Méthodes – Séries numériques

✓ Donner une valeur approchée de la somme d'une série ; encadrement du reste

1 Comment encadrer le reste ?

On approche la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ par la somme finie $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ pour un entier N convenable. Pour savoir quelle valeur de N est pertinente selon le degré de précision qu'on veut (si l'on veut une valeur approchée à 10^{-2} près, faut-il $N = 100$? $N = 1000$? Plus ? Moins ?), il faut se concentrer sur le reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

Imaginons qu'on veuille approcher $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à 10^{-k} près. Il suffit alors de déterminer N tel que : $|R_N| \leqslant 10^{-k}$. Si cette condition est remplie alors, comme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N$, on obtient :

$$S_N - 10^{-k} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant S_N + 10^{-k}.$$

Ainsi, le calcul explicite de S_N (facile car S_N est une somme finie) donne un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et donc une valeur approchée.

Pour obtenir cet encadrement du reste, nous avons à notre disposition deux méthodes :

— la comparaison entre série et intégrales, où l'on somme l'encadrement $\int_n^{n+1} f \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f$ de $N+1$ à $+\infty$, pour obtenir :
$$\int_{N+1}^{+\infty} f \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_N^{+\infty} f \ :$$
c'est intéressant si l'on connaît des primitives de f ;

— le théorème spécial des séries alternées, très pratique puisqu'il majore la valeur absolue du reste par son premier terme.

Dans le cas particulier où $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ s'obtient à partir d'une somme de Taylor (voir chapitre sur les séries entières), le reste s'écrit comme une intégrale, grâce à la formule de Taylor avec reste intégral (qui porte bien son nom...). Cela fournit une solution alternative pour majorer le reste.

Encadrement du reste

1. **Série alternée** $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$: $|R_N| \leqslant |u_{N+1}|$ (si elle vérifie le théorème spécial).
2. **Série** $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$: $|R_N| = \left| x^{N+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(tx)\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\|f^{(N+1)}\|_\infty$.
3. **Série** $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ **avec** f **décroissante** : $\int_{N+1}^{+\infty} f \leqslant R_N \leqslant \int_N^{+\infty} f$.

2 ☢ Application à des questions de rationalité ou transcendance

La plupart des constantes remarquables s'écrivent comme une somme infinie de rationnels :

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}, \quad \pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1}, \quad \ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}, \text{ etc.}$$

Ainsi les sommes partielles donnent des valeurs approchées de ces constantes par des nombres rationnels, tandis que le reste mesure l'écart à ces rationnels. À cet égard, il permet parfois de produire des démonstrations d'irrationalité, à condition de converger « très vite » (ce qui n'est pas le cas des deux sommes alternées ci-dessus, mais c'est moins clair pour la dernière somme).

Voyons où apparaît cette condition de convergence rapide : soit x un nombre dont on veut montrer qu'il est irrationnel, et soit S_N la somme partielle d'indice N d'une série de rationnels $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ dont la somme donne x (c'est-à-dire : $\lim_{N\to+\infty} S_N = x$). On raisonne par l'absurde en supposant que x est un nombre rationnel. Alors pour un entier M_N bien choisi dépendant des dénominateurs de x et S_N, le nombre $M_N(x - S_N)$ est un entier parce qu'on a simplifié les dénominateurs. Mais on a aussi : $M_N(x - S_N) = M_N R_N$, où R_N est le reste d'indice N de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. Par conséquent, si R_N « converge trop vite » (vers zéro), $M_N R_N$ aussi tend vers 0 quand $N \to +\infty$ et on a pour tout N suffisamment grand : $M_N R_N \in]0,1[$. Impossible que c'est un entier d'après ce qui précède, et cela démontre par l'absurde que x est irrationnel.

Mais pour juger de la vitesse de convergence, encore faut-il savoir l'encadrer.

Exercice 1. Montrer que cos(1) et sin(1) sont des nombres irrationnels par cette méthode (utiliser un développement en série entière).

Dans des cas remarquables (de convergence « encore plus rapide ! »), cela permet de démontrer que des nombres sont *transcendants* (c'est-à-dire qu'ils ne sont solution d'aucune équation polynomiale non triviale à coefficients entiers). Un exemple célèbre est le nombre de Liouville $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$.