Méthodes (MP) – Séries numériques

✓ Étudier des suites en passant par des séries télescopiques

On rappelle le lien suite-série, qui permet d'exprimer toute suite à l'aide d'une somme partielle de série télescopique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k).$$

Ce lien permet d'utiliser les théorèmes sur les séries afin d'en déduire des résultats sur les suites. C'est ainsi qu'on a montré dans le cours que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge. Dans le cas où $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ, on a une autre écriture potentiellement plus intéressante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k).$$

Pour comprendre l'intérêt de cette écriture alternative, notons que grâce au théorème de sommation des relations de comparaison (qui vaut pour les *restes* si l'on est dans le cas convergent), un équivalent asymptotique quand $n \to +\infty$ de $u_{n+1} - u_n$ en entraîne un pour u_n. Par conséquent, si $u_{k+1} - u_k$ a une expression plus simple que u_n (au point qu'on arrive à avoir un équivalent de $u_{k+1} - u_k$ alors qu'on n'y parvenait pas avec u_n), cette relation permet d'obtenir un développement asymptotique de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Les prochaines sous-sections développent quel type de suites rentrent dans cette catégorie (avoir $u_{k+1} - u_k$ plus simple que u_n), de sorte que le lien suite-série soit pertinent pour étudier leur convergence, obtenir un développement asymptotique, etc.

1 Suites définies à l'aide de sommes partielles

C'est le cas le plus classique. Si l'on a : $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \bigstar + \text{etc.}$, où la somme n'est pas simplifiable, alors $u_{n+1} - u_n$ élimine la somme en ne conservant que son terme correspondant à $k = n+1$: cela nous ramène en principe à une étude plus simple.

Exemple 1. On sait démontrer de diverses façons, par exemple par une comparaison série-intégrale ou *via* les sommes de Riemann, que l'on a : $\sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{3/2}$. Voyons comment le lien suite-série permet d'affiner la comparaison entre cette somme et cet équivalent asymptotique. Nous avons déjà expliqué ci-dessus pourquoi c'est pertinent. Posons donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt{k} - \frac{2}{3}n^{3/2}$, et calculons $u_{n+1} - u_n$ pour tout n suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n+1} - \frac{2}{3}\left((n+1)^{3/2} - n^{3/2}\right) \\
&= \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{2n^{3/2}}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

donc : $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{n}} > 0$. Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{4\sqrt{n}}$ diverge donc, par le théorème de sommation des équivalents, on a :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Ce dernier équivalent peut lui aussi s'obtenir par une comparaison série-intégrale. On a donc montré :

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} = \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{\sqrt{n}}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{n}\right).$$

Pour affiner ce développement, il suffit de poursuivre, et je vais le faire afin d'illustrer une situation où l'on utilise la sommation des équivalents entre restes de séries convergentes. Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \dfrac{\sqrt{n}}{2}$. Au voisinage de $+\infty$, on a, en poussant un cran plus loin le développement de $u_{n+1} - u_n$ ci-dessus (si on avait anticipé qu'on allait chercher d'autres termes du développement asymptotique, on l'aurait fait dès le début à un ordre plus élevé) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} &= \frac{1}{4\sqrt{n}} - \frac{1}{12 n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{48 n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

donc : $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{48 n^{3/2}} < 0$. Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{48 n^{3/2}}$ converge, donc par le théorème de comparaison la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n+1})$ converge aussi, et par le lien suite-série il en est de même de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$: c'est la première information. Mieux : si l'on note ℓ cette limite alors, par le théorème de sommation des relations de comparaison on a :

$$v_n - \ell = \sum_{k=n}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{48 k^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{24\sqrt{n}}.$$

En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{\sqrt{n}}{2} + \ell + \frac{1}{24\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

On peut continuer ainsi *ad vitam æternam.*

Exercice 1.

1. Démontrer qu'on a effectivement : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3} n^{3/2}$.
2. Compléter les détails qui ont été omis.
3. Obtenir les termes suivants du développement asymptotique. S'arrêter au moment d'être lassé.
4. Généraliser, en remplaçant $\sqrt{k}$ par k^α avec $\alpha > -1$ (pourquoi cette inégalité ?).

2 Suites définies à l'aide de produits, puissances, factorielles, etc.

L'utilisation du lien suite-série n'a *a priori* pas lieu de fonctionner si u_n ne s'exprime pas à l'aide de sommes, mais à l'aide de produits. Pas grave : on se souvient que l'on connaît une fonction qui transforme les produits en somme, et c'est à ces sommes-là qu'on applique le principe du lien suite-série.

C'est-à-dire, si $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \bigstar \times$ etc. alors, sous réserve que tout soit strictement positif, on pose : $v_n = \ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(\bigstar) + \ln(\text{etc.})$, et on étudie $(v_n)_{n\geqslant 0}$ grâce au lien suite-série. C'est pertinent pour la même raison que dans le paragraphe ci-dessus : on simplifie la somme en faisant la différence $v_{n+1} - v_n$, et on a donc bon espoir de se retrouver avec une quantité facile à étudier asymptotiquement.

On fera cependant attention au fait que, pour revenir à $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ensuite, il faut composer avec l'exponentielle, ce qui n'est en général pas licite avec des équivalents asymptotiques. En revanche, si l'on a un développement asymptotique se terminant par un $\underset{n\to+\infty}{o}(1)$, alors l'exponentielle de ce terme tend vers $e^0 = 1$ et ce n'est plus gênant.

Notez que les puissances et les factorielles étant aussi définis comme des produits, ils font partie des suites simplifiables par cette méthode. Il est très classique de démontrer une partie de la formule de Stirling en montrant que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}\right)_{n\geqslant 1}$ converge grâce au lien suite-série appliqué à la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$.

Exemple 2. On cherche un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$, de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_n = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k}$. Conformément à ce qui précède, il vaut mieux passer par :

$$(\ln(u_n))_{n\geqslant 1} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)\right)_{n\geqslant 1}$$

et utiliser le lien suite-série. Mieux : si on essaie d'étudier $\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$, on risque d'être contrarié par les $\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n}$ qui ne se simplifient pas, donc on va plutôt étudier $(v_n)_{n\geqslant 1} = (n\ln(u_n))_{n\geqslant 1} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)\right)_{n\geqslant 1}$.

Faisons. Une comparaison série-intégrale permet de montrer qu'on a : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2\ln(n)}{2}$. Simplifions la différence en suivant une démarche analogue à celle de l'exemple 1. Pour tout n au voisinage de $+\infty$: ← page 1

$$\begin{aligned}\left(v_{n+1} - \frac{(n+1)^2\ln(n+1)}{2}\right) - \left(v_n - \frac{n^2\ln(n)}{2}\right) &= (n+1)\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - (2n+1)\ln(n+1)\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{n^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2} < 0.\end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2}$ diverge grossièrement. Par le théorème de sommation des équivalents, on a donc :

$$v_n - \frac{n^2\ln(n)}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\left(\left(v_{k+1} - \frac{(k+1)^2\ln(k+1)}{2}\right) - \left(v_k - \frac{k^2\ln(k)}{2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^2}{4}.$$

Cela permet d'en déduire un développement asymptotique de $\ln(u_n)$ (et un équivalent), mais pas un équivalent de u_n, parce qu'on ne saurait rien faire du terme $e^{\underset{n\to+\infty}{o}(n^2)}$. Il suffit de poursuivre, en appliquant le lien suite-série à $w_n = v_n - \dfrac{n^2\ln(n)}{2} + \dfrac{n^2}{4}$, et ainsi de suite. On a, en reprenant partiellement le calcul ci-dessus :

$$\begin{aligned}w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{n^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{2n+1}{4}\\ &= \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{2n+1}{4}\\ &= \frac{\ln(n+1)}{2} + \frac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2} > 0.\end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln(n)$ diverge grossièrement, donc par le théorème de sommation des équivalents :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\ln(n)}{2}.$$

Il reste à appliquer cette méthode une dernière fois. Faites-le. On obtient au bout du compte :

$$v_n = \frac{n^2\ln(n)}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{n\ln(n)}{2} + \underset{n\to+\infty}{O}(1),$$

et donc :

$$\ln(u_n) = \frac{(n+1)\ln(n)}{2} - \frac{n}{4} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce dont on déduit, comme $e^{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$:

$$u_n = e^{\frac{(n+1)\ln(n)}{2} - \frac{n}{4} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)} = n^{\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{n}{4}} e^{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{n}{4}}.$$

Exercice 2. Compléter les détails qui ont été omis :

1. Montrer : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2\ln(n)}{2}$.
2. Montrer : $\dfrac{1}{2}\ln(n+1) - \dfrac{n^2}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{n}{2}$.
3. Montrer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$, et : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.
4. Montrer : $v_n = \dfrac{n^2\ln(n)}{2} - \dfrac{n^2}{4} + \dfrac{n\ln(n)}{2} + \underset{n\to+\infty}{O}(1)$. Courage !

Exercice 3. Utiliser le lien suite-série pour démontrer la convergence de la suite $\left(\dfrac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}{n!}\right)_{n\geqslant 1}$.

3 Suites vérifiant : $u_{n+1} = f(u_n)$, et équivalents asymptotiques

De manière assez surprenante (je crois ?), le lien suite-série permet également d'obtenir des équivalents asymptotiques de suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant une relation de récurrence d'ordre 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$, du moins lorsque la fonction f est suffisamment régulière pour permettre des développements limités en 0, et lorsque la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (qui doit donc être point fixe de f).

La stratégie est à chaque fois de faire un développement asymptotique de $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = f(u_n)^\alpha - u_n^\alpha$, avec α un réel à déterminer ultérieurement. C'est possible par composition, vu que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si on arrive à une égalité du type :

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = cu_n^{\alpha+k} + \text{termes négligeables}$$

avec $c \neq 0$, alors on pose $\alpha = -k$, de sorte que : $u_{n+1}^{-k} - u_n^{-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} c$. Par le lien suite-série et le théorème de sommation des relations de comparaison (ou son corollaire le théorème de Cesàro), on en déduit un équivalent quand $n \to +\infty$ de u_n^{-k}, et par suite de u_n.

Exemple 3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. Vous savez démontrer grâce aux méthodes de 1re année que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Appliquons la méthode ci-dessus pour trouver un équivalent asymptotique de cette suite. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et n au voisinage de $+\infty$. Alors u_n est au voisinage de 0, ce qui permet de faire un développement asymptotique de $\arctan(u_n)$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \arctan(u_n)^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^3\right)\right)^\alpha - u_n^\alpha &= u_n^\alpha\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^2\right)\right)^\alpha - u_n^\alpha \\
&= u_n^\alpha\left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^2\right)\right) - u_n^\alpha \\
&= -\frac{\alpha}{3}u_n^{2+\alpha} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^{2+\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Prenons $\alpha = -2$. Le développement ci-dessus devient : $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{2}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$. Par le théorème de Cesàro, on a donc : $u_n^{-2} - u_0^{-2} = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{3}$. Comme u_0^{-2} est négligeable devant $\frac{2n}{3}$, il en résulte aisément :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2n}}.$$

Exercice 4. Détailler ce qui a été omis ci-dessus : démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Table des matières

Table des figures