Méthodes – Suites récurrentes

1 Relations de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Nous ne présentons que le cas le plus favorable de l'étude de la convergence d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour les difficultés potentiellement rencontrées quand f est décroissante, etc., nous vous renvoyons à votre cours de 1re année.

$u_{n+1} = f(u_n)$: plan d'étude.

Soit I le domaine de définition de f. On donne le plan d'étude dans les cas les plus favorables.

1. **Étude de signe.** On étudie le signe de $g : x \mapsto x - f(x)$. Résoudre $g(x) = 0$ donne les **points fixes** de f, dont nous aurons besoin à l'étape 4.
2. **Étude de variations.** On fait un tableau de variations de f, *en mettant aussi en première ligne les réels où g change de signe* (IMPORTANT). On en tire les informations suivantes :
   (a) **On détermine $f(I)$, afin de vérifier si $f(I) \subseteq I$.** Si oui, alors $u_0 \in I$ implique, par récurrence, que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie (et à valeurs dans I).
   Si $I = \mathbb{R}$, alors cette étape est inutile (on a nécessairement $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$).
   Si $f(I) \not\subseteq I$: trouver un sous-intervalle stable I' aussi grand que possible ; prendre $u_0 \in I'$.
   (b) Pour chaque intervalle J où g est de signe constant et f monotone, on détermine $f(J)$ grâce au tableau de variations, afin de vérifier si $f(J) \subseteq J$: on en déduit si J est stable par f, et que si $u_0 \in J$ alors $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Si f est décroissante sur tout intervalle, cette étape est obsolète.
   Si $f(J) \not\subseteq J$, on s'y ramène : voir les exemples plus bas.
   (c) **On observe la monotonie de f sur J.** Le meilleur cas est celui où f est **croissante**, puisqu'il implique que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **monotone**, et il suffit de comparer u_0 et u_1 pour connaître le sens de monotonie : c'est donné par l'étude de g (voir étape 3).

   L'étape (c) donne la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, l'étape (b) donne des bornes éventuelles.
3. En combinant (b) et (c) : selon l'intervalle J où $u_0 \in J$, on parvient à obtenir :
   — le **sens de monotonie** de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ (par exemple : si $g > 0$ sur J, alors $g(u_0) > 0$ implique $u_0 > u_1$, et comme on sait que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone d'après (c) on en déduit qu'elle est décroissante) ;
   — un **encadrement** de la suite (qui est donné par les extrémités de J, étant donné que $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $u_0 \in J$).

   Si la suite est croissante majorée ou décroissante minorée, alors elle converge. Soit ℓ sa limite.
4. **La limite ℓ est un point fixe de f** (étudié à l'étape 1). S'il y en a plusieurs : on détermine lequel est ℓ par élimination, grâce 1° à l'intervalle où appartient u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2° à la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   L'encadrement et la monotonie permettent aussi de montrer, par l'absurde, que la suite diverge (si l'étape 3 ne démontre pas la convergence).

Il y a au moins autant d'études à faire que d'intervalles J où g change de signe, à cause de (b).

Cas particulier ultra-favorable.

Lors de l'étape 1, vous avez probablement déterminé f'. S'il est manifeste que $\|f'\|_\infty < 1$ (inégalité STRICTE), alors l'inégalité des accroissements finis implique, en posant $k = \|f'\|_\infty$ et ℓ un point fixe de f (nécessairement unique dans ce cas) : $0 \leqslant |u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leqslant k|u_{n-1} - \ell| \leqslant \cdots \leqslant k^n|u_0 - \ell|$, et $k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $k \in [0,1[$: on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et les étapes 2.(c)–4 sont obsolètes.

Remarque. Après l'étape 1 (quand vous avez déterminé les points fixes de f), faites un dessin même grossier de la droite d'équation $y = x$, du graphe de la fonction $x \mapsto f(x)$, et du comportement de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *via* la méthode qu'on vous a enseignée. Cela vous permet de conjecturer le comportement de la suite selon les intervalles J auxquels u_0 est susceptible d'appartenir, d'avoir les idées claires au moment de commencer la démonstration, et surtout de repérer les cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ semble diverger (pour songer à faire un raisonnement par l'absurde au moment venu).

Exemple 1. Étudions la convergence d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. Posons :

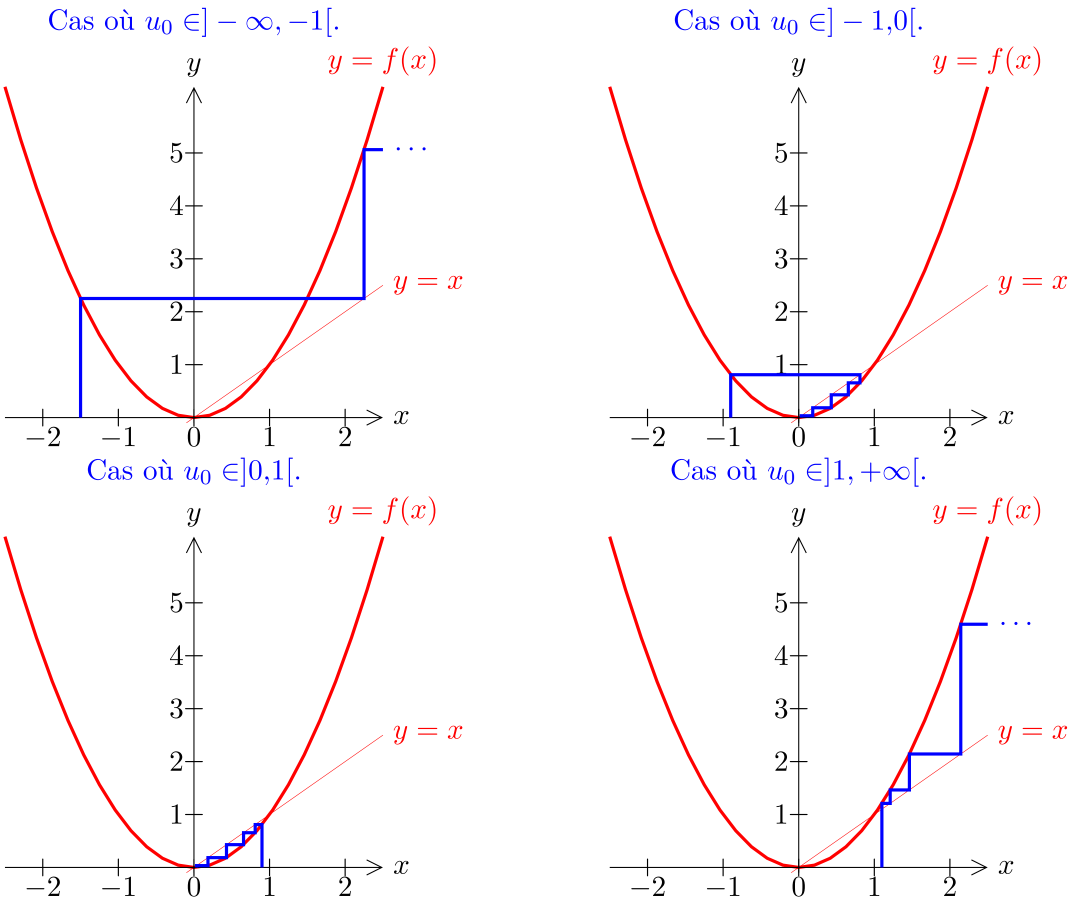
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = x - f(x) = x(1-x).$$

Étude de signe. La factorisation ci-dessus nous permet de constater que si $x \in \mathbb{R}$, alors $g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$, tandis que $g(x) > 0$ si $x \in]0,1[$ et $g(x) < 0$ si $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$. D'où ce tableau de signe : (étape 1)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous pouvons à présent passer à l'étude des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme conseillé dans la remarque ci-dessus, ayons une idée de leurs comportements selon les valeurs de u_0, *via* une représentation graphique : voir la figure 1 (page 2).

Figure 1 – Comportement d'une suite vérifiant $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Étude de variations. Les variations de $f : x \mapsto x^2$ sont connues de tous. On les rappelle, *en n'oubliant pas de mettre dans le tableau de variations les valeurs où g change de signe* : (étape 2)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On observe qu'on a : (étape (b))

$$f\left(]-\infty,0[\right) =]0,+\infty[\,, \quad f\left(]0,1[\right) =]0,1[\,, \quad f\left(]1,+\infty[\right) =]1,+\infty[\,,$$

et l'on en déduit que les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ sont stables par f (mais pas $]-\infty,0[$: nous le traiterons en dernier pour voir comment gérer cette situation).

On en déduit le comportement de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, selon l'intervalle où est le terme u_0.

Cas où $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$. Comme 0 et 1 sont des points fixes de f, ces deux cas-là impliquent : $u_1 = f(u_0) = u_0$, et plus généralement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante égale à u_0, et converge vers u_0.

Cas où $u_0 \in]0,1[$. Comme $f(]0,1[) \subseteq]0,1[$, on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[.$$

En effet, si $u_0 \in]0,1[$ alors c'est vrai au rang $n = 0$ par hypothèse, et pour l'hérédité on note que si c'est vrai au rang n alors : $u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1[$, car $u_n \in]0,1[$ et f laisse stable cet intervalle. Ainsi, par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, f est croissante sur $]0,1[$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, et il suffit de comparer u_1 et u_0 pour (étape (c)) savoir si la suite est croissante ou décroissante ; or, si $u_0 \in]0,1[$, alors le tableau de signe de g montre que $g(u_0) > 0$, c'est-à-dire : $u_0 > f(u_0) = u_1$: ceci montre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est (strictement) décroissante, (étape 3) et elle est minorée par 0, donc elle converge. Soit ℓ sa limite. La relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donne, quand $n \to +\infty$: $\ell = f(\ell)$ (car f est continue sur $\mathbb{R}$), donc ℓ est un point fixe de f. Or les points fixes de f sont les réels en lesquels g s'annule, et nous avons vu plus haut qu'il s'agit de 0 et 1, donc : $\ell \in \{0,1\}$. (étape 4) Montrons que, du fait de la décroissance de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on ne peut pas avoir $\ell = 1$: on a en effet $u_n \leqslant u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, quand $n \to +\infty$: $\ell \leqslant u_0 < 1$. On a donc nécessairement $\ell = 0$.

On a démontré que si $u_0 \in]0,1[$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Cas où $u_0 \in]1,+\infty[$. Comme $f(]1,+\infty[) \subseteq]1,+\infty[$, le même raisonnement que ci-dessus permet de démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]1,+\infty[.$$

De plus, f est croissante sur $]1,+\infty[$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, et il suffit de comparer u_1 et u_0 (étape (c)) pour savoir si la suite est croissante ou décroissante ; or, si $u_0 \in]1,+\infty[$, alors le tableau de signe de g montre que $g(u_0) < 0$, c'est-à-dire : $u_0 < f(u_0) = u_1$: ceci montre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est (strictement) (étape 3) croissante. Nous allons montrer par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge : supposons qu'elle converge (étape 4) vers un réel ℓ. Comme on l'a vu ci-dessus, ℓ est nécessairement un point fixe de f, c'est-à-dire $\ell \in \{0,1\}$. Or la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$. Quand $n \to +\infty$, cette inégalité donne : $\ell \geqslant u_0 > 1$: mais si $\ell > 1$, on ne peut pas avoir $\ell \in \{0,1\}$, d'où une contradiction. Par l'absurde, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge (plus précisément, comme elle est croissante et diverge, elle tend vers $+\infty$).

On a démontré que si $u_0 \in]1,+\infty[$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

Cas où $u_0 \in]-\infty,0[$. Comme $f(]-\infty,0[) \subseteq]0,+\infty[$, si $u_0 \in]-\infty,0[$, alors $u_1 = f(u_0) \in]0,+\infty[$: ainsi on se ramène aux cas précédents, simplement en commençant l'étude à partir de $n = 1$ au lieu de $n = 0$. Plus précisément :

— si $u_0 \in]-\infty,-1[$, alors $u_1 = f(u_0) = u_0^2 \in]1,+\infty[$, donc par un raisonnement analogue à celui effectué ci-dessus (où l'on remplace u_0 par u_1), on a $u_n \in]1,+\infty[$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et l'étude ci-dessus démontre que dans ce cas la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge ;

— si $u_0 \in]-1{,}0[$, alors $u_1 = f(u_0) = u_0^2 \in]0{,}1[$, donc par un raisonnement analogue à celui effectué ci-dessus (où l'on remplace u_0 par u_1), on a $u_n \in]0{,}1[$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et l'étude ci-dessus démontre que dans ce cas la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 ;

— si $u_0 = -1$, alors $u_1 = 1$ et, du fait que 1 soit un point fixe de f, on obtient aisément par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_n = 1$, donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est stationnaire et converge vers 1.

Conclusion. Nous avons montré que :

— si $u_0 \in]-1{,}1[$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 ;

— si $u_0 \in \{-1{,}1\}$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1 ;

— si $u_0 \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 1. Retrouver ces résultats beaucoup plus rapidement sans passer par cette méthode, mais en exprimant explicitement u_n en fonction de n et u_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2. Étudions la convergence d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$. Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad g(x) = x - f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

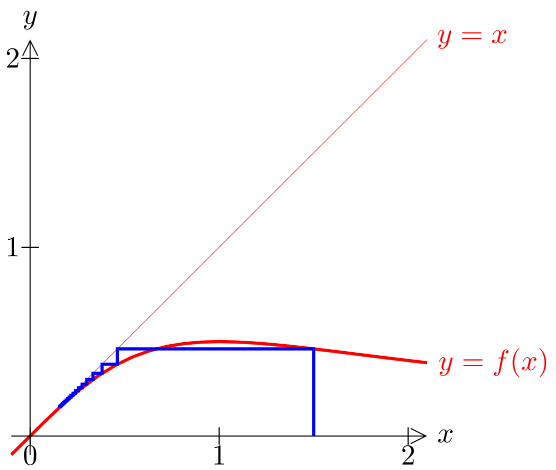
La fonction f est impaire. Faire l'étude sur $\mathbb{R}_+$ est donc suffisant : si $u_0 \in \mathbb{R}_-$, alors la suite $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la même relation de récurrence (car $-u_{n+1} = -f(u_n) = f(-u_n)$ par parité), et son premier terme est $-u_0 \in \mathbb{R}_+$: ainsi on peut appliquer l'étude faite sur $\mathbb{R}_+$ pour en déduire la limite (éventuelle) de $(-u_n)_{n\geqslant 0}$, puis celle de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en multipliant par -1.

Étude de signe. Il est clair que si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, tandis que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$. On le résume avec ce tableau de signe : (étape 1)

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	

Avant d'en déduire le comportement des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$, faisons une représentation graphique : voir la figure 2 (page 4).

Figure 2 – Comportement d'une suite vérifiant $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Au vu de la représentation graphique, il semble que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit décroissante, et converge vers 0 (assez lentement, si l'on compare à l'exemple précédent... c'est lié au fait que $f'(0) = 1$).

Montrons-le.

Étude de variations. L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant : (étape 2)

x	0		1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

On observe qu'on a : (étape (b))

$$f\left(]0{,}1]\right) = \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad f\left([1,+\infty[\right) = \left]0, \frac{1}{2}\right],$$

donc : $f\left(]0{,}1]\right) \subseteq\ ]0{,}1]$, et l'on en déduit que l'intervalle $]0{,}1]$ est stable par f (mais pas $[1,+\infty[$: nous le traiterons en dernier pour voir comment gérer cette situation). Faisons une distinction de cas, selon que u_0 soit dans $[0{,}1]$ ou dans $[1,+\infty[$.

Cas où $u_0 = 0$. Comme 0 est un point fixe de f, on a : $u_1 = f(0) = 0$, et plus généralement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(0) = 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante égale à 0, et converge vers 0.

Cas où $u_0 \in]0{,}1]$. Comme $f(]0{,}1]) \subseteq]0{,}1]$, on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0{,}1].$$

En effet, si $u_0 \in]0{,}1]$ alors c'est vrai au rang $n = 0$ par hypothèse, et pour l'hérédité on note que si c'est vrai au rang n alors : $u_{n+1} = f(u_n) \in]0{,}1]$, car $u_n \in]0{,}1]$ et f laisse stable cet intervalle. Ainsi, par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, f est croissante sur $]0{,}1]$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, et il suffit de comparer u_1 et u_0 pour savoir si la suite est croissante ou décroissante ; or, si $u_0 \in]0{,}1]$, alors le tableau de signe de g montre que $g(u_0) > 0$, c'est-à-dire : $u_0 > f(u_0) = u_1$: ceci montre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est (strictement) décroissante, et elle est minorée par 0, donc elle converge. Soit ℓ sa limite. La relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donne, quand $n \to +\infty$: $\ell = f(\ell)$ (car f est continue sur $\mathbb{R}$), donc ℓ est un point fixe de f. Or l'unique point fixe de f est le réel en lequel g s'annule, c'est-à-dire 0 d'après l'étude de signe plus haut. On peut conclure : $\ell = 0$. On a démontré que si $u_0 \in]0{,}1]$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. (étape (c)) (étape 3) (étape 4)

Cas où $u_0 \in]1,+\infty[$. Comme $f\left([1,+\infty[\right) = \left]0, \frac{1}{2}\right] \subseteq]0{,}1]$, et $u_0 \in]1,+\infty[$, on a : $u_1 = f(u_0) \in]0{,}1]$, et comme $]0{,}1]$ est stable par f on peut imiter le raisonnement ci-dessus (où l'on commence à $n = 1$ au lieu de $n = 0$, et l'on remplace u_0 par u_1) pour montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Conclusion. Nous avons montré que si $u_0 \in \mathbb{R}_+$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Par parité de la fonction f, il en est de même si $u_0 \in \mathbb{R}_-$, donc pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Nous allons donner un équivalent asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de l'exercice précédent, afin de comprendre la lenteur de sa convergence.

1. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = 2$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} - 2$. Justifier que $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, et qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \dfrac{1}{u_n^2} - 2n = \dfrac{1}{u_0^2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k$.
3. En utilisant la définition epsilonesque de la limite, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on ait : $\left|\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-1} \varepsilon_k\right| \leqslant \varepsilon(n - n_0)$.

4. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on ait :
$$\left|\frac{1}{2nu_n^2} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{u_0^2} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \varepsilon_k\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$
5. Conclure en montrant : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

On a implicitement démontré, dans ce cas particulier, le lemme de Cesàro : si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à valeurs réelles et convergeant vers un réel ℓ, alors la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right)_{n\geqslant 0}$ converge également vers ℓ.

2 ✓ Relations de récurrence dépendant de n

2.1 ✓ Déduire $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de la relation de récurrence

Lorsque la relation obtenue est récurrente d'ordre 1, par exemple :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}a_n, \qquad \text{ou } a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}a_n, \qquad \text{etc.}$$
on commence par ne pas dire n'importe quoi : ce n'est PAS une suite géométrique de raison $\frac{n+1}{n+2}$, ou $\frac{n+1}{2n+1}$, etc. Pour cela, il faudrait une raison QUI NE DÉPEND PAS DE n ! Pour expliciter a_n en fonction de n, l'approche la plus naïve est de réitérer la relation de récurrence jusqu'à atteindre a_0 (ou a_1, si elle n'est valable que pour $n \geqslant 1$: faites attention aux valeurs de n permises !), AU BROUILLON. Ainsi, dans le 1er exemple ci-dessus, on aurait :
$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}a_n = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n}{n+1}a_{n-1} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n}a_{n-2} = \cdots = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}a_0,$$
car $a_n = \dfrac{n}{n+1}a_{n-1}$

car $a_{n-1} = \dfrac{n-1}{n}a_{n-2}$

on s'arrête à $a_1 = \dfrac{1}{2}a_0,$

(on conseille de faire figurer non seulement le dernier terme du produit, mais aussi l'avant-dernier, pour mieux comprendre les simplifications qui se généralisent au début et à la fin) ce qui donne après simplification :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+2}a_0,$$
c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_n = \dfrac{a_0}{n+1}$ (en fait, l'expression vaut aussi pour $n = 0$: le contraire permet parfois de détecter des erreurs dans les simplifications).

Si vous avez du mal à faire ces injections successives pour une valeur de n arbitraire : faites-le pour $n = 1$, $n = 2$, etc., afin de voir quelle allure ont les premiers termes de la suite, *sans remplacer les produits par leurs valeurs exactes* (sinon il est impossible de reconnaître la forme générale de a_n). Ainsi, on n'écrira pas que $5 \times 3 \times 1$ égale 15, sinon on ne reconnaîtra plus le produit des entiers impairs, et on ne pourra pas le généraliser. Exemple ici :
$$a_3 = \frac{3}{4}a_2 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}a_1 = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{1}{\cancel{2}}a_0 = \frac{1}{4}a_0.$$

Nous avons bien dit ci-dessus que ce raisonnement où l'on réinjecte « à la main » est à faire AU BROUILLON. Il n'est pas assez rigoureux pour être apprécié du correcteur tatillon, surtout si vous manquez beaucoup de rigueur en d'autres endroits de la copie, **et il n'est pas acceptable si la réponse attendue est déjà dans l'énoncé** (dans ces cas-là, on est plus exigeant sur la rigueur). Dans ce cas, pour formaliser le raisonnement : **raisonnez par récurrence**. Ci-dessus, la proposition à démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ serait P_n : « $a_n = \dfrac{a_0}{n+1}$ ». L'initialisation est immédiate. Ensuite, pour l'hérédité, on suppose la proposition vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, et on a :

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} a_n \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{n+1}{n+2} \times \frac{a_0}{n+1} = \frac{a_0}{n+2},$$

et on reconnaît là P_{n+1}, ce qui clôt l'hérédité. Par récurrence, on a le résultat voulu pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si la récurrence ne marche clairement pas : **vous avez fait une erreur dans la conjecture au brouillon**. Retravaillez-la, en particulier en regardant ce qui coince pour de petites valeurs de n !

De même, pour la seconde suite, on trouve AU BROUILLON :

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1} a_n = \frac{n+1}{2n+1} \times \frac{n}{2n-1} a_{n-1} = \cdots = \frac{n+1}{2n+1} \times \frac{n}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} a_0,$$

car $a_n = \dfrac{n}{2n-1} a_{n-1}$

on s'arrête à $a_1 = \dfrac{1}{1} a_0,$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1) \times n \times \cdots \times 2 \times 1}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 1} a_0.$$

Par rapport à la suite précédente, il apparaît une difficulté inédite : **comment simplifier cette cochonceté ?** C'est en général le produit des entiers pairs ou des entiers impairs qu'il faudra simplifier, dans ces cas de figure.

2.2 ✓ Simplifier le produit des entiers pairs

C'est le cas favorable : par définition d'un entier pair, on peut factoriser chaque terme du produit par 2, et faire ainsi apparaître une jolie factorielle. De manière informelle, on l'écrirait ainsi :

$$(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2 = (2 \cdot n) \times (2 \cdot (n-1)) \times \cdots \times (2 \cdot 2) \times (2 \cdot 1) = 2^n \cdot n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = 2^n n!.$$

De manière formelle, c'est encore plus rapide en plus d'être rigoureux :

$$\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$$

(notez bien que quand on « sort 2 du produit », on n'obtient pas 2 : il est mis en facteur autant de fois qu'il n'y a de termes dans le produit !). En définitive, retenez comment démontrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} (2k) = (2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2 = 2^n n!.$$

Il est HORS DE QUESTION de retenir le résultat brut, sachez le redémontrer.

2.3 ✓ Simplifier le produit des entiers impairs

C'est plus délicat que dans le cas ci-dessus, parce qu'il n'apparaît pas de factorisation dans chaque terme du produit (c'est impossible : songez qu'il apparaît des nombres premiers dans le produit). L'idée est alors de rajouter « ce qu'il manque » pour avoir une jolie factorielle : tous les termes pairs. On le fait en multipliant et divisant par chaque terme pair. De manière informelle, on l'écrirait ainsi :

$$\begin{aligned}(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3 \times 1 &= \frac{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.\end{aligned}$$

Notez qu'il réapparaît la méthode de simplification du produit des entiers pairs, au dénominateur. De manière formelle :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ impair}}}^{2n+1}\ell\cdot\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\text{ pair}}}^{2n+1}\ell}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2n+1}\ell}{2^n n!}=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

(attention à ne pas faire accidentellement commencer le produit sur les entiers pairs à $k=0$: sinon, vous multipliez par zéro et le produit est nul !). Selon les besoins, il peut être préférable d'aussi ajouter $2n+2$: cela dépend des simplifications qu'impliquerait ce rajout. En définitive, retenez comment démontrer que :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 3\times 1=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Il est HORS DE QUESTION de retenir le résultat brut, sachez le redémontrer.

Ainsi, la suite étudiée ci-dessus se simplifie :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)\times n\times\cdots\times 2\times 1}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 1}a_0=\frac{2^n(n+1)!n!}{(2n+1)!}a_0=\frac{2^n}{\binom{2n+1}{n}}a_0.$$

2.4 Autres approches pour obtenir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ explicitement à partir d'une relation de récurrence

À l'aide des sommes et produits télescopiques, votre serviteur vous propose des méthodes pour obtenir des expressions explicites de suites vérifiant des relations de récurrence d'ordre 1 simples (mais pas trop : si on reconnaît immédiatement une suite géométrique ou arithmétique, à quoi bon s'embêter ?).

2.4.1 Le type de relation le plus souvent croisé : $a_{n+1}=\alpha_n a_n$.

Dans ce cas, vous divisez par a_k, et avez :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}=\alpha_k.$$

Multipliez ces relations pour tout k entre 0 et $n-1$, et vous en déduisez :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\prod_{k=0}^{n-1}\alpha_k.$$

L'intérêt de la manœuvre est que le produit est *télescopique.* Si l'on raisonnait à la main, on écrirait :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}}\times\frac{\cancel{a_{n-1}}}{\cancel{a_{n-2}}}\times\cdots\times\frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_1}}\times\frac{\cancel{a_1}}{a_0}=\frac{a_n}{a_0}.$$

On le montre formellement comme dans le cas des sommes télescopiques : en écrivant $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}a_{k+1}}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}a_k}$, et en faisant le changement d'indice $k'=k+1$ dans le produit du numérateur : ainsi on constate que tous les termes du produit sont les mêmes au numérateur et au dénominateur, sauf les termes extrémaux.

La relation ci-dessus donne donc directement : $\frac{a_n}{a_0}=\prod\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k$, et : $a_n=a_0\prod\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k$. Il reste à simplifier ce produit si c'est possible.

Exemple 3. Si l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+1} a_n$, alors cette méthode donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+2}{2k+1} \iff \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)},$$

et vous simplifiez le produit des entiers pairs au numérateur, des entiers impairs au dénominateur, en suivant ce qui fut expliqué plus haut ; vous obtenez alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} a_0.$$

Cette expression reste valable pour $n = 0$.

Exemple 4. On reprend l'exemple de la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ qui vérifiait $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec cette méthode :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} \iff \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2},$$

et le produit du membre de droite est aussi télescopique, donc égal à $\frac{1}{n+1}$. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = \frac{a_0}{n+1}.$$

Cette expression reste valable pour $n = 0$.

Remarque. Pour que la méthode soit rigoureuse, encore faut-il justifier que $a_n \neq 0$ au moment de diviser. C'est vrai pourvu que $\alpha_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le vérifier sérieusement : ce n'est pas clair si α_n est de la forme $\alpha_n = n - k$ avec k un entier fixé, par exemple) et $a_0 \neq 0$. Dans ce cas, il ne me semble pas choquant d'écrire « on a $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une récurrence immédiate », avant de procéder à la division.

Les autres relations qui suivent sont plus rares : elles s'obtiennent généralement (dans un contexte de résolution des équations différentielles avec les séries entières) lorsque nous avons un second membre non nul. Elles sont donc moins essentielles à maîtriser *dans ce contexte*. Vous pouvez néanmoins les rencontrer en d'autres situations mathématiques (relations de récurrence obtenues par intégration par parties).

2.4.2 Relation de la forme : $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta_n$.

C'est « presque » géométrique, ce qui suggère que $a_n \approx \alpha^n a_0$ et $\dfrac{a_n}{\alpha^n} \approx$ constante (attention au fait que ce ne soit qu'une heuristique, cela n'a rien de rigoureux, notamment si β_n est « gros »). Ceci incite à diviser la relation par α^{n+1} pour obtenir la suite $\left(\dfrac{a_n}{\alpha^n}\right)_{n \geqslant 0}$ plus simple, et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{\beta_n}{\alpha^{n+1}}.$$

En écrivant cette relation pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis en la sommant de $k = 0$ à $k = n-1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{\alpha^{k+1}}.$$

Or la somme de gauche est télescopique, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \ \frac{a_n}{\alpha^n} - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{\alpha^{k+1}}, \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \ a_n = \alpha^n \left(a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{\alpha^{k+1}} \right)$$

À voir ensuite, selon les circonstances, si l'on peut simplifier la somme du membre de de droite.

Exemple 5. Si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^n n$, alors cette méthode donne, après division par 2^{k+1} (on écrit directement avec k) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{a_k}{2^k} = \frac{k}{2}.$$

Alors, en sommant cette relation de $k = 0$ à $k = n-1$, et en utilisant le fait que la somme obtenue à gauche soit télescopique, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \frac{a_n}{2^n} - a_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k, \quad \text{et donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ a_n = 2^n\left(a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = 2^n\left(a_0 + \frac{(n-1)n}{4}\right).$$

2.4.3 Relation de la forme : $a_{n+1} = (n+1)a_n + \beta_n$.

Ne parlons certainement pas de suite géométrique de raison $n+1$ ici. On s'inspire quand même de ce qui précède : si l'on divise par $(n+1)!$, alors on obtient, du fait que $\frac{(n+1)!}{n+1} = n!$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n!} = \frac{\beta_n}{(n+1)!}.$$

En écrivant cette relation pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis en la sommant de $k = 0$ à $k = n-1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{(k+1)!} - \frac{a_k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\beta_k}{(k+1)!}.$$

Or la somme de gauche est télescopique, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{a_n}{n!} - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\beta_k}{(k+1)!},$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_n = n!\left(a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\beta_k}{(k+1)!}\right)$.

2.4.4 Relation de la forme : $a_{n+1} = \alpha(n+1)a_n + \beta_n$.

Nous n'avons peur de rien, et combinons les deux approches précédentes, en divisant par $\alpha^{n+1}(n+1)!$.

Exemple 6. Si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -(n+1)a_n + 1$, alors cette méthode donne, après multiplication par $\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$ (on écrit directement avec k au lieu de n) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (-1)^{k+1}\frac{a_{k+1}}{(k+1)!} - (-1)^k\frac{a_k}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Alors, en sommant cette relation de $k = 0$ à $k = n-1$, et en utilisant le fait que la somme de gauche soit télescopique :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (-1)^n\frac{a_n}{n!} - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!},$$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_n = (-1)^n n!\left(a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$.

On peut généraliser l'approche à d'autres types de relation de récurrence :

Exercice 3. Soit $\ell \in \mathbb{N}$, et soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant une relation de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \alpha(n+1)^\ell a_n + \beta_n.$$

Exprimer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de α et d'une somme dont le terme général contient β_k.

2.5 Lorsque la relation est récurrente d'ordre 2, exemple : $a_{n+2} = \beta_n a_n$.

C'est le seul type de relation d'ordre 2 qu'on peut exiger de vous, en dehors du cas à coefficients constants. Autrement, c'est trop difficile pour en déduire l'expression explicite de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ sans indication.

Si vous l'explicitez pour n petit, vous voyez qu'en réitérant la relation, vous n'obtenez pas la même forme explicite :

$$\begin{array}{ll} a_2 = \beta_0 a_0, & a_3 = \beta_1 a_1, \\ a_4 = \beta_2 a_2 = \beta_2 \times \beta_0 a_0, & a_5 = \beta_3 a_3 = \beta_3 \times \beta_1 a_1, \\ a_6 = \beta_4 a_4 = \beta_4 \times \beta_2 \times \beta_0 a_0, & a_7 = \beta_5 a_5 = \beta_5 \times \beta_3 \times \beta_1 a_1, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

On tombe tantôt sur a_0 en bout de course, et tantôt sur a_1. On observe que cela dépend de la **parité** de n. On comprend donc qu'il faut faire une distinction de cas.

On traite d'une part le cas pair ; pour écrire les choses convenablement, **on pose** $n = 2p$ **avec** $p \in \mathbb{N}$, et la relation de récurrence devient :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \beta_{2p} a_{2p}.$$

On voit que $(a_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 1 : on peut la réitérer de la même manière que pour toutes les suites traitées ci-dessus pour en déduire une expression explicite de a_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On traite d'autre part le cas impair, **en posant** $n = 2p + 1$ **avec** $p \in \mathbb{N}$, et la relation de récurrence devient :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = \beta_{2p+1} a_{2p+1}.$$

Même constat : la suite $(a_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est récurrente d'ordre 1 et se traite comme tous les cas ci-dessus.

Table des matières

Table des figures