Méthodes (MP) – Séries numériques

☢ Utiliser la transformation d'Abel

La transformation d'Abel est un outil extrêmement puissant dans l'étude des séries numériques, dont le critère spécial des séries alternées est une version appauvrie. Autrefois au programme des classes préparatoires, elle en a disparu officiellement, mais elle apparaît tout de même encore aux concours, certes de manière implicite (Mathématiques 1 à Mines-Ponts en 2021 et 2022, pour des exemples récents), parce qu'elle multiplie les possibilités : les élèves à l'aise auront donc un avantage net s'ils l'ont déjà vue et apprivoisée durant l'année de MP.

Je rappelle la formule, sans la démontrer (mais vous devez savoir le faire si vous l'utilisez) :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n v_n = u_N V_N - \sum_{n=0}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) V_n,$$

où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Cette transformation a parfois une forme légèrement différente (comme dans l'exemple 4 et l'exercice 9) : c'est pourquoi il faut comprendre le *principe* de sa démonstration (faire apparaître un télescopage en écrivant $v_n = V_n - V_{n-1}$ puis en effectuant un changement d'indice), pour être capable de l'adapter à d'autres circonstances. → page 7

Elle est un analogue de l'intégration par parties pour les intégrales :

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g,$$

si l'on remplace :

— la dérivation d'une fonction par la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs d'une suite (analogie pertinente, puisque, comme la dérivée d'une fonction, cette quantité donne l'accroissement et la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$) ;

— l'intégration d'une fonction par la sommation $\sum_{k=0}^{n} v_k$ d'une suite (de même que la dérivation et l'intégration sont des opérations « réciproques », le lien suite-série assure que la sommation est la « réciproque » de la différence de termes consécutifs).

Cette analogie permet éventuellement de retenir la forme de la transformation d'Abel, mais pas seulement : elle peut inspirer les choix de suites auxquelles appliquer cette transformation, en réfléchissant au choix analogue que l'on aurait fait dans une intégration par parties (autant dire que si cette dernière technique n'est pas maîtrisée, il est vain d'espérer comprendre comment s'utilise une transformation d'Abel).

Les trois sections suivantes expliquent à quoi sert cette transformation. Et surtout, comment l'utiliser ? Comme pour une intégration par parties, l'objectif est de se ramener à une somme plus simple à étudier (pour l'étude de la convergence ou le calcul), mais cela nécessite de bien choisir les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ dont le produit donne le terme général de la somme initiale.

1 Pour étudier la nature de séries compliquées

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série numérique dont nous ne parvenons pas à obtenir la nature par les méthodes habituelles. On veut montrer sa convergence en effectuant une transformation d'Abel. Il faudrait donc choisir $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telles que : $a_n = u_n v_n$, et de sorte que la nature de $\sum_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n) V_n$ soit plus simple à étudier (il faut aussi que la limite de $(u_n V_n)_{n\geqslant 0}$ soit connue).

Pour cela, on note que lorsqu'on effectue une transformation d'Abel, la somme du membre de droite est « presque » télescopique ; or nous savons très simplement trancher la nature d'une série télescopique. Le problème est la présence du terme V_n, dont il faudrait se débarrasser pour que la somme soit « vraiment » télescopique. En résumé, pour que la réduction à une série télescopique fonctionne, il faut :

— choisir $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de sorte que $(V_n)_{n\geqslant 0}$ soit bornée par une constante (ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|(u_{n+1}-u_n)V_n|\leqslant M\,|u_{n+1}-u_n|$, ne laissant que le terme $u_{n+1}-u_n$ d'une série télescopique) ;

— choisir $(u_n)_{n\geqslant 0}$ monotone (pour supprimer les valeurs absolues : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-u_n|=u_n-u_{n+1}$ si $u_{n+1}\leqslant u_n$), convergente pour que la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n-u_{n+1})$ converge par le lien suite-série, et plus précisément : convergente vers 0 pour qu'on ait également $u_NV_N\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ grâce à la convergence vers 0 de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et au caractère borné de $(V_n)_{n\geqslant 0}$ (on utilise le théorème des gendarmes).

Si l'on parvient à faire de tels choix de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ (plutôt que de retenir machinalement toutes les conditions, retenez pourquoi on les veut ; sinon, vous ne saurez jamais vous en souvenir, ni raisonner correctement), alors le membre de droite de la transformation d'Abel admet une limite finie quand $N\to+\infty$, et donc celui de gauche aussi.

Exemple 1. Nous allons montrer par cette méthode que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n}$ converge (nous vous laissons vous convaincre que les méthodes habituelles échouent ici). Soit $N\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad u_n=\frac{1}{n},\quad v_n=\sin(n),\quad V_n=\sum_{k=1}^{n}v_k.$$

On a, par la transformation d'Abel :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(n)}{n}=\frac{1}{N}V_N-\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)V_n. \tag{$*$}$$

On a choisi $u_n=\frac{1}{n}$, plutôt que $u_n=\sin(n)$, afin d'avoir clairement une série télescopique convergente : comme $(\sin(n))_{n\geqslant 1}$ n'a pas de limite, la série $\sum_{n\geqslant 1}(\sin(n+1)-\sin(n))$ diverge et nous ne serions pas plus avancés. Seulement, pour effectivement avoir la série télescopique convergente $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$, il faudrait se débarrasser du terme V_n en le majorant par une constante. C'est ce qui suit.

Pour étudier $V_N=\sum_{n=1}^{N}\sin(n)$, on utilise $\sin(n)=\mathrm{Im}(e^{in})$; on reconnaît alors une somme géométrique de raison $e^i\neq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N}e^{in}=\sum_{n=1}^{N}\left(e^i\right)^n=e^i\frac{1-e^{iN}}{1-e^i},$$

donc :

$$|V_N|=\left|\sum_{n=1}^{N}\sin(n)\right|=\left|\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{N}e^{in}\right)\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}e^{in}\right|=\left|e^i\frac{1-e^{iN}}{1-e^i}\right|=\frac{\left|1-e^{iN}\right|}{|1-e^i|}\leqslant\frac{|1|+\left|e^{iN}\right|}{|1-e^i|}=\frac{2}{|1-e^i|}.$$

Ceci démontre que $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée par $M=\frac{2}{|1-e^i|}$. On en déduit facilement que le premier terme de $(*)$ tend vers 0 quand $N\to+\infty$ d'après le théorème des gendarmes :

$$0\leqslant\left|\frac{1}{N}V_N\right|\leqslant\frac{M}{N}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

tandis que le second terme définit une série absolument convergente ; en effet :

$$\forall n\geqslant 1,\quad\left|\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)V_n\right|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right|\cdot|V_n|\leqslant\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot M,$$

et la série télescopique $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ converge parce que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge (vers 0) ; par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)V_n$ converge absolument, donc converge.

On en déduit que le second terme de $(*)$ converge également, donc $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(n)}{n}$ existe, et est finie : la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n}$ converge.

Remarque : première analogie avec l'intégration par parties. On remarque que l'on a choisi de sommer le sinus et de faire apparaître une différence de termes consécutifs de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, de la même manière que lorsqu'on veut montrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ en intégrant par parties, on intègre le sinus et l'on dérive $t\mapsto\frac{1}{t}$. Cette stratégie va dans le sens de l'analogie formulée en début de section, et qu'on retrouve dans l'encadré de la section 2 plus loin. Cette observation est importante si l'on veut comprendre cette transformation. → page 4

L'élève désireux d'apprendre à utiliser la transformation d'Abel se doit de savoir traiter l'exercice suivant. Autrement, il perd son temps et doit le consacrer aux techniques plus classiques du chapitre.

Exercice 1. (l'exemple incontournable) Adapter l'exemple ci-dessus pour montrer que, pour tout $\theta\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ convergent.

Exercice 2. Redémontrer, grâce à une transformation d'Abel, la première conclusion du théorème spécial des séries alternées, formulée un peu différemment : si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à termes positifs, décroissante, convergeant vers 0, alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

Comme souvent avec les énoncés vrais sans la moindre hypothèse, le nombre d'applications est riche. Ainsi on peut également montrer des convergences uniformes de séries de fonctions à l'aide d'une transformation d'Abel.

Exercice 3. (logarithme complexe) Cet exercice nécessite d'avoir déjà vu le chapitre sur les séries de fonctions. Soit $\theta\in]0,2\pi[$.

1. À l'aide d'une transformation d'Abel, appliquée à $\sum_{n=N+1}^{N'}\frac{x^n e^{in\theta}}{n}$ où l'on fait ensuite tendre N' vers $+\infty$, montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\left(f_n:\begin{cases}[0,1] & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \frac{x^n e^{in\theta}}{n}\end{cases}\right)$ converge uniformément sur $[0,1]$, et en déduire que sa somme f est continue sur $[0,1]$.

Les autres questions n'ont plus de rapport avec la transformation d'Abel, mais utilisent ce résultat de continuité pour calculer une somme remarquable.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0,1[$, et qu'on a : $\forall x\in[0,1[,\ f'(x)=\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}$.
3. En déduire : $\forall x\in[0,1[,\ f(x)=-\frac{1}{2}\ln\left((x-\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2\right)+i\arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right)$.
4. Conclure en montrant : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n}=-\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+i\frac{\pi-\theta}{2}$. Pourquoi parle-t-on de « logarithme complexe » ?

2 Pour calculer des sommes

Nous avons dit en début de section que la transformation d'Abel pour les séries est l'analogue de l'intégration par parties pour les fonctions, où l'on retient la substitution qui permet ce parallèle, dans la figure 1.

FIGURE 1 – Analogies entre fonctions et suites, entre intégrales et séries.

Fonction f		Suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$	
Intégrale	$\int_I f$	Série	$\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$
Dérivée	f'	Accroissement	$(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$
Primitive	$x \mapsto \int_a^x f$	Sommation	$\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 0}$
Théorème fondamental		Lien suite-série	
$\int_a^b f' = f(b)-f(a)$		$\sum\limits_{n=0}^{N} (u_{n+1}-u_n) = u_{N+1}-u_0$	
Intégration par parties		Transformation d'Abel	

Cette analogie va au-delà de la simple coïncidence (même si nous ne tenterons pas de la justifier théoriquement), et se voit aussi dans les calculs, tant que l'on ne raisonne que sur les ordres de grandeur (c'est-à-dire en ignorant les constantes multiplicatives et les quantités négligeables) : voir la figure 2. (Pour

FIGURE 2 – Calculs de dérivées et primitives, et leurs analogues discrets.

Fonction	Suite
$x \mapsto a^x$	$(a^n)_{n\geqslant 0}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \ln(a)a^x \approx a^x$	$a^{n+1}-a^n = (a-1)a^n \approx a^n$
$\int_0^x a^t \mathrm{d}t = \frac{a^x-1}{\ln(a)} \approx a^x - 1$	$\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \approx a^{n+1}-1$
$x \mapsto x^\alpha$	$(n^\alpha)_{n\geqslant 0}$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$	$(n+1)-n = 1$
$\int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$
$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = 2x$	$(n+1)^2-n^2 = 2n+1 \approx 2n$
$\int_0^x t^2\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \approx \frac{n^3}{3}$
$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}$	$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) \approx \alpha n^{\alpha-1}$
$x \mapsto \ln(x)$	$(\ln(n))_{n\geqslant 1}$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	$\ln(n+1)-\ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$

le calcul exact, il faut admettre que les calculs de sommes sont plus lourds que ceux d'intégrales, et n'ont pas des expressions aussi élégantes.)

On note que dans notre réflexion, les suites géométriques $(a^n)_{n\geqslant 0}$ (qui ne sont rien d'autre que des exponentielles en base a, du moins si $a > 0$) ont pour analogue continu les fonctions exponentielles. **Souvent, quand on raisonne par analogie, il ne coûte rien de remplacer la suite $(a^n)_{n\geqslant 0}$ par la fonction $x \mapsto e^{\pm x}$, même si $a \neq e$.**

En dressant ces parallèles, voici où je veux en venir : puisque, du point de vue qualitatif, les calculs d'intégrales et de sommes sont si proches, il est raisonnable de calculer des sommes (et de conjecturer leurs valeurs) en nous basant sur leur analogue intégral, où nous avons plus de facilités. Cela vaut aussi pour la transformation d'Abel. Retenez ce principe :

Calcul de somme avec une transformation d'Abel : comment choisir u_n et v_n

Les « bons » choix de fonctions, dans une intégration par parties,
sont aussi des bons choix pour une transformation d'Abel.

C'est-à-dire : si vous voulez faire une transformation d'Abel pour calculer $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n$:

— au brouillon, remplacez l'indice n par une variable réelle t (de sorte que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ « devienne » une fonction $t \mapsto f(t)$), et la somme $\sum_{n=0}^{N} a_n$ par l'intégrale $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ (les bornes n'ont aucune importance et vous pouvez les changer, voire les omettre) ;

— demandez-vous comment vous calculeriez $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ en intégrant par parties ; si, pour cela, vous dériveriez une fonction u et intégreriez une fonction v (telle que $f = uv$), alors la transformation d'Abel devrait marcher en faisant les mêmes choix : il faut simplement remplacer $u(t)$ par u_n et $v(t)$ par v_n (de sorte que : $a_n = u_n v_n$), puis $u'(t)$ par $u_{n+1} - u_n$, et une primitive de v par $\sum_{k=0}^{n} v_k$, suivant l'analogie de la figure 1.

Dans cette analogie, il est plus commode de remplacer toute suite géométrique par une exponentielle (croissante si la raison est supérieure à 1 en module, et décroissante sinon).

Ainsi les conseils de la section *L'intégration par parties* (document de méthodologie d'intégration) restent valables ici :

— pour de nombreuses intégrations par parties faisant intervenir des puissances entières, par exemple $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t$, il est préférable de dériver le facteur polynomial $t \mapsto t^\alpha$ (autant de fois que son degré, pour se ramener à un facteur constant) et d'intégrer l'exponentielle ; par analogie, une somme de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n^\alpha q^n$ se calcule avantageusement avec une transformation d'Abel en prenant $v_n = q^n$ (la suite qu'on somme, par analogie avec l'intégration) et $u_n = n^\alpha$ (la suite dont on fait apparaître des différences de termes consécutifs, par analogie avec la dérivation) ;

— à l'inverse, lorsqu'une intégrale fait apparaître un terme logarithmique, on la calcule souvent en intégrant par parties, en dérivant le logarithme ; par analogie, une transformation d'Abel avec un terme logarithmique s'effectue souvent en prenant $u_n = \ln(n)$, pour se ramener à une somme où il apparaît $u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ (l'analogue de la dérivation du logarithme).

Exemple 2. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Calculons $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n2^n$ à l'aide d'une transformation d'Abel. Conformément au conseil ci-dessus, pour choisir avec quelles suites effectuer cette transformation, on se demande d'abord comment on aurait calculé $\displaystyle\int xe^x\mathrm{d}x$: en dérivant le facteur polynomial et en intégrant l'exponentielle. Par analogie, on effectue une transformation d'Abel en sommant le terme géométrique, c'est-à-dire avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$, $v_n = 2^n$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{N} n2^n = N\sum_{n=0}^{N} 2^n - \sum_{n=0}^{N-1}((n+1)-n)\sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

On sait calculer les sommes géométriques. On a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} 2^n = \frac{2^{N+1}-1}{2-1} = 2^{N+1} - 1$. Donc :

$$\sum_{n=0}^{N} n2^n = N\left(2^{N+1}-1\right) - \sum_{n=0}^{N-1}\left(2^{n+1}-1\right) = N\left(2^{N+1}-1\right) - 2\sum_{n=0}^{N-1} 2^n + \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N\left(2^{N+1}-1\right) - 2\left(2^N - 1\right) + N.$$

On conclut, en simplifiant et regroupant les termes :

$$\sum_{n=0}^{N} n2^n = 2^{N+1}(N-1) + 2.$$

On pouvait aussi obtenir cette somme en dérivant $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$, et en posant $x = 2$. Une stratégie fréquente dans la théorie des séries entières.

Exercice 4.

1. Redémontrer : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n2^n = 2^{N+1}(N-1) + 2$, avec le changement d'indice $n' = n + 1$.

2. Généraliser au calcul de $\sum_{n=0}^{N} nq^n$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{C}$ tel que $q \neq 1$. On utilisera de préférence une transformation d'Abel, afin de s'exercer à cette technique.
3. Si $|q| < 1$, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ converge, et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

L'exercice précédent (dernière question) montre que la transformation d'Abel permet aussi de calculer des sommes de séries convergentes. Il suffit de transformer les sommes partielles d'indice N, et de prendre $N \to +\infty$.

Exemple 3. Soit $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Calculons la somme classique $\sum_{n=0}^{N} n^2$ grâce à une transformation d'Abel. Il n'y a pas trop le choix des suites ici : on prend $u_n = v_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{N} n^2 = N\sum_{n=0}^{N} n - \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) = N\sum_{n=0}^{N} n - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + \sum_{k=0}^{N} k = (N+1)\sum_{n=0}^{N} n - \sum_{n=0}^{N} \frac{n^2+n}{2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{N} n^2 = (N+1)\sum_{n=0}^{N} n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} n^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} n = \left(N+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{N} n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} n^2,$$

et donc :

$$\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{N} n^2 = \left(N+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)\left(N+\frac{1}{2}\right)}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Exercice 5. Pour tout $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, calculer $\sum_{n=0}^{N} n^3$ grâce à une transformation d'Abel.

Ci-dessous, une simplification propre aux séries, qui n'a pas de pendant intégral.

Exercice 6. (élimination du signe alterné) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes positifs, décroissante, convergeant vers 0.

1. Avec une transformation d'Abel, montrer :

$$\forall N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \sum_{n=0}^{N}(-1)^n u_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}u_n - \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{N-1}(u_{n+1}-u_n).$$

2. Justifier que les séries $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}(u_{2n+1}-u_{2n})$ convergent, et montrer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = -\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{2n+1}-u_{2n}).$$

3. Application. On admet : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ (voir le développement en série entière du logarithme, ou utiliser l'exercice 15 de ce document). En déduire la valeur de la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$. ← page 15

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et ayant une espérance. En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{P}(X = n) = \mathrm{P}(X \geqslant n) - \mathrm{P}(X \geqslant n+1)$, et en effectuant une transformation d'Abel, montrer : $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geqslant n)$.

3 Pour trouver des équivalents asymptotiques de sommes

La transformation d'Abel permet également d'obtenir des équivalents (ou, faute de mieux, des encadrements) de sommes partielles de séries divergentes, ou de restes de séries convergentes ; cependant la comparaison entre une série et une intégrale reste à privilégier (lorsque les hypothèses de monotonie permettent de l'appliquer).

Si l'objectif est d'obtenir un équivalent, il suffit que la nouvelle somme obtenue dans la transformation d'Abel soit négligeable devant la somme initiale. C'est souvent le cas lorsque, par exemple, le nouveau terme général est égal au précédent, multiplié par un terme α_n décroissant vers 0 (exemples : $\frac{1}{n+1}$ comme dans l'exemple ci-dessous, ou e^{-n}, etc.). C'est ce qui permet de détecter si l'on a fait un « bon » choix.

Exemple 4. La règle de D'Alembert permet de démontrer aisément que la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n2^n}$ converge (vers $\ln(2)$, ce qui n'importe pas ici). Ayons une idée de sa vitesse de convergence, en déterminant un équivalent asymptotique des restes *via* une transformation d'Abel. Sommer le terme géométrique est souvent préférable (par analogie avec les exponentielles), comme nous l'avons dit tantôt. Posons donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. Notons que l'on a $\frac{1}{2^n} = V_n - V_{n-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (en particulier pour tout $n \geqslant N+1$ si $N \in \mathbb{N}$, ce qui évite d'avoir à isoler le premier terme comme dans la situation standard d'une transformation d'Abel). Pour tous entiers $N \geqslant 0$ et $N' \geqslant N+2$, on a donc :

$$\sum_{n=N+1}^{N'} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{1}{n}(V_n - V_{n-1}) = \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{V_n}{n} - \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{V_{n-1}}{n} = \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{V_n}{n} - \sum_{n=N}^{N'-1} \frac{V_n}{n+1}$$
$$= \frac{V_{N'}}{N'} - \frac{V_N}{N+1} + \sum_{n=N+1}^{N'-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) V_n.$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. Donc, quand $N' \to +\infty$, l'égalité ci-dessus devient :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\frac{V_N}{N+1} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) V_n = -\frac{2-\frac{1}{2^N}}{N+1} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(2 - \frac{1}{2^n}\right).$$

On peut simplifier le membre de droite, en notant qu'il y a une somme télescopique :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{2}{N+1} - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n-1}}.$$

Donc, après simplifications des termes opposés en $\frac{2}{N+1}$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{(N+1)2^N} - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}.$$

Montrons que la somme du membre de droite est négligeable devant les autres termes (observer le terme général, et le juger à la lumière du paragraphe qui précède l'exemple : on voit d'emblée que cela va marcher). On a :

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} \leqslant \frac{1}{N+1} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n},$$

et comme : $\dfrac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, le quotient de $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$ par $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ converge vers 0. Cela implique : $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} \underset{N\to+\infty}{=} o\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}\right)$. Ainsi :

$$\frac{1}{(N+1)2^N} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} + \underset{N\to+\infty}{o}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n},$$

ce qui donne l'équivalent souhaité :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(N+1)2^N} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{N2^N}.$$

Exercice 8. Qu'est-ce qui coince, si l'on essaie d'obtenir un équivalent asymptotique dans cet exemple avec la méthode de comparaison entre une série et une intégrale ?

Transformation d'Abel avec un terme géométrique. Lorsqu'on effectue une transformation d'Abel avec une somme *infinie* contenant un terme géométrique q^n (avec $|q| < 1$), il est en fait plus avisé de faire apparaître le reste $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} q^k$, plutôt que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, en écrivant : $q^n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} q^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k$. La raison à cela est que le reste revêt une expression plus simple que les sommes partielles, comme on le rappelle ci-dessous :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exercice 9. Reprendre la transformation d'Abel de l'exemple précédent, mais en utilisant le fait que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2^n} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$. Observer pourquoi les calculs deviennent plus agréables.

On dit plus haut de s'inspirer de l'intégration par parties, pour les choix de suites d'une transformation d'Abel. Cependant, l'analogue discret peut soulever des difficultés supplémentaires : lorsqu'on intègre par parties une fonction dépendant d'un logarithme, il est souvent avisé de dériver le logarithme, parce que sa dérivée, la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, est très simple ; dans le cas d'une transformation d'Abel, la différence $\ln(n+1) - \ln(n)$ n'est pas du tout aussi simple. Toutefois, si l'on ne cherche pas à effectuer un calcul exact, mais simplement à obtenir un encadrement, un équivalent asymptotique, etc., alors on peut faire apparaître la « suite inverse » en écrivant : $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ (inégalité de convexité). On l'illustre dans l'exemple suivant.

Exemple 5. À l'aide d'une transformation d'Abel, trouvons un équivalent asymptotique simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n\ln(n)$ quand $N \to +\infty$. Il serait tentant, comme dans les exemples de la section précédente, de poser $u_n = n$, puisque la différence $u_{n+1} - u_n = (n+1) - n = 1$ est très simple. Nous vous laissons essayer et voir pourquoi, en vérité, ce choix ne simplifie pas tant que cela l'affaire. Encore une fois, raisonnons par analogie avec le cas intégral : si l'on veut calculer $\displaystyle\int x\ln(x)\mathrm{d}x$, on dérive le logarithme et intègre $x \mapsto x$ (cet exemple est classique et nous vous invitons à le faire si besoin). De même, dans le cas discret, nous allons faire une transformation d'Abel avec : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_n = \ln(n)$, $v_n = n$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$:

$$\sum_{n=1}^{N} n\ln(n) = \ln(N)\sum_{n=1}^{N} n - \sum_{n=1}^{N-1} (\ln(n+1) - \ln(n)) \sum_{k=1}^{n} k = \frac{N(N+1)}{2}\ln(N) - \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}.$$

Montrons que la dernière somme est négligeable devant $\frac{N(N+1)}{2}\ln(N)$. On a, grâce à l'inégalité de convexité

$\ln(1+u) \leqslant u$:

$$\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad 0 \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{n(n+1)}{2} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (n+1) \leqslant \frac{N(N+1)}{4}.$$

On en déduit :

$$\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad 0 \leqslant \frac{2}{N(N+1)\ln(N)} \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{n(n+1)}{2} \leqslant \frac{1}{2\ln(N)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{n(n+1)}{2} \underset{N\to+\infty}{=} o\left(\frac{N(N+1)}{2}\ln(N)\right)$. La relation ci-dessus issue de la transformation d'Abel implique donc :

$$\sum_{n=1}^{N} n\ln(n) = \frac{N(N+1)}{2}\ln(N) + \underset{N\to+\infty}{o}\left(\frac{N(N+1)}{2}\ln(N)\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N(N+1)\ln(N)}{2} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^2\ln(N)}{2}.$$

Exercice 10. Retrouver cet équivalent asymptotique avec une comparaison entre une série et une intégrale. C'est beaucoup, beaucoup plus simple ici.

4 Pour jouer le rôle de l'intégration par parties dans une intégrale, quand il n'y a pas de fonction dérivable

Nous expliquons dans la section 9 du document *Méthodes* d'intégration comment, dans certaines situations, un résultat théorique sur les intégrales s'obtient en passant par des sommes qui approchent l'intégrale (en général des sommes de Riemann, mais pas seulement). Nous y expliquions dans quels cas de figure cela pouvait être pertinent, et à ceux-là on peut ajouter un cadre d'application basé sur l'observation suivante :

— la transformation d'Abel est un analogue de l'intégration par parties pour les intégrales ;

— cependant l'intégration par parties nécessite des fonctions de classe C^1, alors que la transformation d'Abel ne nécessite aucune hypothèse de régularité ;

— par conséquent, si l'on *veut* faire une intégration par parties dans une intégrale où il N'y a PAS de fonction de classe C^1, une stratégie pour y remédier peut être d'approcher cette intégrale par une somme, sur laquelle on effectue une transformation d'Abel (toujours licite).

Dans la transformation d'Abel, c'est $f(a_{i+1}) - f(a_i)$ qui jouera le rôle de f'. Pour majorer cette quantité, vous pouvez avoir besoin de différentes techniques : caractère lipschitzien, uniforme continuité (si on est sur un segment, et c'est en particulier le cas si vous vous ramenez à une somme de Riemann), etc.

Exemple 6. Montrons la seconde formule de la moyenne : soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, positive et décroissante, et soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. On veut montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que :

$$\int_0^1 fg = f(0)\int_0^c g.$$

Avant de poursuivre, soulignons que cette formule de la moyenne est très utile lorsque, dans des majorations d'intégrales, on veut « n'avoir que g dans l'intégrale » (pour utiliser des hypothèses par exemple sur la convergence de l'intégrale de g), mais que l'inégalité triangulaire $\left|\int_I fg\right| \leqslant \|f\|_\infty \int_I |g|$ serait trop brutale. C'est le cas notamment quand $\int_I g$ converge sans converger absolument, ou quand g dépend de fonctions trigonométriques ou de l'exponentielle complexe.

Soit $G : x \mapsto \int_0^x g$ l'unique primitive de g s'annulant en 0. Le résultat à démontrer revient à dire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que : $G(c) = \dfrac{1}{f(0)}\displaystyle\int_0^1 fg$ (cette écriture n'a un sens que si $f(0) \neq 0$, mais on se convainc aisément qu'au vu des hypothèses, si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle et l'identité à démontrer est triviale). Si l'on parvient à démontrer que le membre de droite est compris entre le maximum M et le minimum m de G sur $[0,1]$, ce serait une conséquence immédiate du théorème des valeurs intermédiaires. Bref, tout ce que l'on veut, c'est démontrer :

$$mf(0) \leqslant \int_0^1 fg \leqslant Mf(0).$$

Ceci est raisonnablement facile si on fait l'hypothèse supplémentaire que f est de classe C^1 sur $[0,1]$. En effet, sous cette hypothèse, on intègre par parties, l'idée étant de faire apparaître G explicitement :

$$\int_0^1 fg = [f \cdot G]_0^1 - \int_0^1 f'G = f(1)G(1) - \int_0^1 f'G.$$

Comme f est décroissante, $-f'$ est positive et la multiplication de G par $-f'$ préserve l'encadrement $m \leqslant G \leqslant M$. D'où :

$$\int_0^1 fg \geqslant f(1)m - \int_0^1 f'm = f(1)m - m(f(1) - f(0)) = mf(0),$$

et par un raisonnement analogue : $\displaystyle\int_0^1 fg \leqslant Mf(0)$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 fg$ est compris entre $mf(0)$ et $Mf(0)$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires le résultat voulu est démontré.

Si f est seulement continue, on ne peut plus intégrer par parties. C'est là qu'on applique l'idée de cette section : on approche $\displaystyle\int_0^1 fg = \int_0^1 fG'$ (on fait apparaître G plutôt que g, puisque l'idée est de montrer que $\displaystyle\frac{1}{f(0)}\int_0^1 fg$ admet un antécédent par G) par une somme de Riemann bien choisie, et avec cette somme de Riemann nous imiterons l'idée de l'intégration par parties en faisant une transformation d'Abel (ce qui est possible sans hypothèse de régularité sur f). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons : $a_k = \frac{k}{n}$. La somme de Riemann approchant $\displaystyle\int_0^1 fG'$ est naturellement :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)G'(a_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)g(a_k),$$

mais nous allons lui préférer celle-ci :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right),$$

pour la raison déjà évoquée ci-dessus : on veut comparer une intégrale à m et M qui sont les extremums de G. C'est évidemment plus facile si on manipule une quantité dépendant de G. On va cependant montrer que les deux sommes ci-dessus sont très proches, donc cette approximation sera sans dommage. Remplacer $\frac{g(a_k)}{n}$ par $G(a_{k+1}) - G(a_k)$ est naturel en un sens, puisque, pour $a_{k+1} \approx a_k$, on peut écrire cette approximation à l'ordre 1 : $G(a_{k+1}) - G(a_k) \approx (a_{k+1} - a_k)g(a_k) = \frac{g(a_k)}{n}$.

Cessons d'ergoter, et faisons. Montrons que les deux sommes ci-dessus sont effectivement proches, et qu'il ne coûte donc rien de raisonner avec la seconde. On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)g(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\int_{a_k}^{a_{k+1}} (g(a_k) - g(t))\,\mathrm{d}t,$$

et comme g est uniformément continue sur $[0,1]$ par le théorème de Heine, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$ vérifiant : $|x - y| \leqslant \eta$, on ait : $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$. Prenons à présent $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant :

$\frac{1}{n} \leqslant \eta$ (on note que $\frac{1}{n} = a_{k+1} - a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: c'est la longueur de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, d'où ce choix). On a alors, pour tout entier naturel n vérifiant cette condition (on rappelle que f est positive) :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)g(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\int_{a_k}^{a_{k+1}} |g(a_k) - g(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_0) \qquad (f \text{ décroissante}) \\ &= \varepsilon f(0).\end{aligned}$$

Cela montre : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)g(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right)\right) = 0$. Et donc, comme la première somme converge vers $\displaystyle\int_0^1 fg$ en tant que somme de Riemann, on a montré :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right) = \int_0^1 fg.$$

Pour démontrer ce que l'on souhaite, il suffit donc d'encadrer cette somme par $mf(0)$ et $Mf(0)$, puis de passer à la limite. Pour cela, on va enfin illustrer le principe méthodique de cette section (rien de ce qui précède ne le faisait). Faisons cette fameuse transformation d'Abel supposée remplacer l'intégration par parties. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right) = f(a_{n-1})G(a_n) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(f(a_k) - f(a_{k-1})\right)G(a_k).$$

Or : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $m \leqslant G(a_k) \leqslant M$, et la décroissance de la fonction f implique : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $-\left(f(a_k) - f(a_{k-1})\right) \geqslant 0$, donc la multiplication de l'encadrement précédent par cette quantité ne renverse pas les inégalités. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right) \leqslant f(a_{n-1})M - M\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(a_k) - f(a_{k-1})\right) = f(a_{n-1})M - M\left(f(a_{n-1}) - f(a_0)\right) = f(0)M.$$

De même : $\displaystyle f(0)m \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right)$. En prenant la limite quand $n \to +\infty$ dans ces inégalités, on obtient : $\displaystyle mf(0) \leqslant \int_0^1 fg \leqslant Mf(0)$: d'où le résultat.

Exercice 11. Compléter les détails qui ont été omis.

Il faut cependant reconnaître que rares sont les cas où cette idée est fructueuse et plus efficace que d'autres (comme approcher une fonction continue par une fonction polynomiale grâce au théorème de Weierstraß, afin de se ramener à une fonction de classe C^1 par exemple).

Exercice 12. Démontrer le résultat de l'exemple 6 en approchant f par une fonction en escalier.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application continue, strictement croissante et telle que $f(0) = 0$, et : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Ces hypothèses sont là pour assurer que f^{-1} existe et est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

1. On suppose d'abord f de classe C^1. Montrer l'égalité de Young très rapidement grâce à cette hypothèse sur f, c'est-à-dire : $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle af(a) = \int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1}$.
2. On ne suppose plus f de classe C^1. Montrer que l'égalité de Young reste valable en s'inspirant des idées de cette section.

Table des matières

Table des figures