

MÉTHODES (PSI) – Séries entières

✓ Développer en série entière

Pour montrer qu'une fonction se développe en série entière en 0 (ou expliciter ce développement), on tente de l'écrire à partir de développements en séries entières en 0 connus à l'aide :

- de combinaisons linéaires ;
- d'évaluations (en remplaçant x par x^2 , $-x$, \sqrt{x} si c'est licite, etc.) ;
- de dérivées (éventuellement d'ordre plus grand que 1) ou de primitives.

Si l'on n'est pas dans les cas de figure ci-dessus (exemple : fonction définie comme une *composition* ou un *quotient* de fonctions, même développables en série entière), alors on privilégie la méthode de l'équation différentielle, expliquée dans la section 2.

→ page 2

1 ✓ Cas des fractions rationnelles

Pour développer en série entière une fraction rationnelle de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, où Q ne s'annule pas en 0, on effectue une décomposition en éléments simples dans \mathbb{C} . Alors, développer en série entière en 0 l'application $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ revient à développer en série entière des fractions rationnelles de la forme $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$ où $a \neq 0$ et $k \geq 1$. Cela se fait en partant du développement de $x \mapsto \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a}}$, et en le dérivant.

Exemple 1. Pour développer en série entière l'application $x \mapsto \frac{x}{(2-x)^2}$, on écrit simplement que pour tout $x \in]-2, 2[$, on a $|\frac{x}{2}| < 1$, et donc :

$$\forall x \in]-2, 2[, \quad \frac{x}{(2-x)^2} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^{n+1}}{2^{n+2}},$$

où l'on a déduit le développement en série entière de $u \mapsto \frac{1}{(1-u)^2}$ à partir de celui usuel de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$, que nous avons dérivé ensuite. En posant $u = \frac{x}{2}$, on obtient le développement ci-dessus.

Exemple 2. Développons en série entière l'application $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$. Si l'on note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors on peut démontrer que $x^2+x+1 = (x-j)(x-\bar{j})$, de sorte qu'une décomposition en éléments simples de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ serait de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{j, \bar{j}\}, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{a}{x-j} + \frac{b}{x-\bar{j}},$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Comme le membre de gauche est réel pour $x \in \mathbb{R}$, celui de droite doit l'être également, donc il doit être égal à son conjugué : ceci impose $b = \bar{a}$. Il reste alors à multiplier par $(x-j)$ l'égalité, et à prendre $x \rightarrow j$, pour obtenir : $a = \frac{1}{j-\bar{j}} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{j} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{j}} + \frac{1}{\bar{j}} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{\bar{j}}} \right).$$

Prenons $x \in]-1, 1[$, de sorte que $|\frac{x}{j}| = |\frac{x}{\bar{j}}| < 1$ (en effet $|j| = |\bar{j}| = 1$: ce n'est rien d'autre que $e^{\pm \frac{2i\pi}{3}}$!). On peut alors utiliser le développement en série géométrique, et en déduire :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{j} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{j}\right)^n - \frac{1}{\bar{j}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\bar{j}}\right)^n \right) = \frac{i}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^{n+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{n+1}} \right) x^n.$$

Ainsi $x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$ est développée en série entière en 0.

Comme il s'agit d'une fonction à valeurs réelles, il est raisonnable d'être déçu de ne pas avoir des coefficients manifestement réels. Pour y remédier, il suffit d'écrire : $\frac{1}{j^{n+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{n+1}} = 2i \operatorname{Im} \left(j^{-(n+1)} \right) = 2i \operatorname{Im} \left(e^{-\frac{2i\pi(n+1)}{3}} \right) = -2i \sin \left(\frac{2\pi(n+1)}{3} \right)$. On a alors l'expression plus satisfaisante :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{x^2 + x + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{2\pi(n+1)}{3} \right) x^n.$$

Une exception notable à la méthode ci-dessus. Dans le cas où l'on veut développer en série entière en 0 l'application $x \mapsto \frac{1}{1-x^k}$, où k est un entier naturel non nul, nul besoin de décomposer en éléments simples : il suffit de composer le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ avec $x \mapsto x^k$ (sachant que $x^k \in]-1, 1[$ si $x \in]-1, 1[$, ce qui permet bien d'évaluer le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en x^k).

Exemple 3. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $x^5 \in]-1, 1[$, donc :

$$\frac{1}{1-x^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^5)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{5n}.$$

C'est plus rapide que de passer par une décomposition en éléments simples, comme on le fait dans l'exercice suivant.

Exercice 1.

- Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, e^{\pm \frac{2i\pi}{5}}, e^{\pm \frac{4i\pi}{5}}\}, \quad \frac{1}{1-x^5} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-e^{\frac{2i\pi}{5}}} + \frac{\bar{\beta}}{x-e^{-\frac{2i\pi}{5}}} + \frac{\gamma}{x-e^{\frac{4i\pi}{5}}} + \frac{\bar{\gamma}}{x-e^{-\frac{4i\pi}{5}}}.$$

- En déduire :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x^5} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi n}{5} \right) + 2 \cos \left(\frac{4\pi n}{5} \right) \right) x^n.$$

- Le développement obtenu semble différent de celui proposé dans l'exemple 3 : étonnant car le développement en série entière en 0 est normalement unique. Expliquer pourquoi il n'y a en vérité pas de contradiction.

2 ✓ Méthode de l'équation différentielle

Soit f une fonction qu'on cherche à développer en série entière :

- On cherche une équation différentielle (E) vérifiée par f (pour cela vous aurez besoin de calculer f' , f'' ... et de les exprimer en fonction de f , si possible).
- On cherche une solution de (E) sous la forme de la somme S d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence non nul, et vérifiant les mêmes conditions initiales (c'est-à-dire vérifiant $S(0) = f(0)$; au besoin $S'(0) = f'(0)$ si (E) est d'ordre 2, etc.). Par unicité des coefficients d'une série entière, on obtient des équations vérifiées par les a_n , qu'on résout.
- On vérifie que la série entière obtenue est effectivement de rayon de convergence non nul, de sorte que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit correctement définie (et de classe C^∞) sur un voisinage de 0. Alors, en

invoquant l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy, on en déduit $f(x) = S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Pour le second point, on pourra éventuellement s'inspirer des explications détaillées de la section *Résolution d'équations différentielles*.



Table des matières

1	✓ Cas des fractions rationnelles	1
2	✓ Méthode de l'équation différentielle	2