce qu'on veut d'après un théorème de continuité ou le théorème de la double limite.
2. Rappelons-nous que nous avions un autre théorème pour intervertir limite et intégrale : **le théorème de convergence dominée** ! Il n'est pas très pratique pour les séries de fonctions, mais reste utilisable **pourvu qu'il soit possible de calculer ou majorer les sommes partielles** (cas d'une série géométrique).

Nous parlons plus amplement du premier point, qui concerne surtout les fonctions développables en série entière, dans la section 6. Ici, nous nous concentrons sur la façon d'appliquer le théorème de convergence dominée aux séries de fonctions. Pour cela, on applique plus précisément ce théorème aux **sommes partielles**. → page 18

Pour l'utiliser en vue de démontrer : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$,

1. On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.
2. On montre que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I, et que sa somme est continue par morceaux sur I **(ce dernier point nécessite de savoir calculer explicitement cette somme : c'est en général le cas, car on a utilisé une somme de série entière usuelle)**.
3. On montre qu'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{n=0}^{N} f_n\right| \leqslant \varphi \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

(c'est l'ordre des quantificateurs qui nous l'enseigne encore : φ ne dépend pas de N ; notez surtout qu'on ne majore pas f_n ici, ni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, mais les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} f_n$).

Alors, en conclusion, f_n est intégrable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$ (non évident ici, vu que φ domine les SOMMES PARTIELLES et non les f_n : pour le démontrer, on note d'abord que $\sum_{n=0}^{N} f_n$ est intégrable sur I pour tout $N \in \mathbb{N}$; ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a : $f_N = \sum_{n=0}^{N} f_n - \sum_{n=0}^{N-1} f_n$, et une différence de fonctions intégrables est intégrable vu que $\mathrm{L}^1(I, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel, d'où le résultat), la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est également intégrable sur I, et on a :

$$\int_I \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \int_I \sum_{n=0}^{N} f_n(t)\mathrm{d}t \iff \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$$

(on « sort la somme » par linéarité de l'intégrale : c'est ici possible sans problème, car la somme est finie)

$$\iff \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Comme on le voit, il faut majorer les sommes partielles, ce qui est presque peine perdue si on ne sait pas les calculer explicitement. Il vaut mieux avoir affaire à une somme géométrique pour s'en sortir. Sinon, il reste la comparaison entre série et intégrales, comme on le rappelle dans la section consacrée.

Exemple 4. Appliquons le théorème de convergence dominée à la justification de l'égalité :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{4n}\mathrm{d}x.$$

Pour cela, posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1[$, $f_n(x) = (-1)^n x^{4n}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4}$ (il s'agit d'une série géométrique de raison $-x^4 \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$.

Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| = \frac{1-(-x^4)^{N+1}}{1+x^4} \leqslant \frac{2}{1+x^4} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

(il faut se débarrasser de la dépendance en N, donc il suffit de majorer $-(-x^4)^{N+1}$, et comme $x \in [0,1[$ le tour est joué)

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2}{1+x^4}$ et continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée.

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, f et f_n sont intégrables sur $[0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on a : $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{4n} \mathrm{d}x$. C'est-à-dire, après calculs, conformément à ce qui fut établi en début de section :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

Exercice 11. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer explicitement $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ (*c'est très calculatoire*), et en déduire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\pi + \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)$.

5.2 Cas encore plus rare : même le théorème de convergence dominée ne s'applique pas

On l'a vu plus haut : pour appliquer le théorème de convergence dominée avec succès, encore faut-il être en mesure de majorer les sommes partielles. Pour que ce soit le cas, il faut idéalement avoir des sommes partielles explicitement calculables (sommes géométriques, télescopiques), ou au moins explicitement majorables (comparaison série-intégrale). Hors de ce cas de figure, que faire ?

Il ne reste plus qu'à montrer l'intégration terme à terme à la main. C'est-à-dire : après avoir justifié que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable, on écrit :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \int_I \sum_{n=0}^{N} f_n + \int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{N} \int_I f_n + \int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n.$$

Le membre de droite converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ si et seulement si : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n = 0$. C'est donc ce qu'on s'échine à démontrer.

Intégration terme à terme : quand *vraiment* rien ne marche

Montrer : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_I R_N = 0$

La fonction R_N est le reste d'indice N de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$.

Exemple 5. Soit $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n f_n$ une série de fonctions vérifiant le théorème spécial des séries alternées en tout $x \in I$, et telle que : $\lim_{n\to+\infty}\int_I |f_n| = 0$. On veut montrer : $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_I f_n$. D'après ce qu'on a dit plus haut, il suffit pour cela de montrer que la suite des intégrales des restes converge vers 0. Or, par le théorème spécial des séries alternées, on a :

$$\left|\int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n f_n\right| \leqslant \int_I \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n f_n\right| \leqslant \int_I |f_{N+1}| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes : $\lim_{N\to+\infty}\int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n f_n = 0$. On conclut donc comme expliqué ci-dessus que l'intégration terme à terme est valable.

6 ✓ Utilisation de la continuité dans ce chapitre

Nous rappelons que par définition, une application f est continue en a si : $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Nous utiliserons cette définition dans ce chapitre principalement ainsi :

— on montre une égalité du type : $f(x) = g(x)$, pour tout x dans un certain intervalle, et **différent de** a, avec f une intégrale à paramètre ou une somme de série entière, et g une application **continue** ;

— on aimerait montrer que cette égalité reste aussi valable quand $x = a$; pour cela, on écrit : $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$; comme g est continue, cela donne : $\lim_{x\to a} f(x) = g(a)$;

— il reste à vérifier que f est continue en a, et on en déduit : $f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = g(a)$, d'où le résultat.

Les raisons pour lesquelles l'égalité $f(x) = g(x)$ pourrait ne pas être vérifiée pour $x = a$ *a priori* sont en général :

— parce que f est une somme de série entière et a est sur le bord du domaine de convergence ;

— parce que f est une intégrale à paramètre, dont l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée sur les mêmes intervalles pour la continuité et la classe C^1 ;

mais il y a d'autres raisons possibles.

Évidemment, la continuité ne sert pas qu'à cela (à quoi d'autre, d'ailleurs ?). Mais c'est ainsi que vous l'utiliserez le plus souvent.

Table des matières