MÉTHODES – Séries numériques

✓ Étudier la nature d'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$

Nous résumons sur le diagramme de la figure 1 et ci-dessous comment obtenir la nature d'une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$: → page 2

1. On vérifie d'abord si elle diverge grossièrement ou non (si elle ne diverge pas grossièrement, ne l'indiquez pas) ;
2. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est à termes POSITIFS à partir d'un certain rang, alors on peut utiliser les critères valables pour les séries à termes positifs :
   — si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie comme quotient de produits, puissances ou factorielles, la règle de D'Alembert s'impose ;
   — si l'on n'est pas dans ce cas de figure, ou si la règle de D'Alembert nous donne le cas d'incertitude, alors on compare (à l'aide de $\leqslant, o, O, \sim$) la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ s'exprimant à l'aide de séries de référence (Riemann, géométrique, télescopique), et on obtient la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs ;
   — notons que si $u_n = f(n)$ où f est une fonction monotone aisée à intégrer, la comparaison entre séries et intégrales peut être fructueuse : revoir l'exemple classique des séries de Riemann.
3. Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'est pas de signe constant, on vérifie si $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge grâce aux points précédents, et on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge *absolument* ;
4. Sinon on regarde si le théorème spécial des séries alternées s'applique ;
5. En dernier recours on fait un développement asymptotique de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ afin de l'écrire comme une somme de termes généraux de séries toutes convergentes, ou dont une seule est divergente.

Plus succinct :

Pour étudier la nature d'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$

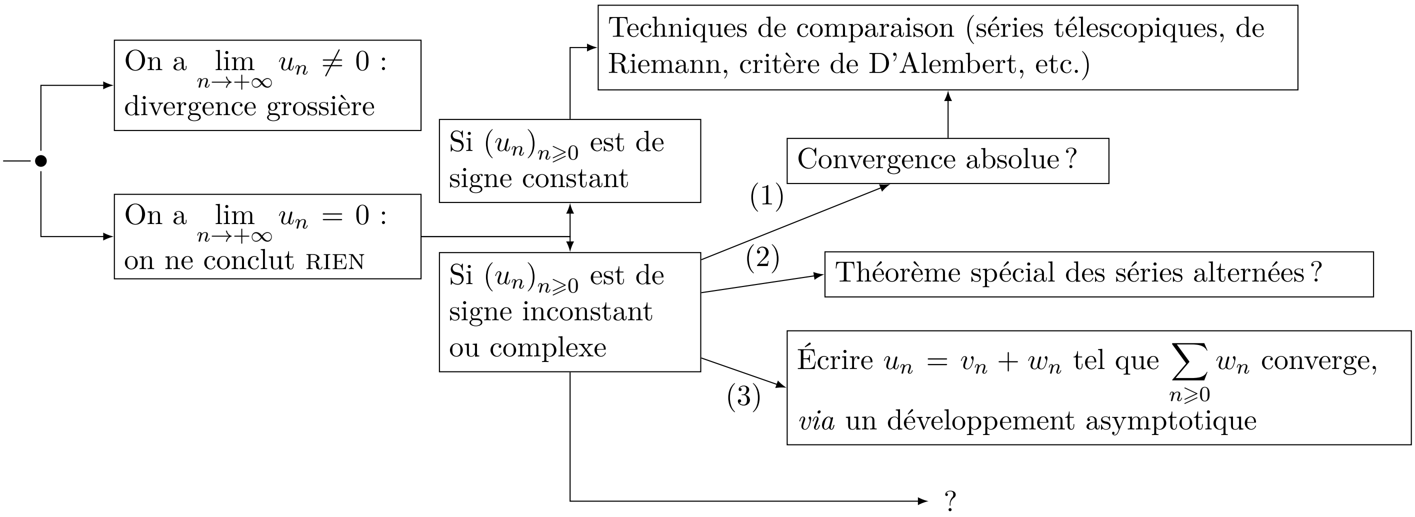
Cas positif. On essaie dans l'ordre :
1. En présence de factorielles et/ou puissances : **règle de D'Alembert**.
2. Sinon : **faire un développement asymptotique** pour obtenir un équivalent à $\frac{1}{n^\alpha}$.
3. Si ce n'est pas équivalent à $\frac{1}{n^\alpha}$: **méthode « $n^\alpha u_n$ »**.
4. Sinon : comparaison entre série et intégrales.

Cas non positif. On essaie dans l'ordre :
1. Si $u_n < 0$, on applique ce qui précède à $\sum_{n\geqslant 0}(-u_n)$ (qui est à termes positifs).
2. Sinon, on étudie $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ avec les méthodes ci-dessus (convergence absolue).
3. Sinon, on montre qu'elle vérifie le théorème spécial des séries alternées.

Nous renvoyons au cours pour les détails sur la comparaison entre série et intégrales, et à la section 3. → page 4

On croise en exercice la transformation d'Abel, équivalent discret de l'intégration par parties et technique très puissante pour l'étude des séries échappant à toutes les autres approches (voir section 8.1). Mais il faut du recul pour en tirer largement profit : n'y songez pas si vous ne maîtrisez pas les méthodes du cours.

Figure 1 – Récapitulatif : comment étudier la nature d'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.



1 ✓ Comparer aux séries de Riemann en pratique

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'écrit explicitement à l'aide de fonctions usuelles, on écrit u_n en fonction de termes de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$ à l'aide de développements asymptotiques, voire d'équivalents asymptotiques (les seconds se déduisant souvent des premiers, sauf dans les cas simples où u_n ne fait intervenir ni sommes de termes de même ordre de grandeur, ni compositions).

Il arrive toutefois, si u_n s'écrit à l'aide de termes exponentiels ou logarithmiques, que l'on n'obtienne pas : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$, mais plutôt quelque chose de la forme : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(n))^\beta}{n^\alpha}$. Dans ce cas de figure, une première chose : respirez bien. Ensuite :

> N'ÉCRIVEZ PAS N'IMPORTE QUOI ! ON N'A PAS
> $\dfrac{(\ln(n))^\beta}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$, MÊME PAR « CROISSANCES COMPARÉES » !

On n'a pas non plus $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n-1$ (un tel équivalent n'est vrai qu'en 1, or ici $n \to +\infty$).

Même si ce n'est pas équivalent au terme général d'une série de Riemann, on peut toujours tenter une comparaison *via* la « méthode $n^a u_n$ ». Cela suffit en général pour conclure (sauf pour $\alpha = 1$: essayez pour voir pourquoi).

Principe de la méthode « $n^a u_n$ ». Comme cela a été dit, on l'utilise lorsqu'on n'arrive pas à obtenir directement un équivalent de la forme : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{n^k}$. On cherche malgré tout une comparaison au terme général d'une série de Riemann en considérant la limite de $\dfrac{u_n}{\frac{1}{n^a}} = n^a u_n$ quand $n \to +\infty$. Supposons que la limite existe pour un certain a. Alors,

— si $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = L \neq 0$, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{L}{n^a}$, et donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^a}$ sont de même nature : et on a convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ si et seulement si $a > 1$ (en pratique, si l'on est dans ce cas de figure, on peut obtenir l'équivalent par un développement asymptotique direct : vous ne devriez pas rencontrer cette situation) ;

— si $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = 0$, alors : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^a}\right)$, et si de plus $a > 1$, alors $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^a}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$

converge également d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (le cas $a \leqslant 1$ ne permet pas de conclure) ;

— si $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = +\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait : $u_n \geqslant \frac{1}{n^a}$, et si de plus $a \leqslant 1$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ diverge, donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge également d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (le cas $a > 1$ ne permet pas de conclure).

Si vous ne voyez pas d'emblée quel choix de a est susceptible de marcher : vous faites le calcul de limite avec un a quelconque, et regardez selon les cas quelle est la limite obtenue. Dans le cas où vous en déduisez : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^a}\right)$, vous regardez s'il est en plus possible d'avoir $a < 1$; si non, on oublie ce cas-là. Dans le cas où vous en déduisez : $u_n \geqslant \frac{1}{n^a}$, regardez s'il est en plus possible d'avoir $a \geqslant 1$. Si les deux cas n'aboutissent pas, oubliez cette méthode.

Exemple 1. Étudions la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n))^3}{n^2}$ *via* cette méthode. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$n^a \frac{(\ln(n))^3}{n^2} = n^{a-2}(\ln(n))^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } a-2 \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } a-2 < 0, \end{cases}$$

par croissances comparées pour le cas $a - 2 < 0$. Au brouillon, on confronte les deux cas de figure :

$$\forall a \geqslant 2,\ \frac{(\ln(n))^3}{n^2} \geqslant \frac{1}{n^a} > 0 \text{ (asymptotiquement)}, \quad \forall a < 2,\ \frac{(\ln(n))^3}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^a}\right).$$

On se demande s'il est possible d'avoir une minoration par une série divergente dans le premier cas : non, car il faudrait à la fois $a \geqslant 2$ pour que la minoration soit valable, et $a \leqslant 1$ pour que le minorant soit le terme général d'une série de Riemann *divergente*. C'est impossible. On passe au deuxième cas : est-il possible d'avoir à la fois $a < 2$ (pour que la relation de comparaison soit vraie) et $a > 1$ (pour avoir une domination par une série de Riemann *convergente*) ? Bien sûr que oui : il suffit de prendre $a = \frac{3}{2}$ par exemple. Pour cette valeur, on a alors :

$$\frac{(\ln(n))^3}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

et on conclut par comparaison que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n))^3}{n^2}$ converge. Bien sûr, quand on rédige au propre, ou si l'on voit à l'œil nu quel choix de a va marcher, il est inutile de faire cette fastidieuse disjonction de cas.

À noter que cette même méthode « $n^a u_n$ » permet de gérer le cas des exponentielles décroissantes : le théorème des croissances comparées assure que si u_n décroît « exponentiellement vite » (en un sens que je laisse volontairement vague), alors elle est négligeable devant n'importe quelle fonction puissance, donc en particulier devant $\frac{1}{n^2}$. Vous pourrez ainsi démontrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n\sqrt{n}}$, $\sum_{n\geqslant 1} n^{-n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-\sqrt{n}}$ convergent (ou avec la règle de D'Alembert).

Exemple 2. On a $n^2 e^{-n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des croissances comparées, donc :

$$e^{-n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$ donc convergente, et $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n\sqrt{n}}$ est à termes positifs ; elle est donc convergente d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Exercice 1. Redémontrer sa convergence à l'aide de la règle de D'Alembert.

Exercice 2. Traiter de même les séries $\sum_{n\geqslant 1} n^{-n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-\sqrt{n}}$, avec soin vu que le terme général n'est pas une exponentielle classique (et on ne peut donc pas invoquer le théorème des croissances comparées directement).

2 ✓ Cas des séries alternées

Attention au fait que les séries alternées ne vérifient pas toujours le théorème spécial des séries alternées ; et même si c'est le cas, ce n'est pas forcément le moyen le plus direct de démontrer leur convergence, parce que la décroissance n'est pas toujours évidente. Essayez par exemple de vérifier le théorème spécial des séries alternées avec la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{16^n}{(2n)!}$: pas si simple, calculez les premiers termes et vous serez bien embêtés ! La convergence absolue reste à vérifier prioritairement (guettez un $\frac{1}{n^2}$, un $\frac{1}{n!}$, etc., dans ce cas la vérification est très facile), sauf si l'on veut ensuite majorer le reste de la série.

Vérification de la décroissance. Disons qu'on cherche à vérifier les hypothèses du théorème spécial des séries alternées avec une série de la forme $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ où $u_n \geqslant 0$. Lorsque la décroissance à vérifier n'est pas évidente, **nous vous conseillons de la vérifier en calculant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (qu'on compare à 1), dans le cas où u_n est défini à l'aide de puissances, factorielles, etc.**, plutôt qu'en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$. La raison à cela est la même qui rend la règle de D'Alembert pratique : un quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ simplifie considérablement les puissances et factorielles, et rend les inégalités faciles à vérifier.

S'il est difficile d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$, ou de comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, le dernier recours est dans le cas où u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = f(n)$; alors, vous étudiez les variations de l'application f grâce au signe de sa dérivée, et vous en déduisez que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet les mêmes variations.

Et si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est décroissante qu'à partir d'un certain rang ? Disons qu'elle est décroissante à partir du rang n_0. Alors vous appliquez le théorème spécial des séries alternées à $\sum_{n\geqslant n_0}(-1)^n u_n$ à la place. *C'est très important.* Puis vous dites que $\sum_{n\geqslant n_0}(-1)^n u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ ont même nature pour conclure.

3 ✓ Comparaison entre séries et intégrales

Nous ne revenons pas sur la rédaction de la méthode de comparaison entre une série et des intégrales, ni sur son interprétation graphique, qui ont dû être décrites dans votre cours. Ici, nous nous contentons de discuter de son cadre d'utilisation, et d'une variante (basée également sur une interprétation graphique) pour des fonctions problématiques.

3.1 ✓ Quand y songer ?

Dans deux circonstances, la comparaison entre séries et intégrales est LA méthode numéro 1 à laquelle songer, et il serait fautif de ne pas le savoir.

Quand il faut comparer série et intégrales SANS HÉSITER

1. Quand on veut majorer ou minorer une somme.
2. Quand on veut un équivalent asymptotique d'une somme.

L'intérêt est qu'au contraire des sommes, nous savons calculer un certain nombre d'intégrales. On est donc en mesure d'expliciter des majorants et minorants par cette méthode.

Une situation où l'on peut avoir besoin d'encadrer une somme (ou d'en donner un équivalent), *même si l'énoncé ne le dit pas explicitement*, est par exemple :

— si l'on veut étudier la nature d'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, où u_n est elle-même une somme ;

— si l'on doit démontrer l'intégrabilité d'une somme de série de fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, ou étudier sa convergence uniforme en encadrant le reste : voir le chapitre sur les suites de fonctions, *Méthodes*, section 4 (*Séries de fonctions et comparaison entre série et intégrales*).

Enfin, à la section nous avons cité la comparaison entre une série et une intégrale comme un moyen d'étudier la nature d'une série lorsque les autres approches échouent. Si l'on craint de ne pas y penser au moment approprié, retenez ce cas très fréquent et important à avoir en tête : ← page 1

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}.$$

C'est une série de Bertrand, dont la nature échappe à la méthode « $n^\alpha u_n$ » : l'essayer pour vous en convaincre. En revanche la comparaison entre une série et une intégrale est ici pertinente, parce que la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\alpha}$ s'obtient par un calcul direct de primitive et de limite : l'intégrande est en effet de la forme $\dfrac{u'}{u^\alpha} = u'u^{-\alpha}$ (avec $u(t) = \ln(t)$), donc une primitive est $t \mapsto \dfrac{1}{1-\alpha} \cdot \dfrac{1}{(\ln(t))^{\alpha-1}}$ (sauf si $\alpha = 1$). C'est ainsi que nous étudions la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 3.

1. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Montrer : $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln(n)} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(N))$.
3. Proposer des équivalents analogues pour les sommes partielles ou les restes de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.2 ☢ Comment faire s'il n'y a pas de monotonie ?

Lorsque $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{C}$ n'est plus monotone ni même à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (ce qui empêche d'utiliser le théorème de comparaison), on ne peut plus procéder comme d'habitude pour comparer la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$. Néanmoins tout n'est pas perdu ; dans ce cas, étudiez la différence suivante :

$$\sum_{n=n_0}^{N} f(n) - \int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{N} \int_n^{n+1} f(n)\mathrm{d}t - \sum_{n=n_0}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{N} \int_n^{n+1} (f(n) - f(t))\,\mathrm{d}t,$$

et essayez de démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} \int_n^{n+1} (f(n) - f(t))\,\mathrm{d}t$ converge (rappelons qu'une relation de domination ou un équivalent peut suffire : nul besoin d'espérer faire un calcul explicite). C'est le cas si $f(n)$ et $f(t)$ sont « proches » quand $t \in [n, n+1]$ et n le sont.

Si vous parvenez à en déduire cette convergence, vous en déduisez que la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et la suite $\displaystyle\left(\int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature : finalement, cela revient *presque* au même que d'habitude !

Exemple 3. Étudions la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$. On se convainc assez rapidement que les méthodes classiques échouent, même la transformation d'Abel. Il serait avantageux que la comparaison série-intégrale fonctionne, puisque la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t$ s'obtient trivialement avec le changement de variable $u = \ln(t)$ (qui donne l'intégrale divergente $\int_0^{+\infty} \cos(u)\mathrm{d}u$). Or on a, pour tout N au voisinage de l'infini :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(\ln(n))}{n} - \int_1^{N+1} \frac{\cos(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \left(\frac{\cos(\ln(n))}{n} - \frac{\cos(\ln(t))}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

Pour majorer la « différence petite » de l'intégrande, suivons les conseils de *L'art de la majoration* et utilisons l'inégalité des accroissements finis. Soit f l'application $t \mapsto \frac{\cos(\ln(t))}{t}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(t) = -\frac{\sin(\ln(t)) + \cos(\ln(t))}{t^2}.$$

De cela on déduit : $\forall t \geqslant 1,\ |f'(t)| \leqslant \frac{2}{t^2}$. L'inégalité des accroissements finis implique :

$$\left|\int_n^{n+1} \left(\frac{\cos(\ln(n))}{n} - \frac{\cos(\ln(t))}{t}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\int_n^{n+1} \frac{t-n}{n^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{n^2}\left[\frac{(t-n)^2}{2}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{n^2},$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_n^{n+1} \left(\frac{\cos(\ln(n))}{n} - \frac{\cos(\ln(t))}{t}\right)\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge. On en déduit que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$ et $\left(\int_1^{N+1} \frac{\cos(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ sont de même nature. Or cette suite diverge, puisque :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_1^{N+1} \frac{\cos(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(N+1)} \cos(u)\mathrm{d}u = \sin\left(\ln(N+1)\right),$$

et cette quantité n'a pas de limite en l'infini (exercice). Par conséquent la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$ diverge.

L'exercice suivant traite le cas très favorable que l'on espère souvent rencontrer en pratique.

Exercice 4. Démontrer que si $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{C}$ est de classe C^1 avec f' intégrable au voisinage de $+\infty$, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et la suite $\left(\int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant n_0}$ sont toujours de même nature.

Exercice 5. Démontrer que la suite $(\sin(\ln(n+1)))_{n\geqslant 0}$ diverge effectivement. Ce n'est pas si facile : sommes-nous si certain que $\ln(n+1)$ ne se rapproche pas indéfiniment des multiples de π, par exemple, de sorte que ce sinus converge vers 0 ? C'est la croissance lente du logarithme qui assure que non : même si le logarithme s'approche d'un multiple de π pour une certaine valeur de n, disons $k\pi$, alors quand n augmente il ne passe pas immédiatement à un autre multiple de π plus grand, mais par des valeurs intermédiaires $k\pi + \bigstar$ qui éloignent le sinus de 0.

Cela n'a bien sûr rien de rigoureux. Pour le formaliser, on vérifiera que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour $n = \left\lfloor \frac{e^{2N\pi}}{\sqrt{2}} \right\rfloor - 1$, le nombre $\sin(\ln(2(n+1))) - \sin(\ln(n+1))$ est minoré par une quantité trop grande pour que $(\sin(\ln(n+1)))_{n\geqslant 0}$ converge.

Table des matières

Table des figures