MÉTHODES – Suites récurrentes

Relations de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Nous ne présentons que le cas le plus favorable de l'étude de la convergence d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour les difficultés potentiellement rencontrées quand f est décroissante, etc., nous vous renvoyons à votre cours de 1re année.

$u_{n+1} = f(u_n)$: plan d'étude.

Soit I le domaine de définition de f. On donne le plan d'étude dans les cas les plus favorables.

1. **Étude de signe.** On étudie le signe de $g : x \mapsto x - f(x)$. Résoudre $g(x) = 0$ donne les **points fixes** de f, dont nous aurons besoin à l'étape 4.
2. **Étude de variations.** On fait un tableau de variations de f, *en mettant aussi en première ligne les réels où g change de signe* (IMPORTANT). On en tire les informations suivantes :
   (a) **On détermine $f(I)$, afin de vérifier si $f(I) \subseteq I$.** Si oui, alors $u_0 \in I$ implique, par récurrence, que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie (et à valeurs dans I).
   Si $I = \mathbb{R}$, alors cette étape est inutile (on a nécessairement $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$).
   Si $f(I) \not\subseteq I$: trouver un sous-intervalle stable I' aussi grand que possible ; prendre $u_0 \in I'$.
   (b) Pour chaque intervalle J où g est de signe constant et f monotone, on détermine $f(J)$ grâce au tableau de variations, afin de vérifier si $f(J) \subseteq J$: on en déduit si J est stable par f, et que si $u_0 \in J$ alors $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Si f est décroissante sur tout intervalle, cette étape est obsolète.
   Si $f(J) \not\subseteq J$, on s'y ramène : voir les exemples plus bas.
   (c) **On observe la monotonie de f sur J.** Le meilleur cas est celui où f est **croissante**, puisqu'il implique que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **monotone**, et il suffit de comparer u_0 et u_1 pour connaître le sens de monotonie : c'est donné par l'étude de g (voir étape 3).

   L'étape (c) donne la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, l'étape (b) donne des bornes éventuelles.
3. En combinant (b) et (c) : selon l'intervalle J où $u_0 \in J$, on parvient à obtenir :
   — le **sens de monotonie** de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ (par exemple : si $g > 0$ sur J, alors $g(u_0) > 0$ implique $u_0 > u_1$, et comme on sait que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone d'après (c) on en déduit qu'elle est décroissante) ;
   — un **encadrement** de la suite (qui est donné par les extrémités de J, étant donné que $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $u_0 \in J$).

   Si la suite est croissante majorée ou décroissante minorée, alors elle converge. Soit ℓ sa limite.
4. **La limite ℓ est un point fixe de f** (étudié à l'étape 1). S'il y en a plusieurs : on détermine lequel est ℓ par élimination, grâce 1° à l'intervalle où appartient u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2° à la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   L'encadrement et la monotonie permettent aussi de montrer, par l'absurde, que la suite diverge (si l'étape 3 ne démontre pas la convergence).

Il y a au moins autant d'études à faire que d'intervalles J où g change de signe, à cause de (b).

Cas particulier ultra-favorable.

Lors de l'étape 1, vous avez probablement déterminé f'. S'il est manifeste que $\|f'\|_\infty < 1$ (inégalité STRICTE), alors l'inégalité des accroissements finis implique, en posant $k = \|f'\|_\infty$ et ℓ un point fixe de f (nécessairement unique dans ce cas) : $0 \leqslant |u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leqslant k|u_{n-1} - \ell| \leqslant \cdots \leqslant k^n|u_0 - \ell|$, et $k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $k \in [0,1[$: on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et les étapes 2.(c)–4 sont obsolètes.

Remarque. Après l'étape 1 (quand vous avez déterminé les points fixes de f), faites un dessin même grossier de la droite d'équation $y = x$, du graphe de la fonction $x \mapsto f(x)$, et du comportement de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *via* la méthode qu'on vous a enseignée. Cela vous permet de conjecturer le comportement de la suite selon les intervalles J auxquels u_0 est susceptible d'appartenir, d'avoir les idées claires au moment de commencer la démonstration, et surtout de repérer les cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ semble diverger (pour songer à faire un raisonnement par l'absurde au moment venu).

Exemple 1. Étudions la convergence d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. Posons :

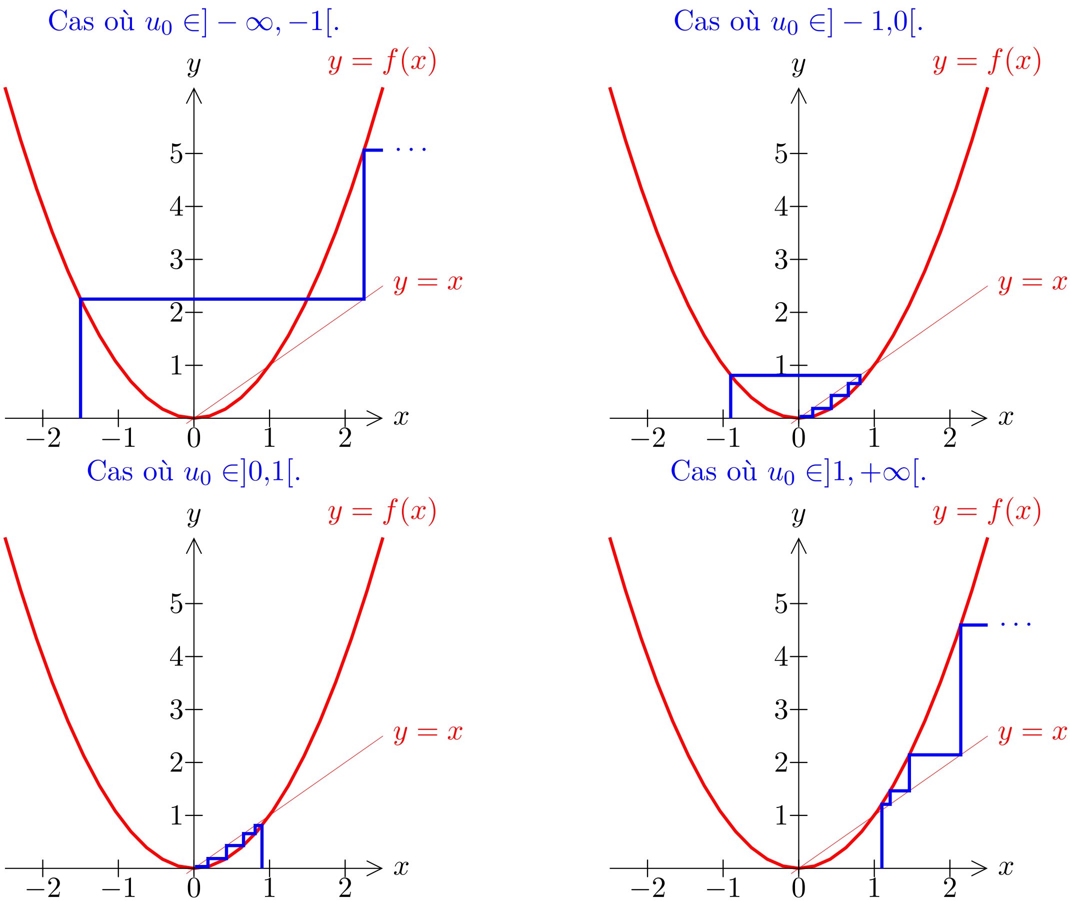
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = x - f(x) = x(1-x).$$

Étude de signe. La factorisation ci-dessus nous permet de constater que si $x \in \mathbb{R}$, alors $g(x) = 0$ (étape 1) si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$, tandis que $g(x) > 0$ si $x \in]0,1[$ et $g(x) < 0$ si $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$. D'où ce tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous pouvons à présent passer à l'étude des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme conseillé dans la remarque ci-dessus, ayons une idée de leurs comportements selon les valeurs de u_0, *via* une représentation graphique : voir la figure 1 (page 2).

Figure 1 – Comportement d'une suite vérifiant $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Étude de variations. Les variations de $f : x \mapsto x^2$ sont connues de tous. On les rappelle, *en* (étape 2) *n'oubliant pas de mettre dans le tableau de variations les valeurs où g change de signe* :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On observe qu'on a : (étape (b))

$$f\left(]-\infty,0[\right) =]0,+\infty[\,, \quad f\left(]0,1[\right) =]0,1[\,, \quad f\left(]1,+\infty[\right) =]1,+\infty[\,,$$

et l'on en déduit que les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ sont stables par f (mais pas $]-\infty,0[$: nous le traiterons en dernier pour voir comment gérer cette situation).

On en déduit le comportement de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, selon l'intervalle où est le terme u_0.

Cas où $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$. Comme 0 et 1 sont des points fixes de f, ces deux cas-là impliquent : $u_1 = f(u_0) = u_0$, et plus généralement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante égale à u_0, et converge vers u_0.

Cas où $u_0 \in]0,1[$. Comme $f(]0,1[) \subseteq]0,1[$, on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[.$$

En effet, si $u_0 \in]0,1[$ alors c'est vrai au rang $n = 0$ par hypothèse, et pour l'hérédité on note que si c'est vrai au rang n alors : $u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1[$, car $u_n \in]0,1[$ et f laisse stable cet intervalle. Ainsi, par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, f est croissante sur $]0,1[$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, et il suffit de comparer u_1 et u_0 pour (étape (c)) savoir si la suite est croissante ou décroissante ; or, si $u_0 \in]0,1[$, alors le tableau de signe de g montre que $g(u_0) > 0$, c'est-à-dire : $u_0 > f(u_0) = u_1$: ceci montre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est (strictement) décroissante, (étape 3) et elle est minorée par 0, donc elle converge. Soit ℓ sa limite. La relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donne, quand $n \to +\infty$: $\ell = f(\ell)$ (car f est continue sur $\mathbb{R}$), donc ℓ est un point fixe de f. Or les points fixes de f sont les réels en lesquels g s'annule, et nous avons vu plus haut qu'il s'agit de 0 et 1, donc : $\ell \in \{0,1\}$. (étape 4) Montrons que, du fait de la décroissance de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on ne peut pas avoir $\ell = 1$: on a en effet $u_n \leqslant u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, quand $n \to +\infty$: $\ell \leqslant u_0 < 1$. On a donc nécessairement $\ell = 0$.

On a démontré que si $u_0 \in]0,1[$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Cas où $u_0 \in]1,+\infty[$. Comme $f(]1,+\infty[) \subseteq]1,+\infty[$, le même raisonnement que ci-dessus permet de démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]1,+\infty[.$$

De plus, f est croissante sur $]1,+\infty[$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, et il suffit de comparer u_1 et u_0 (étape (c)) pour savoir si la suite est croissante ou décroissante ; or, si $u_0 \in]1,+\infty[$, alors le tableau de signe de g montre que $g(u_0) < 0$, c'est-à-dire : $u_0 < f(u_0) = u_1$: ceci montre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est (strictement) (étape 3) croissante. Nous allons montrer par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge : supposons qu'elle converge (étape 4) vers un réel ℓ. Comme on l'a vu ci-dessus, ℓ est nécessairement un point fixe de f, c'est-à-dire $\ell \in \{0,1\}$. Or la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$. Quand $n \to +\infty$, cette inégalité donne : $\ell \geqslant u_0 > 1$: mais si $\ell > 1$, on ne peut pas avoir $\ell \in \{0,1\}$, d'où une contradiction. Par l'absurde, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge (plus précisément, comme elle est croissante et diverge, elle tend vers $+\infty$).

On a démontré que si $u_0 \in]1,+\infty[$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

Cas où $u_0 \in]-\infty,0[$. Comme $f(]-\infty,0[) \subseteq]0,+\infty[$, si $u_0 \in]-\infty,0[$, alors $u_1 = f(u_0) \in]0,+\infty[$: ainsi on se ramène aux cas précédents, simplement en commençant l'étude à partir de $n = 1$ au lieu de $n = 0$. Plus précisément :

— si $u_0 \in]-\infty,-1[$, alors $u_1 = f(u_0) = u_0^2 \in]1,+\infty[$, donc par un raisonnement analogue à celui effectué ci-dessus (où l'on remplace u_0 par u_1), on a $u_n \in]1,+\infty[$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et l'étude ci-dessus démontre que dans ce cas la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge ;

— si $u_0 \in]-1{,}0[$, alors $u_1 = f(u_0) = u_0^2 \in]0{,}1[$, donc par un raisonnement analogue à celui effectué ci-dessus (où l'on remplace u_0 par u_1), on a $u_n \in]0{,}1[$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et l'étude ci-dessus démontre que dans ce cas la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 ;

— si $u_0 = -1$, alors $u_1 = 1$ et, du fait que 1 soit un point fixe de f, on obtient aisément par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_n = 1$, donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est stationnaire et converge vers 1.

Conclusion. Nous avons montré que :

— si $u_0 \in]-1{,}1[$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 ;

— si $u_0 \in \{-1{,}1\}$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1 ;

— si $u_0 \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 1. Retrouver ces résultats beaucoup plus rapidement sans passer par cette méthode, mais en exprimant explicitement u_n en fonction de n et u_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2. Étudions la convergence d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$. Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad g(x) = x - f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

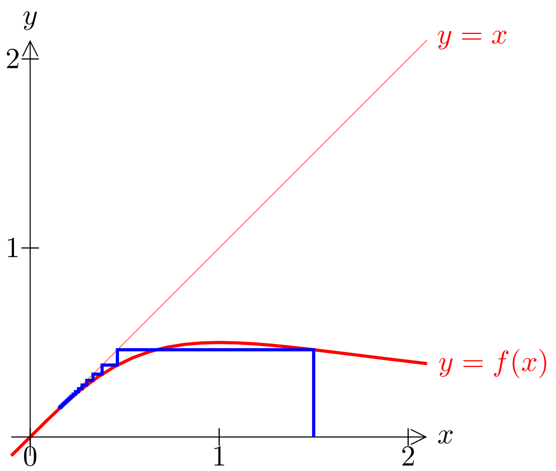
La fonction f est impaire. Faire l'étude sur $\mathbb{R}_+$ est donc suffisant : si $u_0 \in \mathbb{R}_-$, alors la suite $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la même relation de récurrence (car $-u_{n+1} = -f(u_n) = f(-u_n)$ par parité), et son premier terme est $-u_0 \in \mathbb{R}_+$: ainsi on peut appliquer l'étude faite sur $\mathbb{R}_+$ pour en déduire la limite (éventuelle) de $(-u_n)_{n\geqslant 0}$, puis celle de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en multipliant par -1.

Étude de signe. Il est clair que si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, tandis que (étape 1) $g(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$. On le résume avec ce tableau de signe :

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	

Avant d'en déduire le comportement des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$, faisons une représentation graphique : voir la figure 2 (page 4).

FIGURE 2 – Comportement d'une suite vérifiant $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Au vu de la représentation graphique, il semble que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit décroissante, et converge vers 0 (assez lentement, si l'on compare à l'exemple précédent... c'est lié au fait que $f'(0) = 1$).

Montrons-le.

Étude de variations. L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant : (étape 2)

x	0		1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

On observe qu'on a : (étape (b))

$$f\left(]0{,}1]\right) = \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad f\left([1,+\infty[\right) = \left]0, \frac{1}{2}\right],$$

donc : $f\left(]0{,}1]\right) \subseteq]0{,}1]$, et l'on en déduit que l'intervalle $]0{,}1]$ est stable par f (mais pas $[1,+\infty[$: nous le traiterons en dernier pour voir comment gérer cette situation). Faisons une distinction de cas, selon que u_0 soit dans $[0{,}1]$ ou dans $[1,+\infty[$.

Cas où $u_0 = 0$. Comme 0 est un point fixe de f, on a : $u_1 = f(0) = 0$, et plus généralement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(0) = 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante égale à 0, et converge vers 0.

Cas où $u_0 \in]0{,}1]$. Comme $f(]0{,}1]) \subseteq]0{,}1]$, on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in]0{,}1].$$

En effet, si $u_0 \in]0{,}1]$ alors c'est vrai au rang $n = 0$ par hypothèse, et pour l'hérédité on note que si c'est vrai au rang n alors : $u_{n+1} = f(u_n) \in]0{,}1]$, car $u_n \in]0{,}1]$ et f laisse stable cet intervalle. Ainsi, par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, f est croissante sur $]0{,}1]$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, et il suffit de comparer u_1 et u_0 (étape (c)) pour savoir si la suite est croissante ou décroissante ; or, si $u_0 \in]0{,}1]$, alors le tableau de signe de g montre que $g(u_0) > 0$, c'est-à-dire : $u_0 > f(u_0) = u_1$: ceci montre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est (strictement) (étape 3) décroissante, et elle est minorée par 0, donc elle converge. Soit ℓ sa limite. La relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donne, quand $n \to +\infty$: $\ell = f(\ell)$ (car f est continue sur $\mathbb{R}$), donc ℓ est un point fixe de f. Or l'unique point fixe de f est le réel en lequel g s'annule, c'est-à-dire 0 d'après l'étude de signe plus haut. On peut conclure : $\ell = 0$. On a démontré que si $u_0 \in]0{,}1]$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. (étape 4)

Cas où $u_0 \in]1,+\infty[$. Comme $f\left([1,+\infty[\right) = \left]0, \frac{1}{2}\right] \subseteq]0{,}1]$, et $u_0 \in]1,+\infty[$, on a : $u_1 = f(u_0) \in]0{,}1]$, et comme $]0{,}1]$ est stable par f on peut imiter le raisonnement ci-dessus (où l'on commence à $n = 1$ au lieu de $n = 0$, et l'on remplace u_0 par u_1) pour montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Conclusion. Nous avons montré que si $u_0 \in \mathbb{R}_+$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Par parité de la fonction f, il en est de même si $u_0 \in \mathbb{R}_-$, donc pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Nous allons donner un équivalent asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de l'exercice précédent, afin de comprendre la lenteur de sa convergence.

1. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = 2$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} - 2$. Justifier que $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, et qu'on a : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \frac{1}{u_n^2} - 2n = \frac{1}{u_0^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k$.

3. En utilisant la définition epsilonesque de la limite, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on ait : $\left|\sum_{k=n_0}^{n-1} \varepsilon_k\right| \leqslant \varepsilon(n - n_0)$.
4. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on ait :
$$\left|\frac{1}{2nu_n^2} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{u_0^2} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \varepsilon_k\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$
5. Conclure en montrant : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

On a implicitement démontré, dans ce cas particulier, le lemme de Cesàro : si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à valeurs réelles et convergeant vers un réel ℓ, alors la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right)_{n\geqslant 0}$ converge également vers ℓ.

Table des figures

1 Comportement d'une suite vérifiant $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 2
2 Comportement d'une suite vérifiant $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 4