Méthodes (MP) – Séries numériques

Pour être à l'aise dans ce chapitre, il est indispensable de savoir manier habilement des développements limités et relations de comparaison. Un passage obligé est donc le cours de 1re année et une pratique régulière d'exercices.

1 ✓ Étudier la nature d'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$

Nous résumons sur le diagramme de la figure 1 et ci-dessous comment obtenir la nature d'une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$: → page 2

1. On vérifie d'abord si elle diverge grossièrement ou non (si elle ne diverge pas grossièrement, ne l'indiquez pas) ;
2. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang, alors on peut utiliser les critères valables pour les séries à termes positifs :
   — si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie comme quotient de produits, puissances ou factorielles, la règle de D'Alembert s'impose ;
   — si l'on n'est pas dans ce cas de figure, ou si la règle de D'Alembert nous donne le cas d'incertitude, alors on compare (à l'aide de $\leqslant, o, O, \sim$) la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ s'exprimant à l'aide de séries de référence (Riemann, géométrique, télescopique), et on obtient la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs ;
   — notons que si $u_n = f(n)$ où f est une fonction monotone aisée à intégrer, la comparaison entre séries et intégrales peut être fructueuse : revoir l'exemple classique des séries de Riemann.
3. Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'est pas de signe constant, on vérifie si $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge grâce aux points précédents, et on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge *absolument* ;
4. Sinon on regarde si le théorème spécial des séries alternées s'applique ;
5. En dernier recours on fait un développement asymptotique de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ afin de l'écrire comme une somme de termes généraux de séries toutes convergentes, ou dont une seule est divergente.

Plus succinct :

Pour étudier la nature d'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$

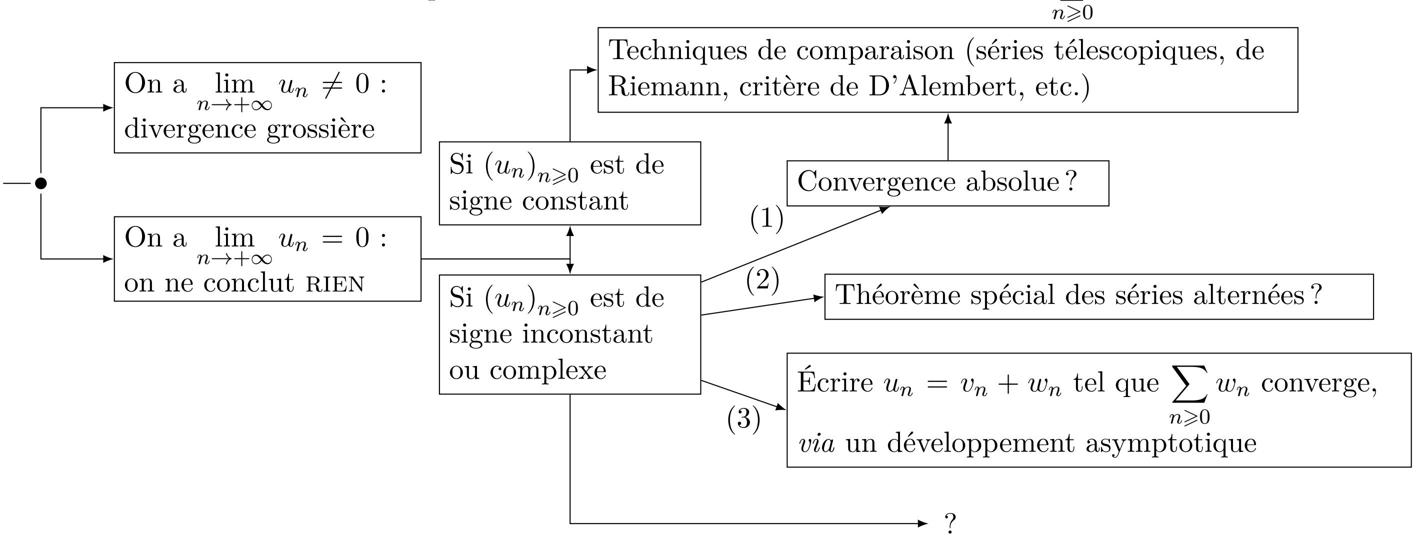
Cas positif. On essaie dans l'ordre :
1. En présence de factorielles et/ou puissances : **règle de D'Alembert**.
2. Sinon : **faire un développement asymptotique** pour obtenir un équivalent à $\frac{1}{n^\alpha}$.
3. Si ce n'est pas équivalent à $\frac{1}{n^\alpha}$: **méthode « $n^\alpha u_n$ »**.
4. Sinon : comparaison entre série et intégrales.

Cas non positif. On essaie dans l'ordre :
1. Si $u_n < 0$, on applique ce qui précède à $\sum_{n\geqslant 0}(-u_n)$ (qui est à termes positifs).
2. Sinon, on étudie $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ avec les méthodes ci-dessus (convergence absolue).
3. Sinon, on montre qu'elle vérifie le théorème spécial des séries alternées.

Nous renvoyons au cours pour les détails sur la comparaison entre série et intégrales, et à la section 4. → page 4

On croise en exercice la transformation d'Abel, équivalent discret de l'intégration par parties et technique très puissante pour l'étude des séries échappant à toutes les autres approches (voir section 8.1). → page 23 Mais il faut du recul pour en tirer largement profit : n'y songez pas si vous ne maîtrisez pas les méthodes du cours.

FIGURE 1 – Récapitulatif : comment étudier la nature d'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.



2 ✓ Comparer aux séries de Riemann en pratique

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'écrit explicitement à l'aide de fonctions usuelles, on écrit u_n en fonction de termes de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$ à l'aide de développements asymptotiques, voire d'équivalents asymptotiques (les seconds se déduisant souvent des premiers, sauf dans les cas simples où u_n ne fait intervenir ni sommes de termes de même ordre de grandeur, ni compositions).

Il arrive toutefois, si u_n s'écrit à l'aide de termes exponentiels ou logarithmiques, que l'on n'obtienne pas : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$, mais plutôt quelque chose de la forme : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(n))^\beta}{n^\alpha}$. Dans ce cas de figure, une première chose : respirez bien. Ensuite :

> N'ÉCRIVEZ PAS N'IMPORTE QUOI ! ON N'A PAS $\dfrac{(\ln(n))^\beta}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$, MÊME PAR « CROISSANCES COMPARÉES » !

On n'a pas non plus $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n-1$ (un tel équivalent n'est vrai qu'en 1, or ici $n \to +\infty$).

Même si ce n'est pas équivalent au terme général d'une série de Riemann, on peut toujours tenter une comparaison *via* la « méthode $n^a u_n$ ». Cela suffit en général pour conclure (sauf pour $\alpha = 1$: essayez pour voir pourquoi).

Principe de la méthode « $n^a u_n$ ». Comme cela a été dit, on l'utilise lorsqu'on n'arrive pas à obtenir directement un équivalent de la forme : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{n^k}$. On cherche malgré tout une comparaison au terme général d'une série de Riemann en considérant la limite de $\dfrac{u_n}{\frac{1}{n^a}} = n^a u_n$ quand $n \to +\infty$. Supposons que la limite existe pour un certain a. Alors,

— si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a u_n = L \neq 0$, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{L}{n^a}$, et donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^a}$ sont de même nature : et on a convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ si et seulement si $a > 1$ (en pratique, si l'on est dans ce cas de figure, on peut obtenir l'équivalent par un développement asymptotique direct : vous ne devriez pas rencontrer cette situation) ;

— si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a u_n = 0$, alors : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^a}\right)$, et si de plus $a > 1$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^a}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge également d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (le cas $a \leqslant 1$ ne permet pas de conclure) ;

— si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a u_n = +\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait : $u_n \geqslant \dfrac{1}{n^a}$, et si de plus $a \leqslant 1$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^a}$ diverge, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge également d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (le cas $a > 1$ ne permet pas de conclure).

Si vous ne voyez pas d'emblée quel choix de a est susceptible de marcher : vous faites le calcul de limite avec un a quelconque, et regardez selon les cas quelle est la limite obtenue. Dans le cas où vous en déduisez : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^a}\right)$, vous regardez s'il est en plus possible d'avoir $a < 1$; si non, on oublie ce cas-là. Dans le cas où vous en déduisez : $u_n \geqslant \dfrac{1}{n^a}$, regardez s'il est en plus possible d'avoir $a \geqslant 1$. Si les deux cas n'aboutissent pas, oubliez cette méthode.

Exemple 1. Étudions la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(\ln(n))^3}{n^2}$ *via* cette méthode. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$n^a \frac{(\ln(n))^3}{n^2} = n^{a-2}(\ln(n))^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } a-2 \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } a-2 < 0, \end{cases}$$

par croissances comparées pour le cas $a - 2 < 0$. Au brouillon, on confronte les deux cas de figure :

$$\forall a \geqslant 2,\ \frac{(\ln(n))^3}{n^2} \geqslant \frac{1}{n^a} > 0 \text{ (asymptotiquement)}, \quad \forall a < 2,\ \frac{(\ln(n))^3}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^a}\right).$$

On se demande s'il est possible d'avoir une minoration par une série divergente dans le premier cas : non, car il faudrait à la fois $a \geqslant 2$ pour que la minoration soit valable, et $a \leqslant 1$ pour que le minorant soit le terme général d'une série de Riemann *divergente*. C'est impossible. On passe au deuxième cas : est-il possible d'avoir à la fois $a < 2$ (pour que la relation de comparaison soit vraie) et $a > 1$ (pour avoir une domination par une série de Riemann *convergente*) ? Bien sûr que oui : il suffit de prendre $a = \frac{3}{2}$ par exemple. Pour cette valeur, on a alors :

$$\frac{(\ln(n))^3}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

et on conclut par comparaison que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(\ln(n))^3}{n^2}$ converge. Bien sûr, quand on rédige au propre, ou si l'on voit à l'œil nu quel choix de a va marcher, il est inutile de faire cette fastidieuse disjonction de cas.

À noter que cette même méthode « $n^a u_n$ » permet de gérer le cas des exponentielles décroissantes : le théorème des croissances comparées assure que si u_n décroît « exponentiellement vite » (en un sens que je laisse volontairement vague), alors elle est négligeable devant n'importe quelle fonction puissance, donc en particulier devant $\dfrac{1}{n^2}$. Vous pourrez ainsi démontrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{-n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{-\sqrt{n}}$ convergent (ou avec la règle de D'Alembert).

Exemple 2. On a $n^2 e^{-n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des croissances comparées, donc :

$$e^{-n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$ donc convergente, et $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n\sqrt{n}}$ est à termes positifs ; elle est donc convergente d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Exercice 1. Redémontrer sa convergence à l'aide de la règle de D'Alembert.

Exercice 2. Traiter de même les séries $\sum_{n\geqslant 1} n^{-n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-\sqrt{n}}$, avec soin vu que le terme général n'est pas une exponentielle classique (et on ne peut donc pas invoquer le théorème des croissances comparées directement).

3 ✓ Cas des séries alternées

Attention au fait que les séries alternées ne vérifient pas toujours le théorème spécial des séries alternées ; et même si c'est le cas, ce n'est pas forcément le moyen le plus direct de démontrer leur convergence, parce que la décroissance n'est pas toujours évidente. Essayez par exemple de vérifier le théorème spécial des séries alternées avec la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{16^n}{(2n)!}$: pas si simple, calculez les premiers termes et vous serez bien embêtés ! La convergence absolue reste à vérifier prioritairement (guettez un $\frac{1}{n^2}$, un $\frac{1}{n!}$, etc., dans ce cas la vérification est très facile), sauf si l'on veut ensuite majorer le reste de la série.

Vérification de la décroissance. Disons qu'on cherche à vérifier les hypothèses du théorème spécial des séries alternées avec une série de la forme $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ où $u_n \geqslant 0$. Lorsque la décroissance à vérifier n'est pas évidente, **nous vous conseillons de la vérifier en calculant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (qu'on compare à 1), dans le cas où u_n est défini à l'aide de puissances, factorielles, etc.**, plutôt qu'en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$. La raison à cela est la même qui rend la règle de D'Alembert pratique : un quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ simplifie considérablement les puissances et factorielles, et rend les inégalités faciles à vérifier.

S'il est difficile d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$, ou de comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, le dernier recours est dans le cas où u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = f(n)$; alors, vous étudiez les variations de l'application f grâce au signe de sa dérivée, et vous en déduisez que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet les mêmes variations.

Et si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est décroissante qu'à partir d'un certain rang ? Disons qu'elle est décroissante à partir du rang n_0. Alors vous appliquez le théorème spécial des séries alternées à $\sum_{n\geqslant n_0} (-1)^n u_n$ à la place. *C'est très important.* Puis vous dites que $\sum_{n\geqslant n_0} (-1)^n u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ ont même nature pour conclure.

4 ✓ Comparaison entre séries et intégrales

Nous ne revenons pas sur la rédaction de la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, ni sur son interprétation graphique, qui ont dû être décrites dans votre cours. Ici, nous nous contentons de discuter de son cadre d'utilisation, et d'une variante (basée également sur une interprétation graphique) pour des fonctions problématiques.

4.1 ✓ Quand y songer ?

Dans deux circonstances, la comparaison entre séries et intégrales est LA méthode numéro 1 à laquelle songer, et il serait fautif de ne pas le savoir.

Quand il faut comparer série et intégrales SANS HÉSITER

1. Quand on veut majorer ou minorer une somme.
2. Quand on veut un équivalent asymptotique d'une somme.

L'intérêt est qu'au contraire des sommes, nous savons calculer un certain nombre d'intégrales. On est donc en mesure d'expliciter des majorants et minorants par cette méthode.

Une situation où l'on peut avoir besoin d'encadrer une somme (ou d'en donner un équivalent), *même si l'énoncé ne le dit pas explicitement*, est par exemple :

— si l'on veut étudier la nature d'une série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, où u_n est elle-même une somme ;

— si l'on doit démontrer l'intégrabilité d'une somme de série de fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, ou étudier sa convergence uniforme en encadrant le reste : voir le chapitre sur les suites de fonctions, *Méthodes*, section 4 (*Séries de fonctions et comparaison entre série et intégrales*).

Enfin, à la section 1 nous avons cité la comparaison entre une série et une intégrale comme un moyen d'étudier la nature d'une série lorsque les autres approches échouent. Si l'on craint de ne pas y penser au moment approprié, retenez ce cas très fréquent et important à avoir en tête : ← page 1

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}.$$

C'est une série de Bertrand, dont la nature échappe à la méthode « $n^\alpha u_n$ » : l'essayer pour vous en convaincre. En revanche la comparaison entre une série et une intégrale est ici pertinente, parce que la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\alpha}$ s'obtient par un calcul direct de primitive et de limite : l'intégrande est en effet de la forme $\frac{u'}{u^\alpha} = u'u^{-\alpha}$ (avec $u(t) = \ln(t)$), donc une primitive est $t \mapsto \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(\ln(t))^{\alpha-1}}$ (sauf si $\alpha = 1$). C'est ainsi que nous étudions la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.

Exercice 3.

1. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Montrer : $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln(n)} \underset{N \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(N))$.
3. Proposer des équivalents analogues pour les sommes partielles ou les restes de la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.2 ☢ Comment faire s'il n'y a pas de monotonie ?

Lorsque $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{C}$ n'est plus monotone ni même à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (ce qui empêche d'utiliser le théorème de comparaison), on ne peut plus procéder comme d'habitude pour comparer la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f$. Néanmoins tout n'est pas perdu ; dans ce cas, étudiez la différence suivante :

$$\sum_{n=n_0}^{N} f(n) - \int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{N} \int_n^{n+1} f(n)\mathrm{d}t - \sum_{n=n_0}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{N} \int_n^{n+1} (f(n) - f(t))\,\mathrm{d}t,$$

et essayez de démontrer que la série $\sum_{n\geqslant n_0}\int_n^{n+1}(f(n)-f(t))\,\mathrm{d}t$ converge (rappelons qu'une relation de domination ou un équivalent peut suffire : nul besoin d'espérer faire un calcul explicite). C'est le cas si $f(n)$ et $f(t)$ sont « proches » quand $t\in[n,n+1]$ et n le sont.

Si vous parvenez à en déduire cette convergence, vous en déduisez que la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et la suite $\left(\int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature : finalement, cela revient *presque* au même que d'habitude !

Exemple 3. Étudions la nature de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(\ln(n))}{n}$. On se convainc assez rapidement que les méthodes classiques échouent, même la transformation d'Abel. Il serait avantageux que la comparaison série-intégrale fonctionne, puisque la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t$ s'obtient trivialement avec le changement de variable $u=\ln(t)$ (qui donne l'intégrale divergente $\int_0^{+\infty}\cos(u)\mathrm{d}u$). Or on a, pour tout N au voisinage de l'infini :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(\ln(n))}{n}-\int_1^{N+1}\frac{\cos(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\left(\frac{\cos(\ln(n))}{n}-\frac{\cos(\ln(t))}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

Pour majorer la « différence petite » de l'intégrande, suivons les conseils de *L'art de la majoration* et utilisons l'inégalité des accroissements finis. Soit f l'application $t\mapsto\frac{\cos(\ln(t))}{t}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée vérifie :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad f'(t)=-\frac{\sin(\ln(t))+\cos(\ln(t))}{t^2}.$$

De cela on déduit : $\forall t\geqslant 1,\ |f'(t)|\leqslant\frac{2}{t^2}$. L'inégalité des accroissements finis implique :

$$\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{\cos(\ln(n))}{n}-\frac{\cos(\ln(t))}{t}\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant 2\int_n^{n+1}\frac{t-n}{n^2}\mathrm{d}t=\frac{2}{n^2}\left[\frac{(t-n)^2}{2}\right]_n^{n+1}=\frac{1}{n^2},$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 1}\int_n^{n+1}\left(\frac{\cos(\ln(n))}{n}-\frac{\cos(\ln(t))}{t}\right)\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge. On en déduit que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(\ln(n))}{n}$ et $\left(\int_1^{N+1}\frac{\cos(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ sont de même nature. Or cette suite diverge, puisque :

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad\int_1^{N+1}\frac{\cos(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\ln(N+1)}\cos(u)\mathrm{d}u=\sin\left(\ln(N+1)\right),$$

et cette quantité n'a pas de limite en l'infini (exercice). Par conséquent la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(\ln(n))}{n}$ diverge.

L'exercice suivant traite le cas très favorable que l'on espère souvent rencontrer en pratique.

Exercice 4. Démontrer que si $f:[n_0,+\infty[\to\mathbb{C}$ est de classe C^1 avec f' intégrable au voisinage de $+\infty$, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et la suite $\left(\int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant n_0}$ sont toujours de même nature.

Exercice 5. Démontrer que la suite $(\sin(\ln(n+1)))_{n\geqslant 0}$ diverge effectivement. Ce n'est pas si facile : sommes-nous si certain que $\ln(n+1)$ ne se rapproche pas indéfiniment des multiples de π, par exemple, de sorte que ce sinus converge vers 0 ? C'est la croissance lente du logarithme qui assure que non : même si le logarithme s'approche d'un multiple de π pour une certaine valeur de n, disons $k\pi$, alors quand n augmente il ne passe pas immédiatement à un autre multiple de π plus grand, mais par des valeurs intermédiaires $k\pi + \bigstar$ qui éloignent le sinus de 0.

Cela n'a bien sûr rien de rigoureux. Pour le formaliser, on vérifiera que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour $n = \left\lfloor \frac{e^{2N\pi}}{\sqrt{2}} \right\rfloor - 1$, le nombre $\sin(\ln(2(n+1))) - \sin(\ln(n+1))$ est minoré par une quantité trop grande pour que $(\sin(\ln(n+1)))_{n\geqslant 0}$ converge.

5 Calculer la somme d'une série convergente

Lorsqu'on vous demande de calculer des sommes de séries convergentes explicitement, pour le moment, nous n'avons pas d'autre moyen de procéder qu'en utilisant les deux types de sommes du cours qu'on sait expliciter : les sommes télescopiques, géométriques et exponentielles. Le second cas étant relativement facile à reconnaître, nous le mettons de côté. Il y a deux types de sommes qui ne sont pas visiblement télescopiques, mais qui s'y ramènent.

5.1 ✓ Sommes dont le terme général est une fraction rationnelle

Il s'agit de sommes telles que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{n^3-2n+4}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

ou plus généralement de la forme $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ (si elle existe) avec P et Q des polynômes. La méthode, pour les calculer, est de *décomposer en éléments simples* $\dfrac{P}{Q}$, ramenant le calcul de $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} \frac{P(n)}{Q(n)}$ au calcul d'une combinaison linéaire de sommes de la forme :

$$\sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{(an+b)^\alpha}, \quad \text{ou} \quad \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{(an^2+bn+c)^\beta}$$

(on écrit des sommes partielles pour éviter de manipuler des séries divergentes à cause des termes $\dfrac{1}{an+b}$). Dans le meilleur des cas, des télescopages apparaissent (il est parfois nécessaire de faire un changement d'indice de sommation), permettant d'obtenir une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} \frac{P(n)}{Q(n)}$. On prend ensuite $N \to +\infty$ pour en déduire $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$.

Plus synthétiquement :

Pour calculer une somme de la forme $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$

(1) On décompose en éléments simples $\dfrac{P}{Q}$, et on injecte cette décomposition dans $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} \frac{P(n)}{Q(n)}$ (**et non $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$, attention**).

(2) On sépare en plusieurs sommes, et on fait des changements d'indices de sorte à avoir le même terme général partout.

(3) On enlève les termes « en trop » de chaque somme, afin de pouvoir simplifier.

(4) On prend la limite quand $N \to +\infty$.

Les étapes 2 à 4 sont inutiles s'il apparaît d'emblée des sommes télescopiques.

Exemple 4. On a : $\dfrac{1}{X^2-1} = \dfrac{1}{(X-1)(X+1)} \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{X+1}\right)$. Donc, pour $N \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}\right) \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} - \sum_{n'=4}^{N+2}\frac{1}{n'-1}\right) && (n'-1 = n+1 \iff n' = n+2) \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) && \text{(n' est une variable muette, il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \underset{N\to+\infty}{o}(1)\right),
\end{aligned}$$

ce dont on déduit : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} \overset{(4)}{=} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$.

Exercice 6. Imiter cette méthode pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n}$.

Néanmoins cette technique n'est pas infaillible. Par exemple, vous ne parviendrez pas à calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$. Voir la section 5.5 pour un complément de cette méthode.

5.2 ✓ Sommes dont le terme général est le logarithme d'une fraction rationnelle

Comme le logarithme vérifie : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$, il y a fort à parier qu'en écrivant l'argument du logarithme comme un quotient, puis en utilisant cette propriété, il apparaisse un télescopage (ou presque).

Exemple 5. Pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N} \left(\ln(n-1) - \ln(n)\right) = -\ln(N).$$

5.3 ✓ Sommes de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$, où P est polynomiale

Sans $P(n)$ dans le terme général, on reconnaît la somme exponentielle : $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Il s'avère qu'une somme de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$ peut toujours s'y ramener ! En effet, remarquons d'abord que pour les polynômes de la forme :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad P_j = \prod_{i=0}^{j-1} (X - i) = X(X-1)\cdots(X-j+1)$$

(on a donc $P_0 = 1$ par convention sur un produit vide), la réduction à une somme exponentielle est triviale, du fait que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_j(n)}{n!} x^n = \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n(n-1)\cdots(n-j+1)(n-j)!} x^n = \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-j)!} = \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{n'+j}}{n'!} = x^j e^x.$$

Or il s'avère que la famille $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{R}[X]$ (pourquoi ?), donc n'importe quel polynôme peut s'exprimer à l'aide d'iceux.

Ainsi, pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$ avec P un polynôme réel de degré k, on détermine des réels $\alpha_0,\dots,\alpha_k$ tels que : $P=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_jP_j$, et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\frac{P_j(n)}{n!}x^n=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P_j(n)}{n!}x^n=\sum_{j=0}^{k}\alpha_jx^je^x,$$

et c'est gagné.

Exemple 6. Calculons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (nous vous laissons vérifier la convergence, elle est facile... et peut d'ailleurs découler du calcul qui suit si l'on rédige bien). On a :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n&=x^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}\\&=x^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\&=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\\&=(x^2+x)e^x.\end{aligned}$$

Déterminer les coefficients α_j. Plutôt que de passer par une résolution laborieuse de système linéaire après identification des coefficients, vous pouvez déterminer les coefficients α_j de la relation : $P=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_jP_j$, par des évaluations bien choisies. On remarque en effet que pour tout $j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, le polynôme P_j admet pour racines tous les entiers de 0 à $j-1$ (et P_0 n'admet pas de racine puisque c'est le polynôme constant égal à 1). Ainsi, en évaluant la relation en 0, la relation ci-dessus devient : $P(0)=\alpha_0$. On a immédiatement déterminé α_0. Évaluer en 1 donne ensuite : $P(1)=\alpha_0+\alpha_1P_1(1)=\alpha_0+\alpha_1$, ce qui permet d'exprimer α_1 en fonction de $P(1)$ et de α_0 qui a déjà été déterminé. Et ainsi de suite.

Le coefficient α_k peut s'obtenir directement en comparant les coefficients dominants de P et de P_k.

Exercice 7. Déterminer rapidement des coefficients a, b et c tels que : $2X^2+X+41=a+bX+cX(X-1)$.

Si l'on n'a pas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$, mais $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^{2n}$, ou $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}(-1)^nx^n$, ou plus généralement une somme de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}a^nx^{bn},$$

il suffit de regrouper toutes les exponentiations, afin d'avoir quelque chose de la forme : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}\bigstar^n$, et l'on se ramène à la situation ci-dessus.

Exemple 7. Calculons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (on vous laisse justifier la convergence, qui est triviale en utilisant la série exponentielle). On se ramène à la série exponentielle en écrivant :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=e^{-x^2}.$$

5.4 Sommes indexées par une classe de congruence

Si vous savez calculer une somme de la forme : $\sum_{n\in\bigstar} u_n$, et qu'un exercice vous demande de calculer :

$$\sum_{k\in\bigstar} u_{2k}, \quad \sum_{k\in\bigstar} u_{2k+1}, \quad \sum_{k\in\bigstar} u_{3k+1}, \quad \sum_{n\in\bigstar} u_{4k+3}, \quad \text{etc.},$$

notons que ces sommes sont en fait « extraites » de la somme $\sum_{n\in\bigstar} u_n$, au sens où on a restreint l'indexation à un ensemble d'entiers n vérifiant une certaine relation de congruence. Par exemple, les sommes ci-dessus peuvent se réécrire alternativement ainsi :

$$\sum_{\substack{n\in\clubsuit \\ n \text{ pair}}} u_n, \quad \sum_{\substack{n\in\clubsuit \\ n \text{ impair}}} u_n, \quad \sum_{\substack{n\in\clubsuit \\ n\equiv 1[3]}} u_n, \quad \sum_{\substack{n\in\clubsuit \\ n\equiv 3[4]}} u_n.$$

Plus généralement, on consacre cette partie au calcul de sommes de la forme $\sum_{\substack{n\in\clubsuit \\ n\equiv a[b]}} u_n$. Il est *parfois* possible de les exprimer à l'aide de $\sum_{n\in\bigstar} u_n$, vous ramenant à une somme que vous savez calculer. C'est ce qu'on illustre ci-dessous.

5.4.1 Cas d'une somme indexée par des entiers pairs, par des entiers impairs

Si l'on vous demande de calculer une somme indexée par des entiers impairs (ou pairs, mais le premier cas cité est plus fréquent car plus problématique ; les exemples 8 et 11 permettent de comprendre pourquoi), → page 15 regardez si les termes pairs et les termes impairs vérifient des relations particulières avec le terme général $(*)$, puis utilisez éventuellement la relation importante :

$$\sum_{n \text{ pair}} u_n + \sum_{n \text{ impair}} u_n = \sum_{n} u_n. \qquad (\dagger)$$

Ce conseil peut être particulièrement efficace si l'on est en présence d'un $(-1)^n$ (son signe dépend de la parité), comme on le voit dans l'exemple 11.

Attention à d'abord utiliser cette relation avec les sommes partielles, car elle est parfois fausse pour les sommes avec une infinité de termes, comme le montre le calcul suivant (faux) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}.$$

Vu que la série harmonique diverge, il apparaît la différence $+\infty - \infty$. C'est problématique.

Le recours aux sommes partielles est illustré dans l'exemple 11. → page 15

Néanmoins, lorsqu'il y a CONVERGENCE ABSOLUE (c'est-à-dire lorsque la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable), ou lorsque les termes sont tous POSITIFS, le théorème de sommation par paquets permet d'obtenir directement cette scission en deux sommes : prendre les paquets $I_0 = 2\mathbb{N}$ et $I_1 = 2\mathbb{N}+1$.

Exemple 8. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Voyons comment en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs (et convergente par ailleurs), donc par le théorème de sommation par paquets on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \overset{(\dagger)}{=} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}.$$

La lettre ℓ est une variable muette et il ne coûte rien de la remplacer par n. Or : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} \overset{(*)}{=} \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
On en déduit : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 8. On admet : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ avec la méthode ci-dessus.

Parfois la relation (†) est insuffisante et nous avons aussi besoin de connaître $\sum_{n \text{ pair}} u_n + \sum_{n \text{ impair}} u_n$ pour aller plus loin. Cela rentre cependant dans le cadre de la section suivante et je n'en parle donc pas davantage ici.

5.4.2 ☢ Autres congruences : usage d'une « formule d'orthogonalité »

La stratégie développée ici permet de calculer des sommes de la forme $\sum_{\substack{n \in \clubsuit \\ n \equiv a[b]}} u_n$, à la condition nécessaire que vous sachiez calculer $\sum_n u_n z^n$ pour suffisamment de valeurs de z COMPLEXES. C'est le cas de plusieurs sommes usuelles : la somme exponentielle, géométrique, la formule du binôme. Avec un peu plus de travail, on peut en avoir d'autres *via* dérivation ou intégration de sommes usuelles.

La clé, qui vous permet d'exprimer la première somme en fonction de l'autre, est ce que j'appelle (mais l'idée ne vient pas de moi : cela vient de la théorie des caractères) la « formule d'orthogonalité » suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{b-1} e^{\frac{2i\pi k}{b}(n-a)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \equiv a \bmod b, \\ 0 & \text{si} \quad n \not\equiv a \bmod b. \end{cases}$$

Exercice 9. Démontrer cette formule.

Autrement dit : l'application $n \mapsto \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{b-1} e^{\frac{2i\pi k}{b}(n-a)}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers congrus à a modulo b. Je la note $\mathbb{1}$ ci-dessous pour abréger. Cette observation permet d'écrire :

$$\sum_{\substack{n \in \clubsuit \\ n \equiv a[b]}} u_n = \sum_{n \in \clubsuit} \mathbb{1}(n) u_n = \sum_{n \in \clubsuit} \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{b-1} e^{\frac{2i\pi k}{b}(n-a)} u_n = \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{b-1} e^{-\frac{2i\pi k a}{b}} \sum_{n \in \clubsuit} u_n \left(e^{\frac{2i\pi k}{b}}\right)^n.$$

En conclusion : si l'on sait calculer $\sum_{n \in \clubsuit} u_n z^n$ pour tout z égal à une racine b^{e} de l'unité, alors le membre de droite n'a plus aucun mystère pour nous et on en déduit la valeur de $\sum_{\substack{n \in \clubsuit \\ n \equiv a[b]}} u_n$.

Bien entendu, il faut savoir démontrer la formule d'orthogonalité utilisée (nul besoin de le faire dans le cas général : seulement dans celui nécessaire au calcul de notre somme). Je ne le fais pas dans les exemples ci-dessous et c'est au lecteur de s'en charger.

Exemple 9. Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)!}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1 + i^{n-1} + i^{2(n-1)} + i^{3(n-1)}}{4} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \equiv 1 \bmod 4, \\ 0 & \text{si} \quad n \not\equiv 1 \bmod 4. \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n+1)!}=\sum_{\substack{n=0\\n\equiv 1[4]}}^{+\infty}\frac{1}{n!}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+i^{n-1}+i^{2(n-1)}+i^{3(n-1)}}{4}\frac{1}{n!}\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\\&=\frac{e-e^{-1}}{4}+\frac{e^i-e^{-i}}{4i}\\&=\frac{\operatorname{sh}(1)}{2}+\frac{\sin(1)}{2},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 10.

1. Obtenir de même $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n+k)!}$ pour tout $k\in\{0{,}2{,}3\}$.
2. Produire une autre démonstration plus simple pour tout $k\in\{0{,}1{,}2{,}3\}$.

Exemple 10. Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\frac{1+j^k+j^{2k}}{3}=\begin{cases}1 & \text{si } k\equiv 0 \bmod 3,\\ 0 & \text{si } k\not\equiv 0 \bmod 3.\end{cases}$
Comme d'habitude, j désigne le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}=\sum_{\substack{k=0\\k\equiv 0[3]}}^{3n}\binom{3n}{k}=\sum_{k=0}^{3n}\frac{1+j^k+j^{2k}}{3}\binom{3n}{k}=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}+\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}j^k+\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}j^{2k}\right).$$

On sait simplifier toutes ces sommes grâce à la formule du binôme de Newton. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}=\frac{2^{3n}+(1+j)^{3n}+(1+j^2)^{3n}}{3}.$$

Exercice 11.

1. Achever ce calcul pour obtenir une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}$ ne faisant intervenir que des sommes, produits et puissances de nombres rationnels.
2. Calculer de même $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k+2}$. Interprétation combinatoire de ce calcul ?

Exercice 12. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

1. Décomposer $\dfrac{1}{1-X^n}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ en quelques secondes.
2. On pose : $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, simplifier $\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n-1}\left(\omega^k-\omega^j\right)$ grâce à la question précédente.

5.4.3 Autres applications de la formule d'orthogonalité

L'idée de ne retenir que les entiers d'une classe de congruence donnée peut intervenir naturellement dans bien d'autres contextes que le calcul de sommes. Le cadre le plus naturel est évidemment arithmétique. Ainsi vous trouverez dans le document *Méthodes* d'arithmétique une autre application de la formule d'orthogonalité, au dénombrement de solutions d'équations modulo p.

Un autre exemple où cette idée peut être fructueuse est dans la résolution de certains systèmes linéaires, dits « circulants ». Un exemple est le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 1, \\ a & + & jb & + & j^2c & = & 0, \\ a & + & j^2b & + & jc & = & 0, \end{array}\right.$$

d'inconnue $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Plus généralement, il s'agit d'un système linéaire associé à la matrice circulante $\left(\left(e^{\frac{2i\pi k\ell}{n}}\right)\right)_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

En utilisant la formule d'orthogonalité pour $n = 3$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1 + j^k + j^{2k}}{3} = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & k \equiv 0 \bmod 3, \\ 0 & \text{si} & k \not\equiv 0 \bmod 3, \end{array}\right.$$

On remarque que les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + jL_2 + j^2L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 + j^2L_2 + jL_3$ dans le système ci-dessus donnent respectivement :

$$3a = 1, \quad 3c = 1, \quad 3b = 1,$$

ce qui le résout en quelques secondes.

Comme ce n'est pas le sujet du document, je n'approfondis pas la question, mais l'étudiant curieux pourra essayer de comprendre pourquoi cela rentre parfaitement dans l'idée qu'avec ces opérations et la formule d'orthogonalité, on veut ne retenir qu'une seule classe de congruence modulo n.

5.4.4 ☢ Nombres premiers indexés par une classe de congruence

Des problèmes de théorie analytique des nombres expriment la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ à l'aide de sommes indexées par des nombres premiers. La relation plus fréquente est :

$$\forall s > 1, \quad \ln(\zeta(s)) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{ks}} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s} + \bigstar,$$

où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. Je ne la justifie pas, c'est un gros exercice en soi (et si vous n'avez jamais entendu parler de telles relations, cette section n'est pour l'instant pas très utile à lire). Une application classique de ce genre de relation est la divergence de la série des inverses des nombres premiers, et on peut même être plus précis en donnant un équivalent quand $s \to 1$ de la somme $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}$, ou encore un équivalent quand $x \to +\infty$ de la somme $\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant x}} \frac{1}{p}$ (mais c'est plus difficile).

Si l'on veut étudier une somme de la forme : $\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\equiv a[b]}} \frac{1}{p^s}$, en vue d'en déduire le même genre de conclusion, on aimerait comme dans la section 5.4.2 se servir de la somme : $\sum_{k=0}^{b-1} e^{\frac{2i\pi k}{b}(n-a)}$, qui vaut zéro pour tout ← page 11 entier n hors de la classe de congruence de a modulo b, en écrivant quelque chose de cet acabit :

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\equiv a[b]}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{b}\sum_{\ell=0}^{b-1} e^{\frac{2i\pi\ell}{b}(p-a)}\right) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{ks}} = \frac{1}{b}\sum_{\ell=0}^{b-1} e^{-\frac{2i\pi\ell a}{b}} \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2i\pi\ell p}{b}}}{kp^{ks}}.$$

Problème : cette dernière somme ne peut absolument pas être écrite à l'aide de la fonction ζ. Cette approche marchait bien tant que l'on manipulait des sommes usuelles de la forme $\sum_n u_n z^n$: il suffisait alors d'intégrer le terme exponentielle à la variable z pour reconnaître une somme connue. Le fait qu'ici, la somme soit de la forme $\sum_n u_n n^{-z}$ (avec la variable z dans l'exposant) empêche cette approche d'aboutir.

Il existe néanmoins une solution que l'algébriste formulerait ainsi : on remplace les caractères additifs par des caractères multiplicatifs. En termes moins savants : ce sont les applications b-périodiques $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, nulles en les entiers non premiers à b et vérifiant : $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$, qui remplacent avantageusement l'exponentielle de la formule d'orthogonalité ci-dessus. On peut démontrer en effet qu'ils vérifient, si a est premier avec b, d'inverse a' modulo b :

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_\chi \chi(na') = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \equiv a \bmod b, \\ 0 & \text{si} \quad n \not\equiv a \bmod b, \end{cases}$$

où φ est l'indicatrice d'Euler. Si l'on dispose d'une telle relation (qui à elle seule mobiliserait une très grande partie d'un problème écrit... voir par exemple la partie II de l'épreuve de Mathématiques D de l'ENS en 2019, qui la démontre dans un cas particulier), alors on peut imiter la stratégie de la section 5.4.2 pour exprimer une somme indexée par les nombres premiers $p \equiv a \bmod b$ en fonction de la fonction ζ, et de ce qu'on appelle des fonctions L, définies ainsi :

$$s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

C'est la raison d'être de ces fonctions que vous croisez dans certains problèmes et exercices d'arithmétique.

5.5 Sommes se calculant à l'aide de la constante d'Euler

Nous mentionnons une méthode de calcul des sommes dont le terme général est une fraction rationnelle, dans la section 5.1. Mais cette méthode peut échouer... En effet, il n'apparaît pas nécessairement des sommes télescopiques, ni qui se simplifient après un changement d'indice. Par exemple :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{2n-1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Vous aurez beau faire, vous ne pouvez pas simplifier cette différence par des manipulations élémentaires ! On peut certes exprimer $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1}$ en fonction de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ (voir la section 5.4.1), pour obtenir : ← page 10

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}, \tag{1}$$

mais on n'est pas plus avancé : il faut en savoir plus sur le comportement asymptotique de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ quand $N \to +\infty$.

Nous savons certes démontrer, grâce à une comparaison série-intégrale :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N),$$

ce qu'on peut réécrire : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \underset{N\to+\infty}{o}(\ln(N))$ (je passe à un développement asymptotique pour pouvoir l'injecter dans la différence de (1), parce qu'*on ne somme pas les équivalents*), mais c'est insuffisant pour aller plus loin. En effet, injecté dans (1), cela donne :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\left(\ln(2N) + \underset{N\to+\infty}{o}(\ln(N)) - \ln(N) + \underset{N\to+\infty}{o}(\ln(N))\right) = 2(\ln(2) + \underset{N\to+\infty}{o}(\ln(N))).$$

Comme on ne sait rien de la limite du terme d'erreur $\underset{N\to+\infty}{o}(\ln(N))$ quand $N \to +\infty$, il est impossible de poursuivre (et d'en déduire que la limite est $2\ln(2)$) !

La solution réside alors dans le résultat suivant : un exercice classique est qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \gamma.}$$

Cette limite γ est ce qu'on appelle la *constante d'Euler*. **Il faut savoir démontrer son existence**. Nous proposons dans l'exercice suivant une des approches possibles, qui est un raffinement de la comparaison entre $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ et $\displaystyle\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t}$ utilisée pour obtenir $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$.

Exercice 13. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Montrer : $\forall k \geqslant 2$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est minorée par 0.
3. Déduire de cette même inégalité que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$: $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Conclure.

Voici alors comment poursuivre : une fois que nous avons exprimé les sommes partielles de la somme à calculer, *uniquement à l'aide de termes de la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\geqslant 1}$ *et de fonctions usuelles*, il ne reste plus qu'à prendre la limite quand $N \to +\infty$ (sachant que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers γ) pour obtenir le résultat.

Si l'on ne veut pas introduire la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on peut se contenter d'utiliser la formule équivalente : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + \underset{N\to+\infty}{o}(1)$.

Exercice 14.

1. Vérifier l'identité ci-dessus : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n-1)} = 2\left(\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)$.
2. Compléter ce qui précède pour exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n-1)}$ pour tout $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ en fonction du logarithme et de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$.

Vous pouvez combiner les remarques ci-dessus avec celles de la section 5.4.1, notamment en présence de $(-1)^n$, comme on le voit dans l'exemple suivant. ← page 10

Exemple 11. Soit $N \geqslant 1$ un entier. On a :

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n} = \left(-\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{2N}\frac{1}{n} + \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N}\frac{1}{n}\right) + \left(\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{2N}\frac{1}{n} + \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N}\frac{1}{n}\right) = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N}\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{N}\frac{2}{2k} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k},$$

et on en déduit, grâce à ce qui précède :

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n} = u_N + \ln(N) - (u_{2N} + \ln(2N)).$$

Exercice 15. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

5.6 ☢ Autres sommes

Il n'y a pas de méthode systématique (de nombreuses sommes simples sont hors de portée même des mathématiciens professionnels, par exemple $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$), aussi je ne veux pas encombrer le propos en faisant une liste de sous-cas trop longue. Voici quelques conseils de méthodologie pour vous aider face à une situation inédite, donc plus délicate :

1. N'inventez pas de formule magique !
2. Calculez les premières sommes partielles ; elles vous permettront parfois de comprendre ce qu'il s'y passe, avec plusieurs simplifications qui n'étaient pas visibles au premier abord.
3. La transformation d'Abel permet *parfois* de calculer des sommes (section 8.2). → page 25
4. Vous saurez calculer davantage de sommes à l'aide des séries entières, notamment par dérivation ou intégration de sommes connues.

Exemple 12. Considérez cet exemple :

$$\sum_{n=1}^{5}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\ln\left(\frac{5}{4}\right)-\ln\left(\frac{6}{5}\right) = \ln\left(\frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 2\times 4\times 4\times 6}\right).$$

Il semble apparaître progressivement le produit de tous les entiers impairs au carré au numérateur, et le produit de tous les entiers pairs au carré au dénominateur ; on sait exprimer tout cela à l'aide de factorielles, et en déduire le comportement asymptotique à l'aide de la formule de Stirling.

Exercice 16.

1. Conjecturer une formule générale pour $\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ou $\sum_{n=1}^{2N+1}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, puis la démontrer (*éventuellement par récurrence*).
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; vous aurez besoin de la formule de Stirling.

Quelques remarques pour conclure :

— si l'on vous demande, dans une même question, d'à la fois montrer la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, et de calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, il est en général inutile de démontrer la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *via* les relations de comparaison : soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est trivialement combinaison linéaire de séries convergentes « usuelles » et de sommes explicites (séries télescopiques, géométriques, et plus tard les séries entières) ; soit on peut démontrer par un calcul explicite que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$ existe et est finie, démontrant par là la convergence : gagnez du temps !

6 ✓ Donner une valeur approchée de la somme d'une série ; encadrement du reste

6.1 Comment encadrer le reste ?

On approche la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ par la somme finie $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ pour un entier N convenable. Pour savoir quelle valeur de N est pertinente selon le degré de précision qu'on veut (si l'on veut une valeur approchée à 10^{-2} près, faut-il $N = 100$? $N = 1000$? Plus ? Moins ?), il faut se concentrer sur le reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

Imaginons qu'on veuille approcher $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à 10^{-k} près. Il suffit alors de déterminer N tel que : $|R_N| \leqslant 10^{-k}$. Si cette condition est remplie alors, comme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N$, on obtient :

$$S_N - 10^{-k} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant S_N + 10^{-k}.$$

Ainsi, le calcul explicite de S_N (facile car S_N est une somme finie) donne un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et donc une valeur approchée.

Pour obtenir cet encadrement du reste, nous avons à notre disposition deux méthodes :

— la comparaison entre série et intégrales, où l'on somme l'encadrement $\int_n^{n+1} f \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f$ de $N+1$ à $+\infty$, pour obtenir :
$$\int_{N+1}^{+\infty} f \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_N^{+\infty} f \ :$$
c'est intéressant si l'on connaît des primitives de f ;

— le théorème spécial des séries alternées, très pratique puisqu'il majore la valeur absolue du reste par son premier terme.

Dans le cas particulier où $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ s'obtient à partir d'une somme de Taylor (voir chapitre sur les séries entières), le reste s'écrit comme une intégrale, grâce à la formule de Taylor avec reste intégral (qui porte bien son nom...). Cela fournit une solution alternative pour majorer le reste.

Encadrement du reste

1. **Série alternée** $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$: $|R_N| \leqslant |u_{N+1}|$ (si elle vérifie le théorème spécial).
2. **Série** $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$: $|R_N| = \left| x^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(tx)\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\|f^{(N+1)}\|_\infty$.
3. **Série** $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ **avec** f **décroissante** : $\int_{N+1}^{+\infty} f \leqslant R_N \leqslant \int_N^{+\infty} f$.

6.2 ☢ Application à des questions de rationalité ou transcendance

La plupart des constantes remarquables s'écrivent comme une somme infinie de rationnels :

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}, \quad \pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1}, \quad \ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}, \text{ etc.}$$

Ainsi les sommes partielles donnent des valeurs approchées de ces constantes par des nombres rationnels, tandis que le reste mesure l'écart à ces rationnels. À cet égard, il permet parfois de produire des démonstrations d'irrationalité, à condition de converger « très vite » (ce qui n'est pas le cas des deux sommes alternées ci-dessus, mais c'est moins clair pour la dernière somme).

Voyons où apparaît cette condition de convergence rapide : soit x un nombre dont on veut montrer qu'il est irrationnel, et soit S_N la somme partielle d'indice N d'une série de rationnels $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ dont la somme donne x (c'est-à-dire : $\lim_{N\to+\infty} S_N = x$). On raisonne par l'absurde en supposant que x est un nombre rationnel. Alors pour un entier M_N bien choisi dépendant des dénominateurs de x et S_N, le nombre

$M_N(x - S_N)$ est un entier parce qu'on a simplifié les dénominateurs. Mais on a aussi : $M_N(x - S_N) = M_N R_N$, où R_N est le reste d'indice N de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$. Par conséquent, si R_N « converge trop vite » (vers zéro), $M_N R_N$ aussi tend vers 0 quand $N \to +\infty$ et on a pour tout N suffisamment grand : $M_N R_N \in]0,1[$. Impossible vu que c'est un entier d'après ce qui précède, et cela démontre par l'absurde que x est irrationnel.

Mais pour juger de la vitesse de convergence, encore faut-il savoir l'encadrer.

Exercice 17. Montrer que cos(1) et sin(1) sont des nombres irrationnels par cette méthode (utiliser un développement en série entière).

Dans des cas remarquables (de convergence « encore plus rapide ! »), cela permet de démontrer que des nombres sont *transcendants* (c'est-à-dire qu'ils ne sont solution d'aucune équation polynomiale non triviale à coefficients entiers). Un exemple célèbre est le nombre de Liouville $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$.

7 ✓ Étudier des suites en passant par des séries télescopiques

On rappelle le lien suite-série, qui permet d'exprimer toute suite à l'aide d'une somme partielle de série télescopique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

Ce lien permet d'utiliser les théorèmes sur les séries afin d'en déduire des résultats sur les suites. C'est ainsi qu'on a montré dans le cours que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge. Dans le cas où $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ, on a une autre écriture potentiellement plus intéressante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k).$$

Pour comprendre l'intérêt de cette écriture alternative, notons que grâce au théorème de sommation des relations de comparaison (qui vaut pour les *restes* si l'on est dans le cas convergent), un équivalent asymptotique quand $n \to +\infty$ de $u_{n+1} - u_n$ en entraîne un pour u_n. Par conséquent, si $u_{k+1} - u_k$ a une expression plus simple que u_n (au point qu'on arrive à avoir un équivalent de $u_{k+1} - u_k$ alors qu'on n'y parvenait pas avec u_n), cette relation permet d'obtenir un développement asymptotique de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Les prochaines sous-sections développent quel type de suites rentrent dans cette catégorie (avoir $u_{k+1} - u_k$ plus simple que u_n), de sorte que le lien suite-série soit pertinent pour étudier leur convergence, obtenir un développement asymptotique, etc.

7.1 Suites définies à l'aide de sommes partielles

C'est le cas le plus classique. Si l'on a : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \bigstar$ + etc., où la somme n'est pas simplifiable, alors $u_{n+1} - u_n$ élimine la somme en ne conservant que son terme correspondant à $k = n + 1$: cela nous ramène en principe à une étude plus simple.

Exemple 13. On sait démontrer de diverses façons, par exemple par une comparaison série-intégrale ou *via* les sommes de Riemann, que l'on a : $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{3/2}$. Voyons comment le lien suite-série permet d'affiner la comparaison entre cette somme et cet équivalent asymptotique. Nous avons déjà expliqué ci-dessus pourquoi c'est pertinent. Posons donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} - \frac{2}{3} n^{3/2}$, et calculons $u_{n+1} - u_n$ pour tout n suffisamment grand :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sqrt{n+1}-\frac{2}{3}\left((n+1)^{3/2}-n^{3/2}\right)\\ &= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{2n^{3/2}}{3}\left(1+\frac{3}{2n}+\frac{3}{8n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

donc : $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{n}} > 0$. Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{4\sqrt{n}}$ diverge donc, par le théorème de sommation des équivalents, on a :

$$u_n-u_0=\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4\sqrt{k}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Ce dernier équivalent peut lui aussi s'obtenir par une comparaison série-intégrale. On a donc montré :

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}=\frac{2}{3}n^{3/2}+\frac{\sqrt{n}}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{n}\right).$$

Pour affiner ce développement, il suffit de poursuivre, et je vais le faire afin d'illustrer une situation où l'on utilise la sommation des équivalents entre restes de séries convergentes. Posons : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=u_n-\frac{\sqrt{n}}{2}$. Au voisinage de $+\infty$, on a, en poussant un cran plus loin le développement de $u_{n+1}-u_n$ ci-dessus (si on avait anticipé qu'on allait chercher d'autres termes du développement asymptotique, on l'aurait fait dès le début à un ordre plus élevé) :

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n-\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} &= \frac{1}{4\sqrt{n}}-\frac{1}{12n^{3/2}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)-\frac{\sqrt{n}}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{48n^{3/2}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

donc : $v_{n+1}-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{48n^{3/2}} < 0$. Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{48n^{3/2}}$ converge, donc par le théorème de comparaison la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_n-v_{n+1})$ converge aussi, et par le lien suite-série il en est de même de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$: c'est la première information. Mieux : si l'on note ℓ cette limite alors, par le théorème de sommation des relations de comparaison on a :

$$v_n-\ell=\sum_{k=n}^{+\infty}(v_k-v_{k+1})\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{48k^{3/2}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{24\sqrt{n}}.$$

En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\frac{2}{3}n^{3/2}+\frac{\sqrt{n}}{2}+\ell+\frac{1}{24\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

On peut continuer ainsi *ad vitam æternam.*

Exercice 18.

1. Démontrer qu'on a effectivement : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{3/2}$.
2. Compléter les détails qui ont été omis.
3. Obtenir les termes suivants du développement asymptotique. S'arrêter au moment d'être lassé.
4. Généraliser, en remplaçant $\sqrt{k}$ par k^α avec $\alpha > -1$ (pourquoi cette inégalité ?).

7.2 Suites définies à l'aide de produits, puissances, factorielles, etc.

L'utilisation du lien suite-série n'a *a priori* pas lieu de fonctionner si u_n ne s'exprime pas à l'aide de sommes, mais à l'aide de produits. Pas grave : on se souvient que l'on connaît une fonction qui transforme les produits en somme, et c'est à ces sommes-là qu'on applique le principe du lien suite-série.

C'est-à-dire, si $u_n = \prod_{k=0}^{n} \bigstar \times \text{etc.}$ alors, sous réserve que tout soit strictement positif, on pose : $v_n = \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(\bigstar) + \ln(\text{etc.})$, et on étudie $(v_n)_{n\geqslant 0}$ grâce au lien suite-série. C'est pertinent pour la même raison que dans le paragraphe ci-dessus : on simplifie la somme en faisant la différence $v_{n+1} - v_n$, et on a donc bon espoir de se retrouver avec une quantité facile à étudier asymptotiquement.

On fera cependant attention au fait que, pour revenir à $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ensuite, il faut composer avec l'exponentielle, ce qui n'est en général pas licite avec des équivalents asymptotiques. En revanche, si l'on a un développement asymptotique se terminant par un $\underset{n\to+\infty}{o}(1)$, alors l'exponentielle de ce terme tend vers $e^0 = 1$ et ce n'est plus gênant.

Notez que les puissances et les factorielles étant aussi définis comme des produits, ils font partie des suites simplifiables par cette méthode. Il est très classique de démontrer une partie de la formule de Stirling en montrant que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}\right)_{n\geqslant 1}$ converge grâce au lien suite-série appliqué à la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$.

Exemple 14. On cherche un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$, de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k^k}$. Conformément à ce qui précède, il vaut mieux passer par :

$$(\ln(u_n))_{n\geqslant 1} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)\right)_{n\geqslant 1}$$

et utiliser le lien suite-série. Mieux : si on essaie d'étudier $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, on risque d'être contrarié par les $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$ qui ne se simplifient pas, donc on va plutôt étudier $(v_n)_{n\geqslant 1} = (n\ln(u_n))_{n\geqslant 1} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)\right)_{n\geqslant 1}$.

Faisons. Une comparaison série-intégrale permet de montrer qu'on a : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2\ln(n)}{2}$. Simplifions la différence en suivant une démarche analogue à celle de l'exemple 13. Pour tout n au voisinage de $+\infty$: ← page 18

$$\begin{aligned}\left(v_{n+1} - \frac{(n+1)^2\ln(n+1)}{2}\right) - \left(v_n - \frac{n^2\ln(n)}{2}\right) &= (n+1)\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - (2n+1)\ln(n+1)\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{n^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2} < 0.\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2}$ diverge grossièrement. Par le théorème de sommation des équivalents, on a donc :

$$v_n - \frac{n^2\ln(n)}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\left(\left(v_{k+1} - \frac{(k+1)^2\ln(k+1)}{2}\right) - \left(v_k - \frac{k^2\ln(k)}{2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^2}{4}.$$

Cela permet d'en déduire un développement asymptotique de $\ln(u_n)$ (et un équivalent), mais pas un équivalent de u_n, parce qu'on ne saurait rien faire du terme $e^{\underset{n\to+\infty}{o}(n^2)}$. Il suffit de poursuivre, en appliquant le lien suite-série à $w_n = v_n - \dfrac{n^2\ln(n)}{2} + \dfrac{n^2}{4}$, et ainsi de suite. On a, en reprenant partiellement le calcul ci-dessus :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{n^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{2n+1}{4}\\
&= \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{2n+1}{4}\\
&= \frac{\ln(n+1)}{2} + \frac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2} > 0.
\end{aligned}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(n)$ diverge grossièrement, donc par le théorème de sommation des équivalents :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\ln(n)}{2}.$$

Il reste à appliquer cette méthode une dernière fois. Faites-le. On obtient au bout du compte :

$$v_n = \frac{n^2\ln(n)}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{n\ln(n)}{2} + \underset{n\to+\infty}{O}(1),$$

et donc :

$$\ln(u_n) = \frac{(n+1)\ln(n)}{2} - \frac{n}{4} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce dont on déduit, comme $e^{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$:

$$u_n = e^{\frac{(n+1)\ln(n)}{2} - \frac{n}{4} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)} = n^{\frac{n+1}{2}}e^{-\frac{n}{4}}e^{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{n+1}{2}}e^{-\frac{n}{4}}.$$

Exercice 19. Compléter les détails qui ont été omis :

1. Montrer : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2\ln(n)}{2}$.
2. Montrer : $\dfrac{1}{2}\ln(n+1) - \dfrac{n^2}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{n}{2}$.
3. Montrer : $\sum\limits_{k=1}^{n} k \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{2}$, et : $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.
4. Montrer : $v_n = \dfrac{n^2\ln(n)}{2} - \dfrac{n^2}{4} + \dfrac{n\ln(n)}{2} + \underset{n\to+\infty}{O}(1)$. Courage !

Exercice 20. Utiliser le lien suite-série pour démontrer la convergence de la suite $\left(\dfrac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}{n!}\right)_{n\geqslant 1}$.

7.3 Suites vérifiant : $u_{n+1} = f(u_n)$, et équivalents asymptotiques

De manière assez surprenante (je crois ?), le lien suite-série permet également d'obtenir des équivalents asymptotiques de suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant une relation de récurrence d'ordre 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$, du moins lorsque la fonction f est suffisamment régulière pour permettre des développements limités en 0, et lorsque la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (qui doit donc être point fixe de f).

La stratégie est à chaque fois de faire un développement asymptotique de $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = f(u_n)^\alpha - u_n^\alpha$, avec α un réel à déterminer ultérieurement. C'est possible par composition, vu que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si on arrive à une égalité du type :

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = cu_n^{\alpha+k} + \text{termes négligeables}$$

avec $c \neq 0$, alors on pose $\alpha = -k$, de sorte que : $u_{n+1}^{-k} - u_n^{-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} c$. Par le lien suite-série et le théorème de sommation des relations de comparaison (ou son corollaire le théorème de Cesàro), on en déduit un équivalent quand $n \to +\infty$ de u_n^{-k}, et par suite de u_n.

Exemple 15. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. Vous savez démontrer grâce aux méthodes de 1[re] année que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Appliquons la méthode ci-dessus pour trouver un équivalent asymptotique de cette suite. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et n au voisinage de $+\infty$. Alors u_n est au voisinage de 0, ce qui permet de faire un développement asymptotique de $\arctan(u_n)$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \arctan(u_n)^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^3\right)\right)^\alpha - u_n^\alpha &= u_n^\alpha\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^2\right)\right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &= u_n^\alpha\left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^2\right)\right) - u_n^\alpha \\ &= -\frac{\alpha}{3}u_n^{2+\alpha} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^{2+\alpha}\right). \end{aligned}$$

Prenons $\alpha = -2$. Le développement ci-dessus devient : $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \dfrac{2}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}$. Par le théorème de Cesàro, on a donc : $u_n^{-2} - u_0^{-2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{3}$. Comme u_0^{-2} est négligeable devant $\dfrac{2n}{3}$, il en résulte aisément :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2n}}.$$

Exercice 21. Détailler ce qui a été omis ci-dessus : démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

8 ☢ Utiliser la transformation d'Abel

La transformation d'Abel est un outil extrêmement puissant dans l'étude des séries numériques, dont le critère spécial des séries alternées est une version appauvrie. Autrefois au programme des classes préparatoires, elle en a disparu officiellement, mais elle apparaît tout de même encore aux concours, certes de manière implicite (Mathématiques 1 à Mines-Ponts en 2021 et 2022, pour des exemples récents), parce qu'elle multiplie les possibilités : les élèves à l'aise auront donc un avantage net s'ils l'ont déjà vue et apprivoisée durant l'année de MP.

Je rappelle la formule, sans la démontrer (mais vous devez savoir le faire si vous l'utilisez) :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n v_n = u_N V_N - \sum_{n=0}^{N-1}(u_{n+1} - u_n)V_n,$$

où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. Cette transformation a parfois une forme légèrement différente (comme dans l'exemple 19 et l'exercice 30) : c'est pourquoi il faut comprendre le *principe* de sa démonstration (faire apparaître un télescopage en écrivant $v_n = V_n - V_{n-1}$ puis en effectuant un changement d'indice), pour être capable de l'adapter à d'autres circonstances. → page 29

Elle est un analogue de l'intégration par parties pour les intégrales :

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g,$$

si l'on remplace :

— la dérivation d'une fonction par la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs d'une suite (analogie pertinente, puisque, comme la dérivée d'une fonction, cette quantité donne l'accroissement et la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$) ;

— l'intégration d'une fonction par la sommation $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ d'une suite (de même que la dérivation et l'intégration sont des opérations « réciproques », le lien suite-série assure que la sommation est la « réciproque » de la différence de termes consécutifs).

Cette analogie permet éventuellement de retenir la forme de la transformation d'Abel, mais pas seulement : elle peut inspirer les choix de suites auxquelles appliquer cette transformation, en réfléchissant au choix analogue que l'on aurait fait dans une intégration par parties (autant dire que si cette dernière technique n'est pas maîtrisée, il est vain d'espérer comprendre comment s'utilise une transformation d'Abel).

Les trois sections suivantes expliquent à quoi sert cette transformation. Et surtout, comment l'utiliser ? Comme pour une intégration par parties, l'objectif est de se ramener à une somme plus simple à étudier (pour l'étude de la convergence ou le calcul), mais cela nécessite de bien choisir les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ dont le produit donne le terme général de la somme initiale.

8.1 Pour étudier la nature de séries compliquées

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ une série numérique dont nous ne parvenons pas à obtenir la nature par les méthodes habituelles. On veut montrer sa convergence en effectuant une transformation d'Abel. Il faudrait donc choisir $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telles que : $a_n = u_n v_n$, et de sorte que la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)V_n$ soit plus simple à étudier (il faut aussi que la limite de $(u_n V_n)_{n\geqslant 0}$ soit connue).

Pour cela, on note que lorsqu'on effectue une transformation d'Abel, la somme du membre de droite est « presque » télescopique ; or nous savons très simplement trancher la nature d'une série télescopique. Le problème est la présence du terme V_n, dont il faudrait se débarrasser pour que la somme soit « vraiment » télescopique. En résumé, pour que la réduction à une série télescopique fonctionne, il faut :

— choisir $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de sorte que $(V_n)_{n\geqslant 0}$ soit bornée par une constante (ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|(u_{n+1} - u_n)V_n| \leqslant M\,|u_{n+1} - u_n|$, ne laissant que le terme $u_{n+1} - u_n$ d'une série télescopique) ;

— choisir $(u_n)_{n\geqslant 0}$ monotone (pour supprimer les valeurs absolues : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| = u_n - u_{n+1}$ si $u_{n+1} \leqslant u_n$), convergente pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n - u_{n+1})$ converge par le lien suite-série, et plus précisément : convergente vers 0 pour qu'on ait également $u_N V_N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ grâce à la convergence vers 0 de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et au caractère borné de $(V_n)_{n\geqslant 0}$ (on utilise le théorème des gendarmes).

Si l'on parvient à faire de tels choix de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ (plutôt que de retenir machinalement toutes les conditions, retenez pourquoi on les veut ; sinon, vous ne saurez jamais vous en souvenir, ni raisonner correctement), alors le membre de droite de la transformation d'Abel admet une limite finie quand $N \to +\infty$, et donc celui de gauche aussi.

Exemple 16. Nous allons montrer par cette méthode que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(n)}{n}$ converge (nous vous laissons vous convaincre que les méthodes habituelles échouent ici). Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = \sin(n), \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

On a, par la transformation d'Abel :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{1}{N} V_N - \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) V_n. \tag{$*$}$$

On a choisi $u_n = \frac{1}{n}$, plutôt que $u_n = \sin(n)$, afin d'avoir clairement une série télescopique convergente : comme $(\sin(n))_{n\geqslant 1}$ n'a pas de limite, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sin(n+1)-\sin(n))$ diverge et nous ne serions pas plus avancés. Seulement, pour effectivement avoir la série télescopique convergente $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$, il faudrait se débarrasser du terme V_n en le majorant par une constante. C'est ce qui suit.

Pour étudier $V_N = \sum\limits_{n=1}^{N}\sin(n)$, on utilise $\sin(n) = \mathrm{Im}(e^{in})$; on reconnaît alors une somme géométrique de raison $e^i \neq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} e^{in} = \sum_{n=1}^{N}\left(e^i\right)^n = e^i\frac{1-e^{iN}}{1-e^i},$$

donc :

$$|V_N| = \left|\sum_{n=1}^{N}\sin(n)\right| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{N}e^{in}\right)\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N}e^{in}\right| = \left|e^i\frac{1-e^{iN}}{1-e^i}\right| = \frac{\left|1-e^{iN}\right|}{|1-e^i|} \leqslant \frac{|1|+\left|e^{iN}\right|}{|1-e^i|} = \frac{2}{|1-e^i|}.$$

Ceci démontre que $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée par $M = \dfrac{2}{|1-e^i|}$. On en déduit facilement que le premier terme de $(*)$ tend vers 0 quand $N \to +\infty$ d'après le théorème des gendarmes :

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{N}V_N\right| \leqslant \frac{M}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tandis que le second terme définit une série absolument convergente ; en effet :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)V_n\right| = \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right|\cdot|V_n| \leqslant \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot M,$$

et la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ converge parce que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge (vers 0) ; par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)V_n$ converge absolument, donc converge.

On en déduit que le second terme de $(*)$ converge également, donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{\sin(n)}{n}$ existe, et est finie : la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n}$ converge.

Remarque : première analogie avec l'intégration par parties. On remarque que l'on a choisi de sommer le sinus et de faire apparaître une différence de termes consécutifs de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, de la même manière que lorsqu'on veut montrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ en intégrant par parties, on intègre le sinus et l'on dérive $t \mapsto \frac{1}{t}$. Cette stratégie va dans le sens de l'analogie formulée en début de section, et qu'on retrouve dans l'encadré de la section 8.2 plus loin. Cette observation est importante si l'on veut comprendre cette transformation. → page 26

L'élève désireux d'apprendre à utiliser la transformation d'Abel se doit de savoir traiter l'exercice suivant. Autrement, il perd son temps et doit le consacrer aux techniques plus classiques du chapitre.

Exercice 22. (L'exemple incontournable) Adapter l'exemple ci-dessus pour montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ convergent.

Exercice 23. Redémontrer, grâce à une transformation d'Abel, la première conclusion du théorème spécial des séries alternées, formulée un peu différemment : si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à termes positifs, décroissante, convergeant vers 0, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

Comme souvent avec les énoncés vrais sans la moindre hypothèse, le nombre d'applications est riche. Ainsi on peut également montrer des convergences uniformes de séries de fonctions à l'aide d'une transformation d'Abel.

Exercice 24. (Logarithme complexe) Cet exercice nécessite d'avoir déjà vu le chapitre sur les séries de fonctions. Soit $\theta \in]0,2\pi[$.

1. À l'aide d'une transformation d'Abel, appliquée à $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{N'} \frac{x^n e^{in\theta}}{n}$ où l'on fait ensuite tendre N' vers $+\infty$, montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^n e^{in\theta}}{n}\end{cases}\right)$ converge uniformément sur $[0,1]$, et en déduire que sa somme f est continue sur $[0,1]$.

Les autres questions n'ont plus de rapport avec la transformation d'Abel, mais utilisent ce résultat de continuité pour calculer une somme remarquable.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0,1[$, et qu'on a : $\forall x \in [0,1[,\ f'(x) = \dfrac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}$.
3. En déduire : $\forall x \in [0,1[,\ f(x) = -\dfrac{1}{2}\ln\Big((x-\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2\Big) + i\arctan\left(\dfrac{x\sin(\theta)}{1 - x\cos(\theta)}\right)$.
4. Conclure en montrant : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i\frac{\pi-\theta}{2}$. Pourquoi parle-t-on de « logarithme complexe » ?

8.2 Pour calculer des sommes

Nous avons dit en début de section que la transformation d'Abel pour les séries est l'analogue de l'intégration par parties pour les fonctions, où l'on retient la substitution qui permet ce parallèle, dans la figure 2.

FIGURE 2 – Analogies entre fonctions et suites, entre intégrales et séries.

Fonction f		Suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$	
Intégrale	$\int_I f$	Série	$\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$
Dérivée	f'	Accroissement	$(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$
Primitive	$x \mapsto \int_a^x f$	Sommation	$\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 0}$
Théorème fondamental		Lien suite-série	
$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$		$\sum\limits_{n=0}^{N}(u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$	
Intégration par parties		Transformation d'Abel	

Cette analogie va au-delà de la simple coïncidence (même si nous ne tenterons pas de la justifier théoriquement), et se voit aussi dans les calculs, tant que l'on ne raisonne que sur les ordres de grandeur (c'est-à-dire en ignorant les constantes multiplicatives et les quantités négligeables) : voir la figure 3. (Pour le calcul exact, il faut admettre que les calculs de sommes sont plus lourds que ceux d'intégrales, et n'ont pas des expressions aussi élégantes.)

On note que dans notre réflexion, les suites géométriques $(a^n)_{n\geqslant 0}$ (qui ne sont rien d'autre que des exponentielles en base a, du moins si $a > 0$) ont pour analogue continu les fonctions exponentielles. **Souvent, quand on raisonne par analogie, il ne coûte rien de remplacer la suite $(a^n)_{n\geqslant 0}$ par**

FIGURE 3 – Calculs de dérivées et primitives, et leurs analogues discrets.

$x \mapsto a^x$	$(a^n)_{n\geqslant 0}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \ln(a)a^x \quad \approx \quad a^x$	$a^{n+1} - a^n = (a-1)a^n \quad \approx \quad a^n$
$\int_0^x a^t \mathrm{d}t = \frac{a^x-1}{\ln(a)} \quad \approx \quad a^x - 1$	$\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad \approx \quad a^{n+1}-1$
$x \mapsto x^\alpha$	$(n^\alpha)_{n\geqslant 0}$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \quad = \quad 1$	$(n+1) - n \quad = \quad 1$
$\int_0^x t\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{x^2}{2}$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \approx \quad \frac{n^2}{2}$
$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} \quad = \quad 2x$	$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \quad \approx \quad 2n$
$\int_0^x t^2\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{x^3}{3}$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \approx \quad \frac{n^3}{3}$
$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}x} \quad = \quad \alpha x^{\alpha-1}$	$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) \quad \approx \quad \alpha n^{\alpha-1}$
$x \mapsto \ln(x)$	$(\ln(n))_{n\geqslant 1}$
$\ln'(x) \quad = \quad \frac{1}{x}$	$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \approx \quad \frac{1}{n}$

la fonction $x \mapsto e^{\pm x}$, même si $a \neq e$.

En dressant ces parallèles, voici où je veux en venir : puisque, du point de vue qualitatif, les calculs d'intégrales et de sommes sont si proches, il est raisonnable de calculer des sommes (et de conjecturer leurs valeurs) en nous basant sur leur analogue intégral, où nous avons plus de facilités. Cela vaut aussi pour la transformation d'Abel. Retenez ce principe :

Calcul de somme avec une transformation d'Abel : comment choisir u_n et v_n

Les « bons » choix de fonctions, dans une intégration par parties, sont aussi des bons choix pour une transformation d'Abel.

C'est-à-dire : si vous voulez faire une transformation d'Abel pour calculer $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n$:

— au brouillon, remplacez l'indice n par une variable réelle t (de sorte que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ « devienne » une fonction $t \mapsto f(t)$), et la somme $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ par l'intégrale $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ (les bornes n'ont aucune importance et vous pouvez les changer, voire les omettre) ;

— demandez-vous comment vous calculeriez $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ en intégrant par parties ; si, pour cela, vous dériveriez une fonction u et intégreriez une fonction v (telle que $f = uv$), alors la transformation d'Abel devrait marcher en faisant les mêmes choix : il faut simplement remplacer $u(t)$ par u_n et $v(t)$ par v_n (de sorte que : $a_n = u_n v_n$), puis $u'(t)$ par $u_{n+1} - u_n$, et une primitive de v par $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, suivant l'analogie de la figure 2.

Dans cette analogie, il est plus commode de remplacer toute suite géométrique par une exponentielle (croissante si la raison est supérieure à 1 en module, et décroissante sinon).

Ainsi les conseils de la section *L'intégration par parties* (document de méthodologie d'intégration) restent valables ici :

— pour de nombreuses intégrations par parties faisant intervenir des puissances entières, par exemple $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t$, il est préférable de dériver le facteur polynomial $t \mapsto t^\alpha$ (autant de fois que son degré, pour se ramener à un facteur constant) et d'intégrer l'exponentielle ; par analogie, une somme de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n^\alpha q^n$ se calcule avantageusement avec une transformation d'Abel en prenant $v_n = q^n$ (la suite qu'on somme, par analogie avec l'intégration) et $u_n = n^\alpha$ (la suite dont on fait apparaître des différences de termes consécutifs, par analogie avec la dérivation) ;

— à l'inverse, lorsqu'une intégrale fait apparaître un terme logarithmique, on la calcule souvent en intégrant par parties, en dérivant le logarithme ; par analogie, une transformation d'Abel avec un terme logarithmique s'effectue souvent en prenant $u_n = \ln(n)$, pour se ramener à une somme où il apparaît $u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ (l'analogue de la dérivation du logarithme).

Exemple 17. Soit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Calculons $\sum\limits_{n=0}^{N} n2^n$ à l'aide d'une transformation d'Abel. Conformément au conseil ci-dessus, pour choisir avec quelles suites effectuer cette transformation, on se demande d'abord comment on aurait calculé $\int xe^x \mathrm{d}x$: en dérivant le facteur polynomial et en intégrant l'exponentielle. Par analogie, on effectue une transformation d'Abel en sommant le terme géométrique, c'est-à-dire avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$, $v_n = 2^n$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{N} n2^n = N\sum_{n=0}^{N} 2^n - \sum_{n=0}^{N-1} ((n+1)-n)\sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

On sait calculer les sommes géométriques. On a : $\sum\limits_{n=0}^{N} 2^n = \dfrac{2^{N+1}-1}{2-1} = 2^{N+1} - 1$. Donc :

$$\sum_{n=0}^{N} n2^n = N\left(2^{N+1}-1\right) - \sum_{n=0}^{N-1}\left(2^{n+1}-1\right) = N\left(2^{N+1}-1\right) - 2\sum_{n=0}^{N-1} 2^n + \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N\left(2^{N+1}-1\right) - 2\left(2^N-1\right) + N.$$

On conclut, en simplifiant et regroupant les termes :

$$\sum_{n=0}^{N} n2^n = 2^{N+1}(N-1) + 2.$$

On pouvait aussi obtenir cette somme en dérivant $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{N} x^n = \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$, et en posant $x = 2$. Une stratégie fréquente dans la théorie des séries entières.

Exercice 25.

1. Redémontrer : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} n2^n = 2^{N+1}(N-1) + 2$, avec le changement d'indice $n' = n+1$.
2. Généraliser au calcul de $\sum\limits_{n=0}^{N} nq^n$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{C}$ tel que $q \neq 1$. On utilisera de préférence une transformation d'Abel, afin de s'exercer à cette technique.
3. Si $|q| < 1$, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} nq^n$ converge, et que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nq^n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$.

L'exercice précédent (dernière question) montre que la transformation d'Abel permet aussi de calculer des sommes de séries convergentes. Il suffit de transformer les sommes partielles d'indice N, et de prendre $N \to +\infty$.

Exemple 18. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Calculons la somme classique $\sum\limits_{n=0}^{N} n^2$ grâce à une transformation d'Abel. Il n'y a pas trop le choix des suites ici : on prend $u_n = v_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{N} n^2 = N\sum_{n=0}^{N} n - \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) = N\sum_{n=0}^{N} n - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + \sum_{k=0}^{N} k = (N+1)\sum_{n=0}^{N} n - \sum_{n=0}^{N}\frac{n^2+n}{2}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{N} n^2 = (N+1)\sum_{n=0}^{N} n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} n^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} n = \left(N+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{N} n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} n^2,$$

et donc :
$$\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{N} n^2 = \left(N+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)\left(N+\frac{1}{2}\right)}{2},$$
c'est-à-dire :
$$\sum_{n=0}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Exercice 26. Pour tout $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, calculer $\sum_{n=0}^{N} n^3$ grâce à une transformation d'Abel.

Ci-dessous, une simplification propre aux séries, qui n'a pas de pendant intégral.

Exercice 27. (Élimination du signe alterné) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes positifs, décroissante, convergeant vers 0.

1. Avec une transformation d'Abel, montrer :
$$\forall N \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \sum_{n=0}^{N}(-1)^n u_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}u_n - \sum_{\substack{n=0\\ n \text{ pair}}}^{N-1}(u_{n+1}-u_n).$$

2. Justifier que les séries $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}(u_{2n+1}-u_{2n})$ convergent, et montrer :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = -\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{2n+1}-u_{2n}).$$

3. Application. On admet : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ (voir le développement en série entière du logarithme, ou utiliser l'exercice 15 de ce document). En déduire la valeur de la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right)$. ← page 15

Exercice 28. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et ayant une espérance. En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{P}(X=n) = \mathrm{P}(X \geqslant n) - \mathrm{P}(X \geqslant n+1)$, et en effectuant une transformation d'Abel, montrer : $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(X \geqslant n)$.

8.3 Pour trouver des équivalents asymptotiques de sommes

La transformation d'Abel permet également d'obtenir des équivalents (ou, faute de mieux, des encadrements) de sommes partielles de séries divergentes, ou de restes de séries convergentes ; cependant la comparaison entre une série et une intégrale reste à privilégier (lorsque les hypothèses de monotonie permettent de l'appliquer).

Si l'objectif est d'obtenir un équivalent, il suffit que la nouvelle somme obtenue dans la transformation d'Abel soit négligeable devant la somme initiale. C'est souvent le cas lorsque, par exemple, le nouveau terme général est égal au précédent, multiplié par un terme α_n décroissant vers 0 (exemples : $\frac{1}{n+1}$ comme dans l'exemple ci-dessous, ou e^{-n}, etc.). C'est ce qui permet de détecter si l'on a fait un « bon » choix.

Exemple 19. La règle de D'Alembert permet de démontrer aisément que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n2^n}$ converge (vers $\ln(2)$, ce qui n'importe pas ici). Ayons une idée de sa vitesse de convergence, en déterminant un équivalent asymptotique des restes *via* une transformation d'Abel. Sommer le terme géométrique est souvent préférable (par analogie avec les exponentielles), comme nous l'avons dit tantôt. Posons donc :

$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. Notons que l'on a $\frac{1}{2^n} = V_n - V_{n-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (en particulier pour tout $n \geqslant N+1$ si $N \in \mathbb{N}$, ce qui évite d'avoir à isoler le premier terme comme dans la situation standard d'une transformation d'Abel). Pour tous entiers $N \geqslant 0$ et $N' \geqslant N+2$, on a donc :

$$\sum_{n=N+1}^{N'} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{1}{n}(V_n - V_{n-1}) = \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{V_n}{n} - \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{V_{n-1}}{n} = \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{V_n}{n} - \sum_{n=N}^{N'-1} \frac{V_n}{n+1}$$
$$= \frac{V_{N'}}{N'} - \frac{V_N}{N+1} + \sum_{n=N+1}^{N'-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) V_n.$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. Donc, quand $N' \to +\infty$, l'égalité ci-dessus devient :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\frac{V_N}{N+1} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) V_n = -\frac{2-\frac{1}{2^N}}{N+1} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(2 - \frac{1}{2^n}\right).$$

On peut simplifier le membre de droite, en notant qu'il y a une somme télescopique :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{2}{N+1} - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n-1}}.$$

Donc, après simplifications des termes opposés en $\frac{2}{N+1}$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{(N+1)2^N} - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}.$$

Montrons que la somme du membre de droite est négligeable devant les autres termes (observer le terme général, et le juger à la lumière du paragraphe qui précède l'exemple : on voit d'emblée que cela va marcher). On a trivialement :

$$\frac{1}{n(n+1)2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n2^n}\right),$$

et comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$ converge, le théorème de sommation des relations de comparaison implique : $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} \underset{N\to+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}\right)$. Ainsi :

$$\frac{1}{(N+1)2^N} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} + \underset{N\to+\infty}{o}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n},$$

ce qui donne l'équivalent souhaité :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(N+1)2^N} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{N2^N}.$$

Exercice 29. Qu'est-ce qui coince, si l'on essaie d'obtenir un équivalent asymptotique dans cet exemple avec la méthode de comparaison entre une série et une intégrale ?

Transformation d'Abel avec un terme géométrique. Lorsqu'on effectue une transformation d'Abel avec une somme *infinie* contenant un terme géométrique q^n (avec $|q| < 1$), il est en fait plus avisé de faire apparaître le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} q^k$, plutôt que la somme $\sum_{k=0}^{n} q^k$, en écrivant : $q^n = \sum_{k=n}^{+\infty} q^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k$. La raison à cela est que le reste revêt une expression plus simple que les sommes partielles, comme on le rappelle ci-dessous :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exercice 30. Reprendre la transformation d'Abel de l'exemple précédent, mais en utilisant le fait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2^n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$. Observer pourquoi les calculs deviennent plus agréables.

On dit plus haut de s'inspirer de l'intégration par parties, pour les choix de suites d'une transformation d'Abel. Cependant, l'analogue discret peut soulever des difficultés supplémentaires : lorsqu'on intègre par parties une fonction dépendant d'un logarithme, il est souvent avisé de dériver le logarithme, parce que sa dérivée, la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, est très simple ; dans le cas d'une transformation d'Abel, la différence $\ln(n+1) - \ln(n)$ n'est pas du tout aussi simple. Toutefois, si l'on ne cherche pas à effectuer un calcul exact, mais simplement à obtenir un encadrement, un équivalent asymptotique, etc., alors on peut faire apparaître la « suite inverse » en écrivant : $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ (inégalité de convexité), ou éventuellement avec l'équivalent : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Cela dépend du contexte. On l'illustre dans l'exemple suivant.

Exemple 20. À l'aide d'une transformation d'Abel, trouvons un équivalent asymptotique simple de $\sum_{n=1}^{N} n\ln(n)$ quand $N \to +\infty$. Il serait tentant, comme dans les exemples de la section précédente, de poser $u_n = n$, puisque la différence $u_{n+1} - u_n = (n+1) - n = 1$ est très simple. Nous vous laissons essayer et voir pourquoi, en vérité, ce choix ne simplifie pas tant que cela l'affaire. Encore une fois, raisonnons par analogie avec le cas intégral : si l'on veut calculer $\int x\ln(x)\mathrm{d}x$, on dérive le logarithme et intègre $x \mapsto x$ (cet exemple est classique et nous vous invitons à le faire si besoin). De même, dans le cas discret, nous allons faire une transformation d'Abel avec : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ u_n = \ln(n),\ v_n = n$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$:

$$\sum_{n=1}^{N} n\ln(n) = \ln(N)\sum_{n=1}^{N} n - \sum_{n=1}^{N-1} (\ln(n+1) - \ln(n)) \sum_{k=1}^{n} k = \frac{N(N+1)}{2}\ln(N) - \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}.$$

Montrons que la dernière somme est négligeable devant $\frac{N(N+1)}{2}\ln(N)$. On a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2} > 0,$$

et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2}$ diverge grossièrement, donc par le théorème de sommation des équivalents on a :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{2} = \frac{(N-1)N}{4} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^2}{4} = \underset{N\to+\infty}{o}\left(\frac{N(N+1)}{2}\ln(N)\right).$$

La relation ci-dessus issue de la transformation d'Abel implique donc :

$$\sum_{n=1}^{N} n\ln(n) = \frac{N(N+1)}{2}\ln(N) + \underset{N\to+\infty}{o}\left(\frac{N(N+1)}{2}\ln(N)\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N(N+1)\ln(N)}{2} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^2\ln(N)}{2}.$$

Exercice 31. Retrouver cet équivalent asymptotique avec une comparaison entre une série et une intégrale. C'est beaucoup, beaucoup plus simple ici.

8.4 Pour jouer le rôle de l'intégration par parties dans une intégrale, quand il n'y a pas de fonction dérivable

Nous expliquons dans la section 9 du document *Méthodes* d'intégration comment, dans certaines situations, un résultat théorique sur les intégrales s'obtient en passant par des sommes qui approchent l'intégrale (en général des sommes de Riemann, mais pas seulement). Nous y expliquions dans quels cas de figure cela pouvait être pertinent, et à ceux-là on peut ajouter un cadre d'application basé sur l'observation suivante :

- la transformation d'Abel est un analogue de l'intégration par parties pour les intégrales ;
- cependant l'intégration par parties nécessite des fonctions de classe C^1, alors que la transformation d'Abel ne nécessite aucune hypothèse de régularité ;
- par conséquent, si l'on *veut* faire une intégration par parties dans une intégrale où il N'y a PAS de fonction de classe C^1, une stratégie pour y remédier peut être d'approcher cette intégrale par une somme, sur laquelle on effectue une transformation d'Abel (toujours licite).

Dans la transformation d'Abel, c'est $f(a_{i+1}) - f(a_i)$ qui jouera le rôle de f'. Pour majorer cette quantité, vous pouvez avoir besoin de différentes techniques : caractère lipschitzien, uniforme continuité (si on est sur un segment, et c'est en particulier le cas si vous vous ramenez à une somme de Riemann), etc.

Exemple 21. Montrons la seconde formule de la moyenne : soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, positive et décroissante, et soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. On veut montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que :

$$\int_0^1 fg = f(0) \int_0^c g.$$

Avant de poursuivre, soulignons que cette formule de la moyenne est très utile lorsque, dans des majorations d'intégrales, on veut « n'avoir que g dans l'intégrale » (pour utiliser des hypothèses par exemple sur la convergence de l'intégrale de g), mais que l'inégalité triangulaire $\left|\int_I fg\right| \leqslant \|f\|_\infty \int_I |g|$ serait trop brutale. C'est le cas notamment quand $\int_I g$ converge sans converger absolument, ou quand g dépend de fonctions trigonométriques ou de l'exponentielle complexe.

Soit $G : x \mapsto \int_0^x g$ l'unique primitive de g s'annulant en 0. Le résultat à démontrer revient à dire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que : $G(c) = \dfrac{1}{f(0)} \int_0^1 fg$ (cette écriture n'a un sens que si $f(0) \neq 0$, mais on se convainc aisément qu'au vu des hypothèses, si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle et l'identité à démontrer est triviale). Si l'on parvient à démontrer que le membre de droite est compris entre le maximum M et le minimum m de G sur $[0,1]$, ce serait une conséquence immédiate du théorème des valeurs intermédiaires. Bref, tout ce que l'on veut, c'est démontrer :

$$mf(0) \leqslant \int_0^1 fg \leqslant Mf(0).$$

Ceci est raisonnablement facile si on fait l'hypothèse supplémentaire que f est de classe C^1 sur $[0,1]$. En effet, sous cette hypothèse, on intègre par parties, l'idée étant de faire apparaître G explicitement :

$$\int_0^1 fg = [f \cdot G]_0^1 - \int_0^1 f'G = f(1)G(1) - \int_0^1 f'G.$$

Comme f est décroissante, $-f'$ est positive et la multiplication de G par $-f'$ préserve l'encadrement $m \leqslant G \leqslant M$. D'où :

$$\int_0^1 fg \geqslant f(1)m - \int_0^1 f'm = f(1)m - m(f(1) - f(0)) = mf(0),$$

et par un raisonnement analogue : $\int_0^1 fg \leqslant Mf(0)$. Ainsi $\int_0^1 fg$ est compris entre $mf(0)$ et $Mf(0)$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires le résultat voulu est démontré.

Si f est seulement continue, on ne peut plus intégrer par parties. C'est là qu'on applique l'idée de cette section : on approche $\int_0^1 fg = \int_0^1 fG'$ (on fait apparaître G plutôt que g, puisque l'idée est de montrer que $\frac{1}{f(0)}\int_0^1 fg$ admet un antécédent par G) par une somme de Riemann bien choisie, et avec cette somme de Riemann nous imiterons l'idée de l'intégration par parties en faisant une transformation d'Abel (ce qui est possible sans hypothèse de régularité sur f). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$, posons : $a_k = \frac{k}{n}$. La somme de Riemann approchant $\int_0^1 fG'$ est naturellement :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)G'(a_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)g(a_k),$$

mais nous allons lui préférer celle-ci :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right),$$

pour la raison déjà évoquée ci-dessus : on veut comparer une intégrale à m et M qui sont les extremums de G. C'est évidemment plus facile si on manipule une quantité dépendant de G. On va cependant montrer que les deux sommes ci-dessus sont très proches, donc cette approximation sera sans dommage. Remplacer $\frac{g(a_k)}{n}$ par $G(a_{k+1}) - G(a_k)$ est naturel en un sens, puisque, pour $a_{k+1} \approx a_k$, on peut écrire cette approximation à l'ordre 1 : $G(a_{k+1}) - G(a_k) \approx (a_{k+1} - a_k)g(a_k) = \frac{g(a_k)}{n}$.

Cessons d'ergoter, et faisons. Montrons que les deux sommes ci-dessus sont effectivement proches, et qu'il ne coûte donc rien de raisonner avec la seconde. On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)g(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(g(a_k) - g(t)\right)\mathrm{d}t,$$

et comme g est uniformément continue sur $[0,1]$ par le théorème de Heine, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ vérifiant : $|x-y| \leqslant \eta$, on ait : $|g(x)-g(y)| \leqslant \varepsilon$. Prenons à présent $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ vérifiant : $\frac{1}{n} \leqslant \eta$ (on note que $\frac{1}{n} = a_{k+1} - a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$: c'est la longueur de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, d'où ce choix). On a alors, pour tout entier naturel n vérifiant cette condition (on rappelle que f est positive) :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)g(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\int_{a_k}^{a_{k+1}} |g(a_k) - g(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_0) \qquad (f \text{ décroissante}) \\ &= \varepsilon f(0).\end{aligned}$$

Cela montre : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)g(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right)\right) = 0$. Et donc, comme la première somme converge vers $\int_0^1 fg$ en tant que somme de Riemann, on a montré :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right) = \int_0^1 fg.$$

Pour démontrer ce que l'on souhaite, il suffit donc d'encadrer cette somme par $mf(0)$ et $Mf(0)$, puis de passer à la limite. Pour cela, on va enfin illustrer le principe méthodique de cette section (rien de ce qui précède ne le faisait). Faisons cette fameuse transformation d'Abel supposée remplacer l'intégration par parties. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right) = f(a_{n-1})G(a_n) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(f(a_k) - f(a_{k-1})\right)G(a_k).$$

Or : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $m \leqslant G(a_k) \leqslant M$, et la décroissance de la fonction f implique : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $-(f(a_k) - f(a_{k-1})) \geqslant 0$, donc la multiplication de l'encadrement précédent par cette quantité ne renverse pas les inégalités. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right) \leqslant f(a_{n-1})M - M\sum_{k=1}^{n-1}(f(a_k) - f(a_{k-1})) = f(a_{n-1})M - M\left(f(a_{n-1}) - f(a_0)\right) = f(0)M.$$

De même : $f(0)m \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right)$. En prenant la limite quand $n \to +\infty$ dans ces inégalités, on obtient : $mf(0) \leqslant \displaystyle\int_0^1 fg \leqslant Mf(0)$: d'où le résultat.

Exercice 32. Compléter les détails qui ont été omis.

Il faut cependant reconnaître que rares sont les cas où cette idée est fructueuse et plus efficace que d'autres (comme approcher une fonction continue par une fonction polynomiale grâce au théorème de Weierstraß, afin de se ramener à une fonction de classe C^1 par exemple).

Exercice 33. Démontrer le résultat de l'exemple 21 en approchant f par une fonction en escalier.

Exercice 34. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application continue, strictement croissante et telle que $f(0) = 0$, et : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Ces hypothèses sont là pour assurer que f^{-1} existe et est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

1. On suppose d'abord f de classe C^1. Montrer l'égalité de Young très rapidement grâce à cette hypothèse sur f, c'est-à-dire : $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $af(a) = \displaystyle\int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1}$.
2. On ne suppose plus f de classe C^1. Montrer que l'égalité de Young reste valable en s'inspirant des idées de cette section.

Table des matières

Table des figures