MÉTHODES – Suites récurrentes
✓ Relations de récurrence dépendant de n

1 ✓ Déduire $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de la relation de récurrence

Lorsque la relation obtenue est récurrente d'ordre 1, par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}a_n, \qquad \text{ou :} \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}a_n, \quad \text{etc.}$$

on commence par ne pas dire n'importe quoi : ce n'est PAS une suite géométrique de raison $\frac{n+1}{n+2}$, ou $\frac{n+1}{2n+1}$, etc. Pour cela, il faudrait une raison QUI NE DÉPEND PAS DE n ! Pour expliciter a_n en fonction de n, l'approche la plus naïve est de réitérer la relation de récurrence jusqu'à atteindre a_0 (ou a_1, si elle n'est valable que pour $n \geqslant 1$: faites attention aux valeurs de n permises !), AU BROUILLON. Ainsi, dans le 1er exemple ci-dessus, on aurait :

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}a_n = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n}{n+1}a_{n-1} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n}a_{n-2} = \cdots = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}a_0,$$

car $a_n = \dfrac{n}{n+1}a_{n-1}$ car $a_{n-1} = \dfrac{n-1}{n}a_{n-2}$ on s'arrête à $a_1 = \dfrac{1}{2}a_0$,

(on conseille de faire figurer non seulement le dernier terme du produit, mais aussi l'avant-dernier, pour mieux comprendre les simplifications qui se généralisent au début et à la fin) ce qui donne après simplification :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+2}a_0,$$

c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_n = \dfrac{a_0}{n+1}$ (en fait, l'expression vaut aussi pour $n = 0$: le contraire permet parfois de détecter des erreurs dans les simplifications).

Si vous avez du mal à faire ces injections successives pour une valeur de n arbitraire : faites-le pour $n = 1$, $n = 2$, etc., afin de voir quelle allure ont les premiers termes de la suite, *sans remplacer les produits par leurs valeurs exactes* (sinon il est impossible de reconnaître la forme générale de a_n). Ainsi, on n'écrira pas que $5 \times 3 \times 1$ égale 15, sinon on ne reconnaîtra plus le produit des entiers impairs, et on ne pourra pas le généraliser. Exemple ici :

$$a_3 = \frac{3}{4}a_2 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}a_1 = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{1}{\cancel{2}}a_0 = \frac{1}{4}a_0.$$

Nous avons bien dit ci-dessus que ce raisonnement où l'on réinjecte « à la main » est à faire AU BROUILLON. Il n'est pas assez rigoureux pour être apprécié du correcteur tatillon, surtout si vous manquez beaucoup de rigueur en d'autres endroits de la copie, **et il n'est pas acceptable si la réponse attendue est déjà dans l'énoncé** (dans ces cas-là, on est plus exigeant sur la rigueur). Dans ce cas, pour formaliser le raisonnement : **raisonnez par récurrence**. Ci-dessus, la proposition à démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ serait P_n : « $a_n = \dfrac{a_0}{n+1}$ ». L'initialisation est immédiate. Ensuite, pour l'hérédité, on suppose la proposition vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, et on a :

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}a_n \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{n+1}{n+2} \times \frac{a_0}{n+1} = \frac{a_0}{n+2},$$

et on reconnaît là P_{n+1}, ce qui clôt l'hérédité. Par récurrence, on a le résultat voulu pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si la récurrence ne marche clairement pas : **vous avez fait une erreur dans la conjecture au brouillon**. Retravaillez-la, en particulier en regardant ce qui coince pour de petites valeurs de n !

De même, pour la seconde suite, on trouve AU BROUILLON :

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}a_n = \frac{n+1}{2n+1} \times \frac{n}{2n-1}a_{n-1} = \cdots = \frac{n+1}{2n+1} \times \frac{n}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1}a_0,$$

car $a_n = \dfrac{n}{2n-1}a_{n-1}$

on s'arrête à $a_1 = \dfrac{1}{1}a_0$,

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1) \times n \times \cdots \times 2 \times 1}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 1}a_0.$$

Par rapport à la suite précédente, il apparaît une difficulté inédite : **comment simplifier cette cochonceté ?** C'est en général le produit des entiers pairs ou des entiers impairs qu'il faudra simplifier, dans ces cas de figure.

2 ✓ Simplifier le produit des entiers pairs

C'est le cas favorable : par définition d'un entier pair, on peut factoriser chaque terme du produit par 2, et faire ainsi apparaître une jolie factorielle. De manière informelle, on l'écrirait ainsi :

$$(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2 = (2 \cdot n) \times (2 \cdot (n-1)) \times \cdots \times (2 \cdot 2) \times (2 \cdot 1) = 2^n \cdot n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = 2^n n!.$$

De manière formelle, c'est encore plus rapide en plus d'être rigoureux :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$$

(notez bien que quand on « sort 2 du produit », on n'obtient pas 2 : il est mis en facteur autant de fois qu'il n'y a de termes dans le produit !). En définitive, retenez comment démontrer que :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = (2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2 = 2^n n!.$$

Il est HORS DE QUESTION de retenir le résultat brut, sachez le redémontrer.

3 ✓ Simplifier le produit des entiers impairs

C'est plus délicat que dans le cas ci-dessus, parce qu'il n'apparaît pas de factorisation dans chaque terme du produit (c'est impossible : songez qu'il apparaît des nombres premiers dans le produit). L'idée est alors de rajouter « ce qu'il manque » pour avoir une jolie factorielle : tous les termes pairs. On le fait en multipliant et divisant par chaque terme pair. De manière informelle, on l'écrirait ainsi :

$$\begin{aligned}(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3 \times 1 &= \frac{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.\end{aligned}$$

Notez qu'il réapparaît la méthode de simplification du produit des entiers pairs, au dénominateur. De manière formelle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2n+1}\ell \cdot \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ pair}}}^{2n+1}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n+1}\ell}{2^n n!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

(attention à ne pas faire accidentellement commencer le produit sur les entiers pairs à $k = 0$: sinon, vous multipliez par zéro et le produit est nul !). Selon les besoins, il peut être préférable d'aussi ajouter $2n+2$: cela dépend des simplifications qu'impliquerait ce rajout. En définitive, retenez comment démontrer que :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = (2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 3\times 1 = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Il est HORS DE QUESTION de retenir le résultat brut, sachez le redémontrer.

Ainsi, la suite étudiée ci-dessus se simplifie :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1} = \frac{(n+1)\times n\times\cdots\times 2\times 1}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 1}a_0 = \frac{2^n(n+1)!n!}{(2n+1)!}a_0 = \frac{2^n}{\binom{2n+1}{n}}a_0.$$

4 Autres approches pour obtenir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ explicitement à partir d'une relation de récurrence

À l'aide des sommes et produits télescopiques, votre serviteur vous propose des méthodes pour obtenir des expressions explicites de suites vérifiant des relations de récurrence d'ordre 1 simples (mais pas trop : si on reconnaît immédiatement une suite géométrique ou arithmétique, à quoi bon s'embêter ?).

4.1 Le type de relation le plus souvent croisé : $a_{n+1} = \alpha_n a_n$.

Dans ce cas, vous divisez par a_k, et avez :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \alpha_k.$$

Multipliez ces relations pour tout k entre 0 et $n-1$, et vous en déduisez :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{n-1}\alpha_k.$$

L'intérêt de la manœuvre est que le produit est *télescopique*. Si l'on raisonnait à la main, on écrirait :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}}\times\frac{\cancel{a_{n-1}}}{\cancel{a_{n-2}}}\times\cdots\times\frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_1}}\times\frac{\cancel{a_1}}{a_0} = \frac{a_n}{a_0}.$$

On le montre formellement comme dans le cas des sommes télescopiques : en écrivant $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}a_{k+1}}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}a_k}$, et en faisant le changement d'indice $k' = k+1$ dans le produit du numérateur : ainsi on constate que tous les termes du produit sont les mêmes au numérateur et au dénominateur, sauf les termes extrémaux.

La relation ci-dessus donne donc directement : $\frac{a_n}{a_0} = \prod\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k$, et : $a_n = a_0\prod\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k$. Il reste à simplifier ce produit si c'est possible.

Exemple 1. Si l'on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+1}a_n$, alors cette méthode donne :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+2}{2k+1} \iff \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \frac{a_n}{a_0} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+2)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)},$$

et vous simplifiez le produit des entiers pairs au numérateur, des entiers impairs au dénominateur, en suivant ce qui fut expliqué plus haut ; vous obtenez alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} a_0.$$

Cette expression reste valable pour $n = 0$.

Exemple 2. On reprend l'exemple de la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ qui vérifiait $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec cette méthode :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2},$$

et le produit du membre de droite est aussi télescopique, donc égal à $\frac{1}{n+1}$. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = \frac{a_0}{n+1}.$$

Cette expression reste valable pour $n = 0$.

Remarque. Pour que la méthode soit rigoureuse, encore faut-il justifier que $a_n \neq 0$ au moment de diviser. C'est vrai pourvu que $\alpha_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le vérifier sérieusement : ce n'est pas clair si α_n est de la forme $\alpha_n = n - k$ avec k un entier fixé, par exemple) et $a_0 \neq 0$. Dans ce cas, il ne me semble pas choquant d'écrire « on a $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une récurrence immédiate », avant de procéder à la division.

Les autres relations qui suivent sont plus rares : elles s'obtiennent généralement (dans un contexte de résolution des équations différentielles avec les séries entières) lorsque nous avons un second membre non nul. Elles sont donc moins essentielles à maîtriser *dans ce contexte*. Vous pouvez néanmoins les rencontrer en d'autres situations mathématiques (relations de récurrence obtenues par intégration par parties).

4.2 Relation de la forme : $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta_n$.

C'est « presque » géométrique, ce qui suggère que $a_n \approx \alpha^n a_0$ et $\dfrac{a_n}{\alpha^n} \approx$ constante (attention au fait que ce ne soit qu'une heuristique, cela n'a rien de rigoureux, notamment si β_n est « gros »). Ceci incite à diviser la relation par α^{n+1} pour obtenir la suite $\left(\dfrac{a_n}{\alpha^n}\right)_{n \geqslant 0}$ plus simple, et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{\beta_n}{\alpha^{n+1}}.$$

En écrivant cette relation pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis en la sommant de $k = 0$ à $k = n - 1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{\alpha^{k+1}}.$$

Or la somme de gauche est télescopique, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \; \frac{a_n}{\alpha^n} - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{\alpha^{k+1}}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \; a_n = \alpha^n \left(a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{\alpha^{k+1}} \right)$$

À voir ensuite, selon les circonstances, si l'on peut simplifier la somme du membre de de droite.

Exemple 3. Si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n + 2^n n$, alors cette méthode donne, après division par 2^{k+1} (on écrit directement avec k) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{a_k}{2^k} = \frac{k}{2}.$$

Alors, en sommant cette relation de $k = 0$ à $k = n-1$, et en utilisant le fait que la somme obtenue à gauche soit télescopique, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \frac{a_n}{2^n} - a_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k, \quad \text{et donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ a_n = 2^n\left(a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = 2^n\left(a_0 + \frac{(n-1)n}{4}\right).$$

4.3 Relation de la forme : $a_{n+1} = (n+1)a_n + \beta_n$.

Ne parlons certainement pas de suite géométrique de raison $n+1$ ici. On s'inspire quand même de ce qui précède : si l'on divise par $(n+1)!$, alors on obtient, du fait que $\frac{(n+1)!}{n+1} = n!$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n!} = \frac{\beta_n}{(n+1)!}.$$

En écrivant cette relation pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis en la sommant de $k = 0$ à $k = n-1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{(k+1)!} - \frac{a_k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{(k+1)!}.$$

Or la somme de gauche est télescopique, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{n!} - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{(k+1)!},$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ a_n = n!\left(a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{(k+1)!}\right)$.

4.4 Relation de la forme : $a_{n+1} = \alpha(n+1)a_n + \beta_n$.

Nous n'avons peur de rien, et combinons les deux approches précédentes, en divisant par $\alpha^{n+1}(n+1)!$.

Exemple 4. Si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -(n+1)a_n + 1$, alors cette méthode donne, après multiplication par $\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$ (on écrit directement avec k au lieu de n) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (-1)^{k+1}\frac{a_{k+1}}{(k+1)!} - (-1)^k\frac{a_k}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Alors, en sommant cette relation de $k = 0$ à $k = n-1$, et en utilisant le fait que la somme de gauche soit télescopique :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (-1)^n\frac{a_n}{n!} - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!},$$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ a_n = (-1)^n n!\left(a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$.

On peut généraliser l'approche à d'autres types de relation de récurrence :

Exercice 1. Soit $\ell \in \mathbb{N}$, et soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant une relation de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \alpha(n+1)^\ell a_n + \beta_n.$$

Exprimer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de α et d'une somme dont le terme général contient β_k.

5 Lorsque la relation est récurrente d'ordre 2, exemple : $a_{n+2} = \beta_n a_n$.

C'est le seul type de relation d'ordre 2 qu'on peut exiger de vous, en dehors du cas à coefficients constants. Autrement, c'est trop difficile pour en déduire l'expression explicite de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ sans indication.

Si vous l'explicitez pour n petit, vous voyez qu'en réitérant la relation, vous n'obtenez pas la même forme explicite :

$$\begin{array}{ll} a_2 = \beta_0 a_0, & a_3 = \beta_1 a_1, \\ a_4 = \beta_2 a_2 = \beta_2 \times \beta_0 a_0, & a_5 = \beta_3 a_3 = \beta_3 \times \beta_1 a_1, \\ a_6 = \beta_4 a_4 = \beta_4 \times \beta_2 \times \beta_0 a_0, & a_7 = \beta_5 a_5 = \beta_5 \times \beta_3 \times \beta_1 a_1, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

On tombe tantôt sur a_0 en bout de course, et tantôt sur a_1. On observe que cela dépend de la **parité** de n. On comprend donc qu'il faut faire une distinction de cas.

On traite d'une part le cas pair ; pour écrire les choses convenablement, **on pose** $n = 2p$ **avec** $p \in \mathbb{N}$, et la relation de récurrence devient :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \beta_{2p} a_{2p}.$$

On voit que $(a_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 1 : on peut la réitérer de la même manière que pour toutes les suites traitées ci-dessus pour en déduire une expression explicite de a_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On traite d'autre part le cas impair, **en posant** $n = 2p + 1$ **avec** $p \in \mathbb{N}$, et la relation de récurrence devient :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = \beta_{2p+1} a_{2p+1}.$$

Même constat : la suite $(a_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est récurrente d'ordre 1 et se traite comme tous les cas ci-dessus.

Table des matières