Méthodes (PSI) – Séries numériques

✓ Étudier des suites en passant par des séries télescopiques

On rappelle le lien suite-série, qui permet d'exprimer toute suite à l'aide d'une somme partielle de série télescopique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

Ce lien permet d'utiliser les théorèmes sur les séries afin d'en déduire des résultats sur les suites. C'est ainsi qu'on a montré dans le cours que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge. C'est intéressant si $u_{k+1} - u_k$ a une expression plus simple que u_n (au point qu'on arrive à avoir un équivalent de $u_{k+1} - u_k$ alors qu'on n'y parvenait pas avec u_n).

Les prochaines sous-sections développement quel type de suites rentrent dans cette catégorie (avoir $u_{k+1} - u_k$ plus simple que u_n), de sorte que le lien suite-série soit pertinent pour étudier leur convergence.

1 Suites définies à l'aide de sommes partielles

C'est le cas le plus classique. Si l'on a : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \bigstar + \text{etc.}$, où la somme n'est pas simplifiable, alors $u_{n+1} - u_n$ élimine la somme en ne conservant que son terme correspondant à $k = n + 1$: cela nous ramène en principe à une étude plus simple.

Exemple 1. On sait démontrer par une comparaison série-intégrale que l'on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. Voyons comment le lien suite-série permet d'affiner la comparaison entre cette somme et cet équivalent asymptotique. Nous avons déjà expliqué ci-dessus pourquoi c'est pertinent. Posons donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$, et calculons $u_{n+1} - u_n$ pour tout n suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{2n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) \\
&= -\frac{1}{4n^{3/2}} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}$$

donc : $u_n - u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^{3/2}} > 0$. Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{4n^{3/2}}$ converge donc, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série télescopique $\sum_{n \geqslant 1} (u_n - u_{n+1})$ converge aussi. Par le lien suite-série, la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge : cela n'avait rien d'évident ! On a donc montré l'existence de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \ell + \underset{n \to +\infty}{o}(1).$$

C'est plus précis que l'équivalent dont on était parti.

Exercice 1.

1. Démontrer qu'on a effectivement : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.
2. Compléter les détails qui ont été omis.

2 Suites définies à l'aide de produits, puissances, factorielles, etc.

L'utilisation du lien suite-série n'a *a priori* pas lieu de fonctionner si u_n ne s'exprime pas à l'aide de sommes, mais à l'aide de produits. Pas grave : on se souvient que l'on connaît une fonction qui transforme les produits en somme, et c'est à ces sommes-là qu'on applique le principe du lien suite-série.

C'est-à-dire, si $u_n = \prod_{k=0}^{n} \bigstar \times \text{etc.}$ alors, sous réserve que tout soit strictement positif, on pose : $v_n = \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(\bigstar) + \ln(\text{etc.})$, et on étudie $(v_n)_{n\geqslant 0}$ grâce au lien suite-série. C'est pertinent pour la même raison que dans le paragraphe ci-dessus : on simplifie la somme en faisant la différence $v_{n+1} - v_n$, et on a donc bon espoir de se retrouver avec une quantité facile à étudier asymptotiquement.

Exercice 2. Utiliser le lien suite-série pour démontrer la convergence de la suite $\left(\dfrac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}\right)_{n\geqslant 1}$.

Table des matières

Table des figures