Méthodes (PSI) – Séries entières
✓ Calcul du rayon de convergence

Nous avons, dans les grandes lignes, quatre moyens de déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$:

1. **La définition**. On a $R = \sup\left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n\rho^n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\right\}$ si cet ensemble est majoré. Sinon : $R = +\infty$.
2. **L'interprétation pratique du rayon de convergence**. Utile si l'on connaît la nature de la série entière évaluée en certains nombres complexes :
   — s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge, alors $R \leqslant |z|$ (c'est-à-dire : z est hors du disque) ;
   — s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge, alors $R \geqslant |z|$ (c'est-à-dire : z est dans le disque).
3. **La règle de D'Alembert**. Un recours que vous appréciez et que je n'ai pas à détailler. Je mets toutefois en garde contre sa mauvaise utilisation dans la section 2. → page 2
4. **Le théorème de comparaison des séries entières**.

Vous pouvez combiner plusieurs de ces méthodes, par exemple en déterminant *d'abord* un équivalent simple de a_n (qu'on note b_n), *puis* en appliquant une de ces méthodes à la détermination du rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.

Le théorème de comparaison nécessite d'avoir quelques rayons de convergence de référence : on peut penser à ceux des développements en série entière usuels (la série géométrique notamment), mais aussi à ceux obtenus en dérivant ou intégrant des séries entières de rayon connus.

Enfin, on n'oublie pas que ce théorème de comparaison peut s'appliquer aussi si l'on a un encadrement grossier. Si une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$ pour tout n assez grand, cela suffit à démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 (le démontrer).

On devra souvent se contenter d'un tel encadrement lorsqu'il s'agira d'expliciter des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en étudiant la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ associée : faute d'avoir une expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, comment pourrions-nous en déduire un équivalent simple ? Il faudra dans ces cas-là se contenter de peu. Voir le document *Applications des séries entières*, section *Études de suites*, pour avoir une idée de ce que j'entends par là.

1 Cas où revenir à la définition est pertinent

La définition n'est pas un critère *pratique*, **sauf lorsque le comportement asymptotique de $(a_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ peut être facilement déterminé grâce au théorème des croissances comparées**.

Exemple 1. Pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+$, la suite $\left(e^{-n^2}\rho^n\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (d'après le théorème des croissances comparées) et est donc bornée ; on en déduit :

$$\left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid \left(e^{-n^2}\rho^n\right)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\right\} = \mathbb{R}_+ \text{ (qui n'est pas majoré)},$$

et donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2} z^n$ est $R = +\infty$.

Exemple 2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est non constant et $\rho \in \mathbb{R}_+$, alors la suite $(P(n)\rho^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (et est donc bornée) si $\rho < 1$ d'après le théorème des croissances comparées, et si $\rho \geqslant 1$ alors elle tend vers $\pm\infty$ et n'est donc pas bornée ; on en déduit :

$$\left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (P(n)\rho^n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\right\} = [0,1[,$$

et donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} P(n)z^n$ est $R = 1$.

Autrement, la définition est surtout utile pour les exercices THÉORIQUES (la preuve en est l'usage abondante fait dans les démonstrations du cours).

2 ✓ Cas où utiliser la règle de D'Alembert est *idiot*

Si l'on vous demande de déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, vous ne DEVEZ PAS utiliser la règle de D'Alembert lorsque :

— c'est une série entière usuelle (vous perdez du temps et donnez l'impression de ne pas connaître votre cours) ;

— la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie à l'aide de cosinus et sinus (ils n'ont pas de limite, voire peuvent s'annuler, ce qui ne permet pas d'écrire $\frac{u_{n+1}}{u_n}$) ;

— la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas explicite (ou, du moins, est trop compliquée), et que vous avez seulement connaissance d'une inégalité du type $u_n \leqslant \alpha_n$ pour tout n (avec α_n explicite, elle).

Sur ce dernier point, notez que $u_n \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ne permet absolument pas d'en déduire que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ ou quoi que ce soit de semblable. On oublie la règle de D'Alembert dans ce cas, et on se contente d'utiliser *le théorème de comparaison des séries entières.*

Table des matières