MÉTHODES (MP) – Suites et séries de fonctions
✓ Convergence uniforme d'une série de fonctions

Il y a là trois modes de convergence :
— NORMALE : $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge ;
— UNIFORME : $\|R_N\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;
— SIMPLE : $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge pour tout $x \in I$.

Évidemment, pour que ces modes de convergence soient bien différents, et que vous ne les confondiez pas, il importe de distinguer FONCTION f et NOMBRE $f(x)$. Sinon, comment voir la différence entre la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ et la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$?

Tous les théorèmes d'interversion utilisent la convergence uniforme ou simple comme hypothèse. Mais la convergence normale (qui n'existe pas pour les *suites* de fonctions) implique les autres. C'est donc un outil pratique.

Mise en garde 1. Nous l'avons déjà dit dans le cours, je le répète ici car c'est très important :

MONTRER QUE $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ OU $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ NE DÉMONTRE RIEN SUR $\sum_{n\geqslant 0} f_n$!

Pour démontrer la convergence normale ou uniforme d'une série de fonctions, vous n'avez pas le choix, vous devez suivre les approches ci-dessous.

1 ✓ Démontrer la convergence uniforme *via* la convergence normale

1. On montre l'existence d'une série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ convergente telle que pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ (ou tout n assez grand), on ait : $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$. Notez que α_n ne dépend pas de x.

   Majoration indépendante de n, de t, de x... Si l'on s'y perd, comment savoir : comme d'habitude, il faut songer à ce qu'on veut faire au lieu de retenir servilement. Pour démontrer la convergence normale, nous devons majorer $\|f_n\|_\infty$ en vue d'utiliser un critère de comparaison. Or nous avons vu abondamment que pour majorer $\|f_n\|_\infty$, il faut trouver un majorant de TOUS les $|f_n(x)|$ pour $x \in I$. Pour les raisons déjà expliquées dans la section *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*, ce n'est un majorant de TOUS les $|f_n(x)|$ à la fois que s'il ne dépend pas de x.

2. Alors : $0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge.

   Dans le cas de la convergence uniforme d'une suite de fonctions, on voulait que la SUITE $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ soit convergente vers 0, et ici on veut que la SÉRIE $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge : comment comprendre ce qu'il faut ?
   S'il nous faut des conditions différentes sur α_n selon les cas, c'est parce qu'on ne démontre pas la même chose. Avant, on voulait montrer que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ avec le théorème des gendarmes : cela se fait en encadrant par des suites convergeant vers 0. Ici, on veut démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge, et nous savons qu'il ne suffit pas, pour cela, de montrer que $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: savoir que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ne servirait donc à RIEN. Non, ici on veut utiliser le critère de comparaison des séries à termes positifs, et donc majorer $\|f_n\|_\infty$ par le terme général d'une SÉRIE convergente. D'où l'exigence que la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge.

   Pour produire une série convergente $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ convenable, ne réfléchissez pas à l'envers en vous demandant comment produire une série convergente *ex nihilo* : commencez d'abord par majorer

$|f_n(x)|$ indépendamment de x, et nommez α_n le majorant produit. C'est seulement là que vous vous demandez si la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge.

Attention, α_n ne s'obtient pas par des relations de comparaison. Dire : « $f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc pour tout n assez grand : $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$ », est un raisonnement faux. En effet, dans ce raisonnement, le rang n_0 à partir duquel on peut écrire cette inégalité dépend *a priori* de x, et en particulier rien n'assure qu'il convient pour tous les $x \in I$ à la fois.

Montrer la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur I

1. Majorer $|f_n(x)|$ indépendamment de x pour tout $x \in I$. Soit α_n ce majorant.
2. En déduire $0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ par propriété de borne supérieure.
3. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ converge, et conclure par comparaison.

Pour majorer $|f_n(x)|$ indépendamment de x, on procède comme pour les hypothèses de domination (section 5 du chapitre d'intégration) : *on ne touche pas à ce qui dépend de* n (vu que c'est seulement x qui pose problème et est à éliminer), et on regarde le maximum de ce qui dépend de x, quand x varie.

2 ✓ Contredire la convergence normale

1. On montre l'existence de réels $x_n \in I$ tels que $\sum_{n\geqslant 0} |f_n(x_n)|$ diverge.
2. Comme $\|f_n\|_\infty \geqslant |f_n(x_n)| \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ diverge également.

Puisque, dans l'étude de la convergence normale, tout revient à majorer ou minorer convenablement $\|f_n\|_\infty$, TOUS les conseils formulés dans la section précédente (sur la convergence uniforme des SUITES de fonctions) restent valables.

Mise en garde 2. Attention au fait que même s'il n'y a pas convergence normale, il peut très bien y avoir convergence uniforme ! Ne faites pas de réciproque hâtive et fautive !

3 ✓ Démontrer la convergence uniforme *via* le théorème spécial des séries alternées

Si, pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ vérifie le théorème spécial des séries alternées, alors la série converge, et son reste d'indice N vérifie :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \quad |R_N(x)| \leqslant |f_{N+1}(x)| \leqslant \|f_{N+1}\|_\infty.$$

Par conséquent :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \|R_N\|_\infty \leqslant \|f_{N+1}\|_\infty.$$

On montre alors que $\lim_{N\to+\infty} \|f_{N+1}\|_\infty = 0$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{N\to+\infty} \|R_N\|_\infty = 0$, ce qui équivaut à la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

Mise en garde 3. Il ne suffit pas qu'il y ait un $(-1)^n$ pour que ce soit une série alternée ! Par exemple, $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n$ N'est PAS alternée si $x < 0$ (par exemple, pour $x = -1$, il s'agit de $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(-1)^n = \sum_{n\geqslant 0} 1$). Si

$x \notin \mathbb{R}$, alors on oublie : la notion de signe n'existe plus. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{e^{in\theta}}{n}$ N'est PAS alternée pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ différent de 0 modulo 2π.

4 Contredire la convergence uniforme

4.1 ✓ En raisonnant par l'absurde et en utilisant un théorème d'interversion

On reprend la stratégie du document *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*, section *Contredire la convergence uniforme : détails* : on raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a convergence uniforme, ce qui donne accès à plusieurs théorèmes d'interversion : l'un d'eux devrait donner une contradiction, d'où le fait que la convergence uniforme ne soit pas vérifiée.

Une différence est notable par rapport aux suites de fonctions, où souvent c'est le théorème de continuité qui permet d'aboutir à une contradiction (parce qu'on voit à l'œil nu qu'une limite f est continue). Ici, si la somme d'une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ simplement convergente n'est pas explicitée à l'aide de fonctions usuelles, il n'est vraiment pas facile de constater qu'elle n'est pas continue. C'est donc, en général, le théorème de la double limite qui donne une contradiction, en particulier si la série $\sum_{n\geqslant 0} \lim_{x\to a} f_n(x)$ diverge.

Exemple 1. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ de terme général $f_n : \begin{cases}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$: si c'était le cas alors, d'après le théorème de la double limite, la série $\sum_{n\geqslant 0} \lim_{x\to 1^-} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} 1$ convergerait ; or elle diverge grossièrement, donc nous aboutissons à une contradiction. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

4.2 En minorant le reste : une comparaison entre série et intégrales

Nous rappelons que si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I (chose facile à démontrer en général), alors elle converge uniformément sur I si et seulement si la suite des restes $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle. Contredire la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ reviendrait donc à montrer que la suite $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I vers la fonction nulle. D'après les méthodes du document *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*, cela reviendrait à déterminer des x_N tels que $(|R_N(x_N)|)_{N\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, puisqu'on aurait alors, en cas de convergence uniforme :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\|R_N\|_\infty}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \geqslant \underbrace{|R_N(x_N)|}_{\underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0},$$

et ce serait contradictoire.

La difficulté est d'abord d'estimer $R_N(x)$ pour tout $x \in I$. Sinon, comment déterminer les choix pertinents de x_N ? Pour cela, nous vous renvoyons au document *Séries de fonctions et comparaison entre série et intégrales*, qui montre comment utiliser la comparaison entre série et intégrales pour encadrer le reste. On évalue alors cette minoration du reste en des réels x_N qui rendent « gros » le minorant, et empêchent la convergence vers 0 (voir document *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*, section *Contredire la convergence uniforme : détails*).

Exemple 2. Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xne^{-nx} \end{cases}$. En utilisant le théorème des croissances comparées, on démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$; or $f_n \geqslant 0$, et la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Autrement dit : la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons qu'elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela, utilisons une comparaison entre série et intégrale pour minorer le reste. Soit N un entier au voisinage de $+\infty$, et soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $t \mapsto xte^{-tx}$ est continue et décroissante sur $\left[\frac{1}{x}, +\infty\right[$, donc sur $[N+1, +\infty[$ si $x \geqslant \frac{1}{N+1}$ (et c'est ce qu'on suppose à présent). Donc :

$$\forall n \geqslant N+1,\ \forall t \in [n, n+1], \quad xte^{-tx} \leqslant xne^{-nx}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[n, n+1]$, par croissance de l'intégrale on a :

$$\forall n \geqslant N+1, \quad \int_n^{n+1} xte^{-tx}\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} xne^{-nx}\mathrm{d}t, \text{ donc : } \forall n \geqslant N+1, \quad \int_n^{n+1} xte^{-tx}\mathrm{d}t \leqslant xne^{-nx}.$$

L'intégrale de gauche se calcule en intégrant par parties, et on en déduit :

$$\forall n \geqslant N+1, \quad \left(n + \frac{1}{x}\right) e^{-xn} - \left((n+1) + \frac{1}{x}\right) e^{-x(n+1)} \leqslant xne^{-nx}.$$

On somme de $n = N+1$ à $+\infty$. Puisqu'on somme des réels *positifs*, les sommes existent nécessairement et il n'est pas nécessaire de démontrer *a priori* qu'elles sont des sommes de séries convergentes. On a alors :

$$\left(N + 1 + \frac{1}{x}\right) e^{-x(N+1)} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} xne^{-nx} = R_N(x),$$

et cette inégalité est vraie pour tout $x \geqslant \frac{1}{N+1}$ (c'est aussi vrai si $x < \frac{1}{N+1}$ mais c'est délicat à prouver).

Mission accomplie : le reste est minoré explicitement. Pour trouver les évaluations en des réels x_N qui contredisent la convergence uniforme vers la fonction nulle, on suit les conseils du document *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*, section *Contredire la convergence uniforme : détails*. On est d'ailleurs ici dans le cas d'une minoration par une fonction de la forme « puissance × polynôme en N », et il est donc pertinent de poser $x = \frac{1}{N+1}$ pour compenser le facteur « puissance » $e^{-x(N+1)}$. On obtient donc, pour tout N au voisinage de $+\infty$:

$$\left|R_N\left(\frac{1}{N+1}\right)\right| \geqslant \left(N + 1 + \frac{1}{\frac{1}{N+1}}\right) e^{-\frac{1}{N+1}\cdot(N+1)} = 2(N+1)e^{-1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

et il est donc impossible d'avoir $\|R_N\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: le reste ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle, et la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1. Compléter les éléments de démonstration non détaillés dans cet exemple :

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'application $t \mapsto xte^{-tx}$ est décroissante sur $\left[\frac{1}{x}, +\infty\right[$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_n^{n+1} xte^{-tx}\mathrm{d}t = \left(n + \frac{1}{x}\right) e^{-xn} - \left((n+1) + \frac{1}{x}\right) e^{-x(n+1)}$.

Table des matières