Méthodes (MP) – Séries numériques
Calculer la somme d'une série convergente

Lorsqu'on vous demande de calculer des sommes de séries convergentes explicitement, pour le moment, nous n'avons pas d'autre moyen de procéder qu'en utilisant les deux types de sommes du cours qu'on sait expliciter : les sommes télescopiques, géométriques et exponentielles. Le second cas étant relativement facile à reconnaître, nous le mettons de côté. Il y a deux types de sommes qui ne sont pas visiblement télescopiques, mais qui s'y ramènent.

1 ✓ Sommes dont le terme général est une fraction rationnelle

Il s'agit de sommes telles que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{n^3-2n+4}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

ou plus généralement de la forme $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ (si elle existe) avec P et Q des polynômes. La méthode, pour les calculer, est de *décomposer en éléments simples* $\dfrac{P}{Q}$, ramenant le calcul de $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} \frac{P(n)}{Q(n)}$ au calcul d'une combinaison linéaire de sommes de la forme :

$$\sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{(an+b)^\alpha}, \quad \text{ou} \quad \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{(an^2+bn+c)^\beta}$$

(on écrit des sommes partielles pour éviter de manipuler des séries divergentes à cause des termes $\dfrac{1}{an+b}$). Dans le meilleur des cas, des télescopages apparaissent (il est parfois nécessaire de faire un changement d'indice de sommation), permettant d'obtenir une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} \frac{P(n)}{Q(n)}$. On prend ensuite $N \to +\infty$ pour en déduire $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$.

Plus synthétiquement :

Pour calculer une somme de la forme $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$

(1) On décompose en éléments simples $\dfrac{P}{Q}$, et on injecte cette décomposition dans $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} \frac{P(n)}{Q(n)}$ (**et non $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$, attention**).

(2) On sépare en plusieurs sommes, et on fait des changements d'indices de sorte à avoir le même terme général partout.

(3) On enlève les termes « en trop » de chaque somme, afin de pouvoir simplifier.

(4) On prend la limite quand $N \to +\infty$.

Les étapes 2 à 4 sont inutiles s'il apparaît d'emblée des sommes télescopiques.

Exemple 1. On a : $\dfrac{1}{X^2-1} = \dfrac{1}{(X-1)(X+1)} \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{X+1}\right)$. Donc, pour $N \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1}\right) \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \sum_{n'=4}^{N+2} \frac{1}{n'-1}\right) && (n'-1 = n+1 \iff n' = n+2) \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) && \text{(n' est une variable muette, il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \underset{N\to+\infty}{o}(1)\right),
\end{aligned}$$

ce dont on déduit : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} \overset{(4)}{=} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$.

Exercice 1. Imiter cette méthode pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n}$.

Néanmoins cette technique n'est pas infaillible. Par exemple, vous ne parviendrez pas à calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$. Voir la section 5 pour un complément de cette méthode.

2 ✓ Sommes dont le terme général est le logarithme d'une fraction rationnelle

Comme le logarithme vérifie : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$, il y a fort à parier qu'en écrivant l'argument du logarithme comme un quotient, puis en utilisant cette propriété, il apparaisse un télescopage (ou presque).

Exemple 2. Pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N} (\ln(n-1) - \ln(n)) = -\ln(N).$$

3 ✓ Sommes de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$, où P est polynomiale

Sans $P(n)$ dans le terme général, on reconnaît la somme exponentielle : $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Il s'avère qu'une somme de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$ peut toujours s'y ramener ! En effet, remarquons d'abord que pour les polynômes de la forme :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad P_j = \prod_{i=0}^{j-1} (X-i) = X(X-1)\cdots(X-j+1)$$

(on a donc $P_0 = 1$ par convention sur un produit vide), la réduction à une somme exponentielle est triviale, du fait que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_j(n)}{n!} x^n = \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n(n-1)\cdots(n-j+1)(n-j)!} x^n = \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-j)!} = \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{n'+j}}{n'!} = x^j e^x.$$

Or il s'avère que la famille $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{R}[X]$ (pourquoi ?), donc n'importe quel polynôme peut s'exprimer à l'aide d'iceux.

Ainsi, pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}x^n$ avec P un polynôme réel de degré k, on détermine des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ tels que : $P = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j P_j$, et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{P_j(n)}{n!}x^n = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_j(n)}{n!}x^n = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j e^x,$$

et c'est gagné.

Exemple 3. Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (nous vous laissons vérifier la convergence, elle est facile... et peut d'ailleurs découler du calcul qui suit si l'on rédige bien). On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^{n-1} \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= (x^2+x)e^x.
\end{aligned}$$

Déterminer les coefficients α_j. Plutôt que de passer par une résolution laborieuse de système linéaire après identification des coefficients, vous pouvez déterminer les coefficients α_j de la relation : $P = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j P_j$, par des évaluations bien choisies. On remarque en effet que pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le polynôme P_j admet pour racines tous les entiers de 0 à $j-1$ (et P_0 n'admet pas de racine puisque c'est le polynôme constant égal à 1). Ainsi, en évaluant la relation en 0, la relation ci-dessus devient : $P(0) = \alpha_0$. On a immédiatement déterminé α_0. Évaluer en 1 donne ensuite : $P(1) = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(1) = \alpha_0 + \alpha_1$, ce qui permet d'exprimer α_1 en fonction de $P(1)$ et de α_0 qui a déjà été déterminé. Et ainsi de suite.

Le coefficient α_k peut s'obtenir directement en comparant les coefficients dominants de P et de P_k.

Exercice 2. Déterminer rapidement des coefficients a, b et c tels que : $2X^2 + X + 41 = a + bX + cX(X-1)$.

Si l'on n'a pas $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}x^n$, mais $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}x^{2n}$, ou $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}(-1)^n x^n$, ou plus généralement une somme de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}a^n x^{bn},$$

il suffit de regrouper toutes les exponentiations, afin d'avoir quelque chose de la forme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}\bigstar^n$, et l'on se ramène à la situation ci-dessus.

Exemple 4. Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on vous laisse justifier la convergence, qui est triviale en utilisant la série exponentielle). On se ramène à la série exponentielle en écrivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = e^{-x^2}.$$

4 Sommes indexées par une classe de congruence

Si vous savez calculer une somme de la forme : $\sum_{n\in\bigstar} u_n$, et qu'un exercice vous demande de calculer :

$$\sum_{k\in\bigstar} u_{2k}, \quad \sum_{k\in\bigstar} u_{2k+1}, \quad \sum_{k\in\bigstar} u_{3k+1}, \quad \sum_{n\in\bigstar} u_{4k+3}, \quad \text{etc.},$$

notons que ces sommes sont en fait « extraites » de la somme $\sum_{n\in\bigstar} u_n$, au sens où on a restreint l'indexation à un ensemble d'entiers n vérifiant une certaine relation de congruence. Par exemple, les sommes ci-dessus peuvent se réécrire alternativement ainsi :

$$\sum_{\substack{n\in\clubsuit\\ n \text{ pair}}} u_n, \quad \sum_{\substack{n\in\clubsuit\\ n \text{ impair}}} u_n, \quad \sum_{\substack{n\in\clubsuit\\ n\equiv 1[3]}} u_n, \quad \sum_{\substack{n\in\clubsuit\\ n\equiv 3[4]}} u_n.$$

Plus généralement, on consacre cette partie au calcul de sommes de la forme $\sum_{\substack{n\in\clubsuit\\ n\equiv a[b]}} u_n$. Il est *parfois* possible de les exprimer à l'aide de $\sum_{n\in\bigstar} u_n$, vous ramenant à une somme que vous savez calculer. C'est ce qu'on illustre ci-dessous.

4.1 Cas d'une somme indexée par des entiers pairs, par des entiers impairs

Si l'on vous demande de calculer une somme indexée par des entiers impairs (ou pairs, mais le premier cas cité est plus fréquent car plus problématique ; les exemples 5 et 8 permettent de comprendre pourquoi), → page 9 regardez si les termes pairs et les termes impairs vérifient des relations particulières avec le terme général (∗), puis utilisez éventuellement la relation importante :

$$\sum_{n \text{ pair}} u_n + \sum_{n \text{ impair}} u_n = \sum_n u_n. \qquad (\dagger)$$

Ce conseil peut être particulièrement efficace si l'on est en présence d'un $(-1)^n$ (son signe dépend de la parité), comme on le voit dans l'exemple 8.

Attention à d'abord utiliser cette relation avec les sommes partielles, car elle est parfois fausse pour les sommes avec une infinité de termes, comme le montre le calcul suivant (faux) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}.$$

Vu que la série harmonique diverge, il apparaît la différence $+\infty - \infty$. C'est problématique.

Le recours aux sommes partielles est illustré dans l'exemple 8. → page 9

Néanmoins, lorsqu'il y a CONVERGENCE ABSOLUE (c'est-à-dire lorsque la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable), ou lorsque les termes sont tous POSITIFS, le théorème de sommation par paquets permet d'obtenir directement cette scission en deux sommes : prendre les paquets $I_0 = 2\mathbb{N}$ et $I_1 = 2\mathbb{N}+1$.

Exemple 5. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Voyons comment en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs (et convergente par ailleurs), donc par le théorème de sommation par paquets on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \overset{(\dagger)}{=} \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}.$$

La lettre ℓ est une variable muette et il ne coûte rien de la remplacer par n. Or : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\overset{(*)}{=}\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
On en déduit : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 3. On admet : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ avec la méthode ci-dessus.

Parfois la relation (†) est insuffisante et nous avons aussi besoin de connaître $\displaystyle\sum_{n \text{ pair}} u_n + \sum_{n \text{ impair}} u_n$ pour aller plus loin. Cela rentre cependant dans le cadre de la section suivante et je n'en parle donc pas davantage ici.

4.2 ☢ Autres congruences : usage d'une « formule d'orthogonalité »

La stratégie développée ici permet de calculer des sommes de la forme $\displaystyle\sum_{\substack{n\in\clubsuit\\ n\equiv a[b]}} u_n$, à la condition nécessaire que vous sachiez calculer $\displaystyle\sum_{n} u_n z^n$ pour suffisamment de valeurs de z COMPLEXES. C'est le cas de plusieurs sommes usuelles : la somme exponentielle, géométrique, la formule du binôme. Avec un peu plus de travail, on peut en avoir d'autres *via* dérivation ou intégration de sommes usuelles.

La clé, qui vous permet d'exprimer la première somme en fonction de l'autre, est ce que j'appelle (mais l'idée ne vient pas de moi : cela vient de la théorie des caractères) la « formule d'orthogonalité » suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} e^{\frac{2i\pi k}{b}(n-a)}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad n\equiv a \bmod b,\\ 0 & \text{si}\quad n\not\equiv a \bmod b.\end{cases}$$

Exercice 4. Démontrer cette formule.

Autrement dit : l'application $n\mapsto \displaystyle\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} e^{\frac{2i\pi k}{b}(n-a)}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers congrus à a modulo b. Je la note $\mathbb{1}$ ci-dessous pour abréger. Cette observation permet d'écrire :

$$\sum_{\substack{n\in\clubsuit\\ n\equiv a[b]}} u_n=\sum_{n\in\clubsuit}\mathbb{1}(n)u_n=\sum_{n\in\clubsuit}\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1}e^{\frac{2i\pi k}{b}(n-a)}u_n=\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1}e^{-\frac{2i\pi ka}{b}}\sum_{n\in\clubsuit}u_n\left(e^{\frac{2i\pi k}{b}}\right)^n.$$

En conclusion : si l'on sait calculer $\displaystyle\sum_{n\in\clubsuit} u_n z^n$ pour tout z égal à une racine b^{e} de l'unité, alors le membre de droite n'a plus aucun mystère pour nous et on en déduit la valeur de $\displaystyle\sum_{\substack{n\in\clubsuit\\ n\equiv a[b]}} u_n$.

Bien entendu, il faut savoir démontrer la formule d'orthogonalité utilisée (nul besoin de le faire dans le cas général : seulement dans celui nécessaire au calcul de notre somme). Je ne le fais pas dans les exemples ci-dessous et c'est au lecteur de s'en charger.

Exemple 6. Calculons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n+1)!}$. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1+i^{n-1}+i^{2(n-1)}+i^{3(n-1)}}{4}=\begin{cases}1 & \text{si}\quad n\equiv 1 \bmod 4,\\ 0 & \text{si}\quad n\not\equiv 1 \bmod 4.\end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n+1)!} = \sum_{\substack{n=0\\ n\equiv 1[4]}}^{+\infty}\frac{1}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+i^{n-1}+i^{2(n-1)}+i^{3(n-1)}}{4}\frac{1}{n!}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\\ &= \frac{e-e^{-1}}{4}+\frac{e^i-e^{-i}}{4i}\\ &= \frac{\mathrm{sh}(1)}{2}+\frac{\sin(1)}{2},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 5.

1. Obtenir de même $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n+k)!}$ pour tout $k\in\{0,2,3\}$.
2. Produire une autre démonstration plus simple pour tout $k\in\{0,1,2,3\}$.

Exemple 7. Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\frac{1+j^k+j^{2k}}{3}=\begin{cases}1 & \text{si } k\equiv 0 \bmod 3,\\ 0 & \text{si } k\not\equiv 0 \bmod 3.\end{cases}$ Comme d'habitude, j désigne le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}=\sum_{\substack{k=0\\ k\equiv 0[3]}}^{3n}\binom{3n}{k}=\sum_{k=0}^{3n}\frac{1+j^k+j^{2k}}{3}\binom{3n}{k}=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}+\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}j^k+\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}j^{2k}\right).$$

On sait simplifier toutes ces sommes grâce à la formule du binôme de Newton. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}=\frac{2^{3n}+(1+j)^{3n}+(1+j^2)^{3n}}{3}.$$

Exercice 6.

1. Achever ce calcul pour obtenir une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}$ ne faisant intervenir que des sommes, produits et puissances de nombres rationnels.
2. Calculer de même $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k+2}$. Interprétation combinatoire de ce calcul ?

Exercice 7. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

1. Décomposer $\dfrac{1}{1-X^n}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ en quelques secondes.
2. On pose : $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, simplifier $\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1}\left(\omega^k-\omega^j\right)$ grâce à la question précédente.

4.3 Autres applications de la formule d'orthogonalité

L'idée de ne retenir que les entiers d'une classe de congruence donnée peut intervenir naturellement dans bien d'autres contextes que le calcul de sommes. Le cadre le plus naturel est évidemment arithmétique. Ainsi vous trouverez dans le document *Méthodes* d'arithmétique une autre application de la formule d'orthogonalité, au dénombrement de solutions d'équations modulo p.

Un autre exemple où cette idée peut être fructueuse est dans la résolution de certains systèmes linéaires, dits « circulants ». Un exemple est le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ a + jb + j^2c = 0, \\ a + j^2b + jc = 0, \end{cases}$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Plus généralement, il s'agit d'un système linéaire associé à la matrice circulante $\left(\left(e^{\frac{2i\pi k\ell}{n}}\right)\right)_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

En utilisant la formule d'orthogonalité pour $n = 3$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1 + j^k + j^{2k}}{3} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \equiv 0 \bmod 3, \\ 0 & \text{si} \quad k \not\equiv 0 \bmod 3, \end{cases}$$

On remarque que les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + jL_2 + j^2L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 + j^2L_2 + jL_3$ dans le système ci-dessus donnent respectivement :

$$3a = 1, \quad 3c = 1, \quad 3b = 1,$$

ce qui le résout en quelques secondes.

Comme ce n'est pas le sujet du document, je n'approfondis pas la question, mais l'étudiant curieux pourra essayer de comprendre pourquoi cela rentre parfaitement dans l'idée qu'avec ces opérations et la formule d'orthogonalité, on veut ne retenir qu'une seule classe de congruence modulo n.

4.4 ☢ Nombres premiers indexés par une classe de congruence

Des problèmes de théorie analytique des nombres expriment la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ à l'aide de sommes indexées par des nombres premiers. La relation plus fréquente est :

$$\forall s > 1, \quad \ln(\zeta(s)) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{ks}} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s} + \bigstar,$$

où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. Je ne la justifie pas, c'est un gros exercice en soi (et si vous n'avez jamais entendu parler de telles relations, cette section n'est pour l'instant pas très utile à lire). Une application classique de ce genre de relation est la divergence de la série des inverses des nombres premiers, et on peut même être plus précis en donnant un équivalent quand $s \to 1$ de la somme $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}$, ou encore un équivalent quand $x \to +\infty$ de la somme $\sum_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p\leqslant x}} \frac{1}{p}$ (mais c'est plus difficile).

Si l'on veut étudier une somme de la forme : $\sum_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p\equiv a[b]}} \frac{1}{p^s}$, en vue d'en déduire le même genre de conclusion, on aimerait comme dans la section 4.2 se servir de la somme : $\sum_{k=0}^{b-1} e^{\frac{2i\pi k}{b}(n-a)}$, qui vaut zéro pour tout entier ← page 5 n hors de la classe de congruence de a modulo b, en écrivant quelque chose de cet acabit :

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p\equiv a[b]}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{b} \sum_{\ell=0}^{b-1} e^{\frac{2i\pi\ell}{b}(p-a)}\right) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{ks}} = \frac{1}{b} \sum_{\ell=0}^{b-1} e^{-\frac{2i\pi\ell a}{b}} \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2i\pi\ell p}{b}}}{kp^{ks}}.$$

Problème : cette dernière somme ne peut absolument pas être écrite à l'aide de la fonction ζ. Cette approche marchait bien tant que l'on manipulait des sommes usuelles de la forme $\sum_n u_n z^n$: il suffisait alors d'intégrer le terme exponentielle à la variable z pour reconnaître une somme connue. Le fait qu'ici, la somme soit de la forme $\sum_n u_n n^{-z}$ (avec la variable z dans l'exposant) empêche cette approche d'aboutir.

Il existe néanmoins une solution que l'algébriste formulerait ainsi : on remplace les caractères additifs par des caractères multiplicatifs. En termes moins savants : ce sont les applications b-périodiques $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, nulles en les entiers non premiers à b et vérifiant : $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$, qui remplacent avantageusement l'exponentielle de la formule d'orthogonalité ci-dessus. On peut démontrer en effet qu'ils vérifient, si a est premier avec b, d'inverse a' modulo b :

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\chi} \chi(na') = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \equiv a \bmod b, \\ 0 & \text{si} \quad n \not\equiv a \bmod b, \end{cases}$$

où φ est l'indicatrice d'Euler. Si l'on dispose d'une telle relation (qui à elle seule mobiliserait une très grande partie d'un problème écrit... voir par exemple la partie II de l'épreuve de Mathématiques D de l'ENS en 2019, qui la démontre dans un cas particulier), alors on peut imiter la stratégie de la section 4.2 pour exprimer une somme indexée par les nombres premiers $p \equiv a \bmod b$ en fonction de la fonction ζ, et de ce qu'on appelle des fonctions L, définies ainsi :

$$s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

C'est la raison d'être de ces fonctions que vous croisez dans certains problèmes et exercices d'arithmétique.

5 Sommes se calculant à l'aide de la constante d'Euler

Nous mentionnons une méthode de calcul des sommes dont le terme général est une fraction rationnelle, dans la section 1. Mais cette méthode peut échouer... En effet, il n'apparaît pas nécessairement des sommes télescopiques, ni qui se simplifient après un changement d'indice. Par exemple :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{2n-1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Vous aurez beau faire, vous ne pouvez pas simplifier cette différence par des manipulations élémentaires ! On peut certes exprimer $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1}$ en fonction de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ (voir la section 4.1), pour obtenir : ← page 4

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}, \tag{1}$$

mais on n'est pas plus avancé : il faut en savoir plus sur le comportement asymptotique de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ quand $N \to +\infty$.

Nous savons certes démontrer, grâce à une comparaison série-intégrale :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N),$$

ce qu'on peut réécrire : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \underset{N\to+\infty}{o}(\ln(N))$ (je passe à un développement asymptotique pour pouvoir l'injecter dans la différence de (1), parce qu'*on ne somme pas les équivalents*), mais c'est insuffisant pour aller plus loin. En effet, injecté dans (1), cela donne :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\left(\ln(2N) + \underset{N\to+\infty}{o}(\ln(N)) - \ln(N) + \underset{N\to+\infty}{o}(\ln(N))\right) = 2(\ln(2) + \underset{N\to+\infty}{o}(\ln(N))).$$

Comme on ne sait rien de la limite du terme d'erreur $\underset{N\to+\infty}{o}(\ln(N))$ quand $N \to +\infty$, il est impossible de poursuivre (et d'en déduire que la limite est $2\ln(2)$) !

La solution réside alors dans le résultat suivant : un exercice classique est qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \gamma.}$$

Cette limite γ est ce qu'on appelle la *constante d'Euler*. **Il faut savoir démontrer son existence**. Nous proposons dans l'exercice suivant une des approches possibles, qui est un raffinement de la comparaison entre $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ et $\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t}$ utilisée pour obtenir $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$.

Exercice 8. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Montrer : $\forall k \geqslant 2$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est minorée par 0.
3. Déduire de cette même inégalité que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$: $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Conclure.

Voici alors comment poursuivre : une fois que nous avons exprimé les sommes partielles de la somme à calculer, *uniquement à l'aide de termes de la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\geqslant 1}$ *et de fonctions usuelles*, il ne reste plus qu'à prendre la limite quand $N \to +\infty$ (sachant que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers γ) pour obtenir le résultat.

Si l'on ne veut pas introduire la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on peut se contenter d'utiliser la formule équivalente : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + \underset{N\to+\infty}{o}(1)$.

Exercice 9.

1. Vérifier l'identité ci-dessus : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n-1)} = 2\left(\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)$.
2. Compléter ce qui précède pour exprimer $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n-1)}$ pour tout $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ en fonction du logarithme et de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$.

Vous pouvez combiner les remarques ci-dessus avec celles de la section 4.1, notamment en présence de $(-1)^n$, comme on le voit dans l'exemple suivant. ← page 4

Exemple 8. Soit $N \geqslant 1$ un entier. On a :

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n} = \left(-\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{2N}\frac{1}{n} + \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N}\frac{1}{n}\right) + \left(\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{2N}\frac{1}{n} + \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N}\frac{1}{n}\right) = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N}\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{N}\frac{2}{2k} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k},$$

et on en déduit, grâce à ce qui précède :

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n} = u_N + \ln(N) - (u_{2N} + \ln(2N)).$$

Exercice 10. En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

6 Autres sommes

Il n'y a pas de méthode systématique (de nombreuses sommes simples sont hors de portée même des mathématiciens professionnels, par exemple $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$), aussi je ne veux pas encombrer le propos en faisant une liste de sous-cas trop longue. Voici quelques conseils de méthodologie pour vous aider face à une situation inédite, donc plus délicate :

1. N'inventez pas de formule magique !
2. Calculez les premières sommes partielles ; elles vous permettront parfois de comprendre ce qu'il s'y passe, avec plusieurs simplifications qui n'étaient pas visibles au premier abord.
3. La transformation d'Abel permet *parfois* de calculer des sommes (section 8.2).
4. Vous saurez calculer davantage de sommes à l'aide des séries entières, notamment par dérivation ou intégration de sommes connues.

Exemple 9. Considérez cet exemple :

$$\sum_{n=1}^{5}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \ln\left(\frac{6}{5}\right) = \ln\left(\frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 2\times 4\times 4\times 6}\right).$$

Il semble apparaître progressivement le produit de tous les entiers impairs au carré au numérateur, et le produit de tous les entiers pairs au carré au dénominateur ; on sait exprimer tout cela à l'aide de factorielles, et en déduire le comportement asymptotique à l'aide de la formule de Stirling.

Exercice 11.

1. Conjecturer une formule générale pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ou $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, puis la démontrer (*éventuellement par récurrence*).
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; vous aurez besoin de la formule de Stirling.

Quelques remarques pour conclure :

— si l'on vous demande, dans une même question, d'à la fois montrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$, et de calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, il est en général inutile de démontrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *via* les relations de comparaison : soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est trivialement combinaison linéaire de séries convergentes « usuelles » et de sommes explicites (séries télescopiques, géométriques, et plus tard les séries entières) ; soit on peut démontrer par un calcul explicite que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} u_n$ existe et est finie, démontrant par là la convergence : gagnez du temps !

Table des matières