MÉTHODES (MP) – Suites et séries de fonctions
Séries de fonctions et comparaison entre série et intégrales

Dans le chapitre sur les séries numériques, nous utilisions la comparaison entre série et intégrales pour ramener l'étude d'une somme (en général difficile voire impossible à calculer simplement) à l'étude d'intégrales (souvent plus faciles à calculer grâce au théorème fondamental de l'analyse notamment). Cette méthode conserve son mérite ici, et permet de répondre à quelques problématiques où les autres outils du cours font défaut.

Le principe reste le même, mais comme il y a plusieurs variables en jeu, j'estime utile de mentionner quelques subtilités. Pour utiliser la comparaison entre série et intégrales avec la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ définies sur I :

— il faut que pour tout $x \in I$, $f_n(x)$ soit de la forme $f_n(x) = g(n, x)$, où $t \mapsto g(t, x)$ est une application monotone, en général décroissante, sur un intervalle de la forme $[n_0, +\infty[$ (**dit de manière moins formelle : « quand on remplace n par une variable t, on obtient une fonction monotone »**) ;

— supposons par exemple que $t \mapsto g(t, x)$ est décroissante sur $[n_0, +\infty[$; on fixe $x \in I$, et on écrit :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall t \in [n, n+1], \quad g(t,x) \leqslant g(n,x), \qquad \text{et : } \forall n \geqslant n_0+1,\ \forall t \in [n-1, n], \quad g(n,x) \leqslant g(t,x),$$

et donc, en intégrant ces inégalités sur leurs domaines de validité (rappelons que $g(n, x) = f_n(x)$) :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \int_n^{n+1} g(t,x)\mathrm{d}t \leqslant f_n(x), \qquad \text{et : } \forall n \geqslant n_0+1, \quad f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g(t,x)\mathrm{d}t;$$

souvenez-vous qu'un dessin vous permet de retrouver dans quel sens est l'encadrement !

— on calcule ces intégrales, et on somme de $n = n_0$ (ou $n = n_0 + 1$) à $+\infty$ (ou bien on somme d'abord, utilisant la relation de Chasles, et ensuite on calcule les intégrales : faites selon ce qui vous est le plus simple), pour obtenir finalement :

$$\int_{n_0}^{+\infty} g(t,x)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x) \leqslant f_{n_0}(x) + \int_{n_0}^{+\infty} g(t,x)\mathrm{d}t;$$

notons que si l'existence de ces quantités n'a pas encore été établie, *elle est automatique si g est positive*, mais sinon il faut le faire pour la série ou pour l'intégrale, préférablement pour l'intégrale, avant de sommer.

Remarque. Si l'objectif est de majorer le reste d'indice N, en général c'est le comportement quand $N \to +\infty$ qui nous intéresse, donc pour N « assez grand » ; en particulier, vous pouvez prendre N qui soit nettement supérieur à n_0 ($N \geqslant \lfloor n_0 \rfloor + 1$ suffit), et donc vous évitez « l'effet de bord » gênant qui vous conduit à sommer à partir de n_0 pour une borne, et à partir de $n_0 + 1$ pour l'autre. Vous pouvez écrire toutes les inégalités « pour tout $n \geqslant N + 1$ », et sommer de $n = N + 1$ jusqu'à $+\infty$.

Complication éventuelle. Il est possible que l'intervalle de décroissance de $t \mapsto g(t, x)$ *dépende de x*. C'est le cas en particulier dans l'exemple du document *Convergence uniforme d ?une série de fonctions*, section *En minorant le reste : une comparaison entre série et intégrales*. Dans ce cas, la comparaison n'est pas valable pour tout $x \in I$, mais pour tout x dans un intervalle dépendant de N. C'est la vie, vous NE pouvez PAS affaiblir cette condition.

Mise en garde 1. ATTENTION AU FAIT QUE CE SOIT L'INDICE DE SOMMATION n, ET NON x, QU'ON REMPLACE PAR UNE VARIABLE D'INTÉGRATION t ! Ne négligez pas cette confusion : PRESQUE TOUS VOS PRÉDÉCESSEURS se sont trompés là-dessus. C'est d'ailleurs très étonnant, car dans le cas des séries numériques, vous savez très bien que c'est l'indice de sommation n qui « devient » la variable d'intégration t. Au nom de quoi changerait-on ici ?

La comparaison entre série et intégrales, dans ce contexte, vous permettra majoritairement :

— de minorer finement le reste pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément, lorsque aucune autre approche ne fonctionne : voir le document *Convergence uniforme d'une série de fonctions*, section *En minorant le reste : une comparaison entre série et intégrales* ;

— d'encadrer des sommes de séries de fonctions, en général pour montrer qu'elles admettent des limites infinies en une extrémité (rappelons que le théorème de la double limite ne s'applique qu'aux limites finies), et avoir un équivalent asymptotique en prime : voir le document *Théorèmes d'interversion : retrouver les hypothèses, savoir lesquels utiliser*, section *Calcul d'une limite de la forme :* $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Quand faire une comparaison entre série et intégrale avec $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$

1. Pour minorer explicitement le reste et contredire la convergence uniforme.
2. Pour trouver une limite (infinie) voire un équivalent de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ quand x tend vers une extrémité de l'intervalle de définition de f.

Exemple 1. Je vous laisse vérifier que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ de terme général :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{n(1+nx)} \end{cases}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+nx)}$ sa somme, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherche un équivalent quand $x \to 0^+$ de $f(x)$ (dont on peut montrer aisément que la limite est $+\infty$ en cette extrémité ; soit grâce à l'équivalent qu'on va obtenir, soit *via* la méthode de la section *Calcul d'une limite de la forme :* $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$*, Cas d'une limite infinie*).

Pour cela, on utilise le *meilleur* moyen d'estimer une somme, la comparaison entre série et intégrales. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+tx)}$ est clairement décroissante sur $]0,+\infty[$ (notez bien que c'est n et non x qu'on remplace par une nouvelle variable t). Par conséquent, en sommant de $n=2$ à $+\infty$ (pour que $[n-1,n]$ soit bien dans $]0,+\infty[$) :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n(1+nx)}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}\mathrm{d}t.$$

Il est possible de manipuler *a priori* ces sommes et intégrales, et la relation de Chasles est licite, du fait que tout soit positif. On en déduit : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+nx)} \leqslant f_1(x) + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}$. On minore de même, en intégrant sur $[n,n+1]$ au lieu de $[n-1,n]$, et on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)} \leqslant f_1(x) + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}.$$

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+tx)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+tx}$ (décomposition en éléments simples) est $t \mapsto \ln\left(\dfrac{t}{1+tx}\right)$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \ln(1+x) - \ln(x)$$

Mission accomplie : on a encadré f par des fonctions plus simples, et on peut en déduire ce qu'on veut. Les deux extrémités de cet encadrement sont équivalentes à $-\ln(x)$ quand $x \to 0^+$. Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x),$$

ce qu'on voulait démontrer. Si l'on voulait seulement montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, on pouvait se contenter de la minoration (plus agréable à écrire, vu qu'il n'y a pas à prendre garde au premier terme).