

MÉTHODES (PSI) – Séries entières

Applications

1 Calcul de valeurs approchées

Les séries entières permettent d'exprimer plusieurs constantes remarquables sous forme de somme. Or nous savons qu'il est possible de calculer des valeurs approchées de sommes à l'aide des sommes partielles : cela passe par une majoration convenable du reste. Ici, il s'agira en général du reste d'une série de Taylor, qui est rarement estimé à l'aide d'une comparaison entre série et intégrales (à cause du terme $\frac{1}{n!}$ gênant, qu'on n'interpole qu'avec peine à l'aide d'une fonction de la variable réelle). Il est ici préférable de passer par la formule de Taylor avec reste intégral. Ainsi, si l'objectif est de donner une valeur approchée de $S(x_0)$

à 10^{-k} près, où $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une somme de série entière :

- soit il s'agit d'une série alternée, et on majore son reste grâce au théorème spécial des séries alternées (voir section 5 du document *Méthodes* du chapitre sur les séries, ou la section 3 du document *Méthodes* du chapitre sur les séries de fonctions) ;
- soit, dans les autres cas, on privilégie la formule de Taylor avec reste intégral, en écrivant :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad R_N(x_0) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x_0^n = S(x_0) - \sum_{n=0}^N a_n x_0^n = x_0^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(tx_0) dt,$$

et on majore le reste intégral en majorant $f^{(N+1)}$ (qu'on espère facile à calculer) par son maximum : le reste de l'intégrale ne pose alors plus de souci, étant donné que :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} dt = \left[-\frac{(1-t)^{N+1}}{(N+1)!} \right]_0^1 = \frac{1}{(N+1)!}.$$

Dans les deux cas, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que : $R_N(x_0) \leq 10^{-k}$; pour un tel entier N , la somme partielle $\sum_{n=0}^N a_n x_0^n$ est une valeur approchée de $S(x_0)$ à 10^{-k} près.

Si on n'entre pas dans cette configuration, on peut songer à une comparaison entre série et intégrales, mais elle est rarement efficace dans ce contexte...

Exemple 1. Que vaut approximativement $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$? Pour en donner une valeur approchée, disons à 10^{-2} près, nous allons passer par le calcul des sommes partielles ; nous devons déterminer pour quelles valeurs de $N \in \mathbb{N}$ on a : $\left| e - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \right| < \frac{1}{100}$. Or, d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$e^1 = \sum_{n=0}^N \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!} 1^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} \exp^{(N+1)}(t) dt = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} + \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-t)^N e^t dt,$$

donc :

$$0 \leq e - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-t)^N e^t dt \leq \frac{e}{N!} \int_0^1 (1-t)^N dt = \frac{e}{(N+1)!}.$$

Cette majoration n'est pas tout à fait satisfaisante car nous ne savons pas majorer e (nous cherchons justement à le calculer !). Nous y parvenons, certes grossièrement, en majorant e par une somme qu'on sait calculer : une somme télescopique. En effet, pour tout entier $n \geq 2$, on a $n! = n \cdot (n-1) \times \dots \times 1 \geq n(n-1)$, donc :

$$e = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 + (1-0) = 3.$$

On en déduit :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq e - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \leq \frac{3}{(N+1)!}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{3}{(N+1)!} < \frac{1}{100}$, c'est-à-dire $(N+1)! > 300$; puisque $6! = 720$, le choix $N = 5$ suffit.

Alors l'écart entre la somme e et la somme partielle $\sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!}$ est strictement inférieur à 10^{-2} , donc $\sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!}$ est une valeur approchée de e à 10^{-2} près. On en déduit :

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{160}{63} \approx 2,71 \quad (\text{troncature}).$$

On retrouve l'approximation bien connue.

Exercice 1. Expliquer comment l'un des développements en série entière usuels permettrait de retrouver, par ces méthodes, la fameuse approximation $\pi \approx 3,14$.

Exercice 2. Donner une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-2} près, avec des sommes partielles ayant un nombre raisonnable de termes (de sorte qu'il soit réaliste de faire le calcul à la main).

2 ✓ Calcul de sommes

Pour calculer explicitement la somme d'une série entière, on tente de l'écrire à partir de sommes de séries entières connues à l'aide :

- d'évaluations (en remplaçant x par x^2 , $-x$, \sqrt{x} si c'est licite, etc.) ;
- de combinaisons linéaires ;
- de dérivées (éventuellement d'ordre plus grand que 1) ou de primitives.

Calcul d'une somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$: quelques pistes

Pour trouver à quelle somme usuelle se ramener :

Si vous avez dans le terme général...	Essayez de vous ramener à...	
une factorielle : $\frac{1}{n!}$	exp	
une factorielle : $\frac{1}{(2n)!}, \frac{1}{(2n+1)!}$	pas de $(-1)^n$	ch ou sh
	du $(-1)^n$	cos ou sin
pas de factorielle : $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2n}$	$x \mapsto \ln(1 \pm x)$	
pas de factorielle : $\frac{1}{2n+1}$	pas de $(-1)^n$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ (dériver)
	du $(-1)^n$	arctan
autres cas de figure	$x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ou $x \mapsto (1+x)^\alpha$	

Détaillons l'usage des évaluations :

- si vous devez calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{an+b}$ alors que vous connaissez $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, vous remplacez x par x^a dans cette dernière somme, puis la multipliez par x^b , et vous reconnaîtrez la somme que vous voulez calculer ;
- si vous devez calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors que vous connaissez $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$, vous remplacez x par \sqrt{x} ou $\sqrt{-x}$ (selon le signe, mais attention au fait qu'il puisse apparaître un $(-1)^n$ dans le processus) dans ces dernières sommes ;

- si vous devez calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$ alors que vous connaissez $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (ou inversement), vous remplacez x par $-x$ dans cette dernière somme, et en vertu de $(-x)^n = (-1)^n x^n$, vous reconnaîtrez la 1^{re} somme ;

Voici deux usages de la dérivation ou intégration, qui résument la stratégie globale :

- si vous devez calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ alors que vous connaissez $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, retenez qu'un facteur n s'interprète comme provenant de la dérivation de $x \mapsto x^n$: on a $S(x) = xT'(x)$; ainsi, en calculant la dérivée de la somme connue, vous en déduisez S ;
- si vous devez calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{an + b + 1}$ alors que vous connaissez $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, retenez qu'une division par $an + b + 1$ s'interprète comme provenant de l'intégration de $x \mapsto x^{an+b}$: on a $x^{b+1} S(x^a) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{an+b} dt = \int_0^x t^b T(t^a) dt$; ainsi, par un calcul de primitive, vous en déduisez $S(x^a)$, puis $S(x)$ avec une extraction de racine a^e .

S'il y a un numérateur ou dénominateur de degré plus élevé en n , on peut dériver et intégrer plusieurs fois. Mais il vaut mieux être méthodique : notons que lorsqu'on dérive la somme S d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \quad S^{(3)}(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}, \dots$$

il apparaît successivement, en facteur de $a_n x^{n-j}$, les polynômes $P_j = X(X-1) \cdots (X-j+1)$ évalués en n . Avec cette notation : $S^{(j)}(x) = \sum_{n=j}^{+\infty} P_j(n) a_n x^{n-j}$. Cela motive l'utilisation de ces polynômes pour faciliter le calcul de sommes de séries entières, dans les deux situations que nous développons plus amplement à la section 2.1.

→ page 4

Exemple 2. (Illustration du premier cas) Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on vous laisse vérifier que le rayon de convergence est $+\infty$).

On note qu'on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. On s'y ramène donc en écrivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = x e^{3x}.$$

Exemple 3. (Illustration du deuxième cas) Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1}$ pour tout $x \in [0,1]$ (on vous laisse vérifier que le rayon de convergence est 1 et qu'il y a convergence aussi pour $x = 1$).

On note qu'on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$. On s'y ramène en écrivant :

$$\forall x \in]0,1], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Pour $x = 0$, la somme est clairement égale à 1.

Exemple 4. (Illustration du troisième cas) Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on vous laisse vérifier que le rayon de convergence est $+\infty$).

On note qu'on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. On s'y ramène en écrivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = e^{-x^2}.$$

Exemple 5. (Illustration du quatrième cas) Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on vous laisse vérifier que le rayon de convergence est $+\infty$).

On note qu'on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh}(x)$. Par dérivation, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}'(x) = \text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{2n}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!},$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \left(\text{ch}(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \frac{1}{2} \left(\text{ch}(x) - \frac{\text{sh}(x)}{x} \right).$$

Pour $x = 0$, cette somme vaut clairement 0 (ce qui nous fournit d'ailleurs un prolongement de $x \mapsto \frac{1}{2} \left(\text{ch}(x) - \frac{\text{sh}(x)}{x} \right)$ en une application développable en série entière en 0, et en particulier de classe C^∞ au voisinage de 0, sans avoir à utiliser le théorème de la limite de la dérivée ou un autre argument laborieux).

On aurait aussi pu calculer cette somme sans dérivation : comment ?

Exemple 6. (Illustration du cinquième cas) Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ pour tout $x \in [0,1[$ (on vous laisse vérifier que le rayon de convergence est 1, et si vous le souhaitez vous pouvez même vous convaincre qu'il y a convergence en $x = -1$).

On note qu'on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$. On en déduit, en intégrant terme à terme :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

On se ramène alors à la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ via une extraction de racine carrée :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right).$$

Pour $x = 0$, cette somme est clairement égale à 1.

2.1 Somme de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$, où P est polynomiale

Plus haut, nous avons défini des polynômes $P_j = X(X-1) \cdots (X-j+1)$, dont l'intérêt est de permettre d'écrire succinctement le terme général d'une série entière dérivée : si $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $S^{(j)}(x) =$

$$\sum_{n=j}^{+\infty} P_j(n) a_n x^{n-j}.$$

Voyons en quoi cela nous permet de calculer des sommes de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$, où P est polynomiale.

On détermine des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ tels que : $P = \sum_{j=0}^k \alpha_j P_j$, et on a alors :


$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^k \alpha_j P_j(n)x^n = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j \sum_{n=j}^{+\infty} P_j(n)x^{n-j} = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{j!x^j}{(1-x)^{j+1}},$$

puisque $x \mapsto \sum_{n=j}^{+\infty} P_j(n)x^{n-j}$ est la dérivée j^e de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, c'est-à-dire $x \mapsto \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$.

Exemple 7. Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$ (nous vous laissons vérifier que le rayon de convergence est 1). Pour cela, notons $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ la somme géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n^2 = n(n-1) + n$, donc :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = x^2 S''(x) + x S'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

2.2 Somme de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$, où P est polynomiale

Ce cas est déjà mentionné dans le document *Méthodes* sur les séries numériques (section 2.2), et nous vous y renvoyons. Il est analogue à celui ci-dessus. 

2.3 Somme de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} x^n$, où P et Q sont polynomiales

Dans ce cas, il est HORS DE QUESTION de partir du calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$ et d'intégrer autant de fois que le degré de Q ne l'impose. Vous vous simplifierez considérablement la vie avec une décomposition en éléments simples : de la sorte, il n'apparaîtra plus que des facteurs de degré 1 ou 2 au dénominateur : cela correspond à UNE SEULE intégration.


Exemple 8. Calculons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)}$ pour tout $x \in]-1, 1[$ (nous vous laissons vérifier que le rayon de convergence est 1). On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= -\frac{x^2 \ln(1-x)}{2} - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - x - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= -\frac{x^2 \ln(1-x)}{2} - \frac{1}{2} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln(1-x)(1-x^2) + x + \frac{x^2}{2} \right). \end{aligned}$$

2.3.1 Sommes indexées par une classe de congruence

Si vous devez calculer des sommes du type :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1},$$

vous pouvez reconnaître des sommes indexées par des classes de congruence, et les calculer grâce à une formule d'orthogonalité : voir *Méthodes* du chapitre II, section 4.4 (*Sommes indexées par une classe de congruence*). 

Ne foncez cependant pas tête baissée dans cette méthode : il peut y avoir d'autres façons de procéder (c'est le contexte qui vous permettra de juger si elles sont plus efficaces ou non) :

— si vous cherchez à calculer $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{an+b}}{(an+b)!}$ avec a de taille raisonnable, vous pouvez aussi montrer

que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre a (calculer $f^{(a)}$ et reconnaître f) : si vous savez la résoudre, alors vous en déduisez f (cela nécessite de se placer sur \mathbb{R} , mais si vous avez besoin de l'identité sur \mathbb{C} il suffit d'utiliser le principe du prolongement analytique expliqué à la section ??) ; → page ??

— si vous cherchez à calculer $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{an+b}}{an+b}$, vous pouvez vous ramener à une somme géométrique *via* une dérivation terme à terme ; il reste alors à simplifier cette somme géométrique (on obtient une fraction rationnelle), et à intégrer le résultat obtenu pour obtenir à nouveau f *via* une décomposition en éléments simples.

Dans le second cas, la formule d'orthogonalité nécessiterait d'utiliser le logarithme complexe pour simplifier

la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(e^{\frac{2i\pi k}{a}} x\right)^n}{n}$: il est préférable d'éviter son recours.

Exemple 9. Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut calculer : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$. Après trois dérivations terme à terme, ce qui est licite pour une fonction développable en série entière, on a :

$$f^{(3)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n+2)(3n+1)(3n) \frac{x^{3n-1}}{(3n+2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \stackrel{[n'=n-1]}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} = f(x).$$

Donc f est solution de l'équation différentielle : $y^{(3)} = y$, dont les solutions sont de la forme suivante après mise sous forme matricielle $Y' = AY$ et diagonalisation sur \mathbb{C} :

$$x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \gamma e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Grâce aux conditions initiales : $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, et : $f''(0) = 1$. (on les déduit des coefficients de 1, x et x^2 dans le développement en série entière de f), on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

À noter que pour la toute dernière étape (explicitation de α , β , γ), il peut être préférable d'utiliser la \mathbb{C} -base de solutions ($x \mapsto e^x$, $x \mapsto e^{jx}$, $x \mapsto e^{j^2x}$), qui se prête mieux à la dérivation (mais pas seulement : les propriétés de j permettent d'accélérer la résolution du système linéaire).

Exercice 3.

1. Compléter les détails omis.

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$ par une autre méthode.

Exemple 10. Soit $x \in]-1, 1[$. On veut calculer : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$. Une dérivation terme à terme, licite parce que f est développable en série entière, donne :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x}.$$

On en déduit :

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Exercice 4.

1. Compléter les détails omis.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ par une autre méthode.

Enfin, notons que si l'on vous demande de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{an+b}$ avec z de module 1, vous pouvez soit :

- utiliser la formule d'orthogonalité mentionnée plus haut pour vous ramener au logarithme complexe (à condition de l'avoir déjà calculé) ;
- d'abord calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{an+b} \frac{z^n}{an+b}$, avec $x \in [0, 1[$, via une dérivation terme à terme, puis montrer avec le théorème spécial des séries alternées (si $z = -1$) ou une transformation d'Abel que la série converge uniformément sur $[0, 1[$; conclure avec le théorème de la double limite ;
- utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer directement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{an+b} = \int_0^1 x^{b-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (zx^a)^n dx = \int_0^1 \frac{1}{1-zx^a} dx,$$

sachant que l'hypothèse de domination s'obtient par majoration des sommes partielles géométriques (cette formule a l'avantage de ne pas nécessiter un argument supplémentaire pour étendre en 1 une égalité valide pour $|x| < 1$).

On donne un exemple de calcul par cette dernière approche dans *Méthodes* du chapitre VII, section 5.5.1. 

3 ✓ Résolution d'équations différentielles

Soit (E) une équation différentielle du second ordre dont on cherche des solutions non nulles :

$$\forall x \in I, \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x).$$

Si l'on nous demande de chercher une solution de (E) sous la forme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite à déterminer et $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, voici comment procéder :

1. On dérive deux fois terme à terme S . C'est possible parce que S est une somme de série entière (on pense à le rappeler dans notre raisonnement). On a donc :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

(on pourrait aussi écrire $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, etc., mais je le déconseille : cela revient implicitement à déjà faire un changement d'indice, et à quoi bon ? On aura peut-être à nouveau besoin d'en refaire un plus tard, à cause des multiplications par x , x^2 , etc. Autant attendre de voir à la fin de quoi on a besoin).

2. On injecte ces expressions dans (E) pour voir à quelle condition S est solution. À ce stade, *on développe les produits par $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$* , de sorte à ne plus avoir de termes dépendant de x en facteur des sommes $S(x)$, $S'(x)$ et $S''(x)$. S'il apparaît des fractions rationnelles dans (E) , au besoin on multiplie toute l'équation par ce qu'il faut pour qu'il n'apparaisse plus que des puissances de x .
3. Il apparaît alors, dans notre équation, plusieurs sommes de séries entières, où les puissances de x ne sont pas nécessairement les mêmes (exemples fréquents : $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}$, etc.). Faites des changements d'indice de sorte à ce que la puissance de x soit la même dans chaque somme, *peu importe laquelle* (disons x^n). Il est HORS DE QUESTION que vos calculs fassent apparaître des quantités de la forme $\frac{1}{x^k}$.
4. Quitte à isoler des termes, en général les premiers termes de ces sommes, faites commencer toutes ces sommes de séries (nouvellement réindexées pour qu'il y figure la même puissance de x) aux mêmes indices, de sorte à ce que l'égalité (E) soit équivalente à une égalité du type :

$$\text{termes isolés} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} (\text{terme dépendant de } a_n, a_{n+1}, \text{ etc.}) x^n = d(x)$$

(attention à bien quantifier x à chaque étape de vos équivalences : si l'on dit : « soit $x \in]-R, R[$, alors S est solution de (E) sur $] -R, R[$ si et seulement si... », le raisonnement est faux : il sous-entend que S est solution de (E) sur $] -R, R[$ si et seulement si il vérifie l'égalité pour CE x fixé, alors qu'il le faut pour tout x).

5. Si d est développable en série entière (c'est en particulier le cas si d est constante ou polynomiale!), alors on invoque l'unicité des coefficients d'une somme de série entière pour en déduire que S est solution de (E) si et seulement si (notez l'équivalence), en reprenant les termes de l'égalité ci-dessus :

$$\begin{cases} (\text{terme dépendant de } a_n, a_{n+1}, \text{ etc.}) = \text{coefficient de } d \text{ en facteur de } x^n, \\ \text{termes isolés} = \text{termes correspondants aux mêmes puissances de } x \text{ dans le développement de } d. \end{cases}$$

ON NE PERD PAS DE VUE QU'UN TERME CONSTANT CORRESPOND AU COEFFICIENT DE x^0 .

6. On a alors une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, qui nous permet en général d'en déduire une expression explicite. Si la récurrence relie a_n et a_{n-2} , il faut distinguer la parité de n .
7. Réciproquement, si $(a_n)_{n \geq 0}$ est de la forme trouvée, alors on montre que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est la somme d'une série entière **de rayon de convergence non nul** : pour cela, si l'on a obtenu une relation de la forme $a_{n+1} = \star \cdot a_n$ aux étapes précédentes, il est facile d'appliquer la règle de D'Alembert. Ensuite, toute l'étude qui précède démontre que S est solution de (E) (parce qu'on a raisonné par équivalence) : on a alors déterminé les solutions de (E) développables en série entière.

Ci-dessous je rédigerai les étapes 2 à 4 légèrement différemment : je simplifierai d'abord le membre de gauche de (E) dans un calcul à part, avant d'injecter dans (E) . Ce n'est qu'un détail rédactionnel.

3.1 ✓ Détails : arriver à la relation de récurrence

La marche globale est décrite ci-dessus, mais je la détaille ici sur deux exemples, où reconnaître la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ peut éventuellement être problématique. Je ne me soucierai pas d'explicitier la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, par contre (n'essayez même pas).

Solutions développables en série entière : arriver à la relation de récurrence

On cherche une solution de (E) sous la forme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose $R > 0$.

- (1) Calculer S' , S'' , etc., et les injecter dans le membre de gauche de (E) .
- (2) Développer les expressions.

- (3) Faire des changements d'indice pour avoir partout la même puissance de x .
- (4) Regrouper en une seule somme, et identifier les coefficients de chaque membre de l'égalité (E).

Exemple 11. Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation différentielle linéaire :

$$\forall x \in I, \quad (1 - x^2)y''(x) + xy(x) = 1. \quad (E)$$

où I est un intervalle contenant 0. Pour cela, soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont on note S la somme. Alors S est de classe C^∞ et dérivable terme à terme sur $] - R, R[$, donc :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On en déduit, pour tout $x \in] - R, R[$:

$$(1 - x^2)S''(x) + xS(x) \stackrel{(1)}{=} (1 - x^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(développons, pour identifier correctement les coefficients de chaque puissance de x)

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

(faisons les changements d'indice adéquats pour avoir partout la même puissance de x , disons x^n , sans oublier d'adapter les bornes)

$$\stackrel{(3)}{=} \sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+2)(n'+1) a_{n'+2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n''=1}^{+\infty} a_{n''-1} x^{n''}$$

(les sommes ne commencent pas au même indice : faisons-les toutes commencer à 1, en isolant les termes en trop (bien comprendre pourquoi on ne peut commencer à 0) ; enfin, comme les variables sont muettes, il est indolore de tout renommer n : faisons-le par souci de clarté)

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2a_2 - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$$

(rassemblons les sommes et factorisons par x^n : ainsi le coefficient de chaque monôme sera bien identifié !)

$$\stackrel{(4)}{=} 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n + a_{n-1}) x^n.$$

Alors S est solution de (E) sur $] - R, R[$ si et seulement si :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n + a_{n-1}) x^n = 1 \quad (4)$$

(il reste à identifier coefficient par coefficient, SANS OMETTRE LE COEFFICIENT CONSTANT DE DROITE, ÉGAL À 1 ; notez aussi que ci-dessous, je ne mettrai pas de x^n dans les relations : en effet, j'identifie les COEFFICIENTS de la somme de série entière dans chaque membre de l'égalité, or x^n n'est pas contenu dans lesdits coefficients)

$$\iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, & (n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n + a_{n-1} = 0, \\ & 2a_2 = 1. \end{cases} \quad (\text{unicité des coefficients})$$

Nous avons la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n \geq 0}$. N'essayez pas de la déterminer explicitement. Attardez-vous seulement sur les subtilités de chaque étape du raisonnement.

Exemple 12. Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation différentielle linéaire :

$$\forall x \in I, \quad x(1-x)y''(x) - 3y(x) = \cos(x).$$

où I est un intervalle contenant 0. Pour cela, soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont on note S la somme. Alors S est de classe C^∞ et dérivable terme à terme sur $] - R, R[$, donc :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On en déduit, pour tout $x \in] - R, R[$:

$$\begin{aligned} x(1-x)S''(x) - 3S(x) &\stackrel{(1)}{=} x(1-x) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{n'=1}^{+\infty} (n'+1) n' a_{n'+1} x^{n'} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &\stackrel{(4)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) n a_{n+1} - (n(n-1) + 3) a_n) x^n. \end{aligned}$$

Alors S est solution de (E) sur $] - R, R[$ si et seulement si :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) n a_{n+1} - (n(n-1) + 3) a_n) x^n = \cos(x)$$

(développons en série entière le membre de droite, afin d'avoir une égalité entre deux sommes de séries entières, où l'on identifiera chaque coefficient par unicité)

$$\stackrel{(4)}{\iff} \forall x \in] - R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) n a_{n+1} - (n(n-1) + 3) a_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

(on voit que seules des puissances paires de x apparaissent dans le membre de droite : NE SURTOUT PAS identifier le coefficient en facteur de x^n à gauche avec celui en facteur de x^{2n} à droite : ce serait ne rien comprendre au sens de l'unicité des coefficients, parce qu'on ne comparerait pas les coefficients des mêmes monômes ! nous n'allons pas y « remédier » en faisant le changement d'indice abominable $n' = 2n$, mais en séparant les termes pairs et impairs du membre de gauche – grâce au théorème de sommation par paquets, ici applicable par absolue convergence – pour correctement les identifier : les termes pairs s'écrivent $n = 2p$ avec $p \geq 1$ (car $n \geq 2$) et ceux impairs s'écrivent $n = 2p + 1$ avec $p \geq 1$; on peut aussi renommer en p l'indice de sommation n du membre de droite, pour clarifier l'identification : après tout, c'est une variable muette !)


$$\begin{aligned} \iff \forall x \in] - R, R[, \quad &\sum_{p=0}^{+\infty} ((2p+1) 2p a_{2p+1} - (2p(2p-1) + 3) a_{2p}) x^{2p} \\ &+ \sum_{p=0}^{+\infty} ((2p+2)(2p+1) a_{2p+2} - ((2p+1)(2p) + 3) a_{2p+1}) x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \end{aligned}$$

(il reste à identifier coefficient par coefficient : noter à quel point ce serait différent si l'on avait suivi une des mauvaises idées nommées ci-dessus)

$$\iff \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, & (2p+1) 2p a_{2p+1} - (2p(2p-1) + 3) a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}, & (\text{terme en } x^{2p} \text{ à droite}) \\ \forall p \in \mathbb{N}, & (2p+2)(2p+1) a_{2p+2} - ((2p+1)(2p) + 3) a_{2p+1} = 0. & (\text{terme en } x^{2p+1} \text{ à droite}) \end{cases}$$

Nous avons la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ (simplifiable, en regroupant les termes en a_{2p} et a_{2p+1}). N'essayez pas de la déterminer explicitement. Attardez-vous seulement sur les subtilités de chaque étape du raisonnement (en particulier les deux dernières).

3.2 ✓ Détails : déduire $(a_n)_{n \geq 0}$ de la relation de récurrence

Comme les relations de récurrence obtenues dépendent en général de n , ce ne sont pas de bêtes suites arithmétiques ou géométriques dont vous savez immédiatement trouver la forme générale : pour voir comment faire dans ce cas, consultez le document *Méthodes*, section 2 (*Relations de récurrence dépendant de n*). 

4 Études de suites

Pour expliciter une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant une relation de récurrence :

1. On obtient (par récurrence en général) une majoration de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisante pour en déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est non nul. On pose alors : $\forall x \in]-R, R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \quad (\text{si } u_n \text{ est trop gros pour que } \sum_{n \geq 0} u_n x^n \text{ soit de rayon de convergence non nul, on}$$

remplace cette série entière par $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$; l'initiative de la série entière à introduire revient à l'énoncé, de toute façon).

2. On multiplie par x^n la relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n \geq 0}$, et on somme cette relation de $n = 0$ à $+\infty$: cela donne une relation vérifiée par S (en général une équation différentielle). Cela nous permet d'en déduire une égalité : $S(x) = f(x)$ pour tout x au voisinage de 0, avec f explicite (si l'on a besoin de conditions initiales, ne pas oublier que $S(0) = u_0$ et $S'(0) = u_1$).

3. On développe f en série entière. Pour tout x au voisinage de 0 : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Les a_n peuvent être explicités si f s'écrit simplement à l'aide de fonctions usuelles. Comme $S(x) = f(x)$, par unicité des coefficients d'une somme de série entière on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n$.

Lorsqu'on passe de la relation vérifiée par $(u_n)_{n \geq 0}$ à la relation vérifiée par S , il peut apparaître des sommes

de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+k} x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n u_{n+k} x^n$, etc. Pour exprimer en fonction de S ces sommes, commencez par faire un changement de variable adéquat pour que dans le terme général apparaisse u_n . Ensuite, factorisez par une puissance convenable de x pour qu'apparaisse $u_n x^n$, et vous pourrez alors faire apparaître $S(x)$ facilement (quitte à retrancher des premiers termes manquants). Par exemple, pour tout $x \in]-R, R[$ non nul :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \frac{1}{x} (S(x) - u_0).$$

On procède de même pour le deuxième type de somme ci-dessus, en se souvenant que la multiplication par n provient d'une dérivation.

Exemple 13. (suite définie par une relation de récurrence) Utilisons la méthode expliquée ci-dessus pour retrouver l'expression explicite d'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

avec pour premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ (c'est la suite de Fibonacci).

Tout d'abord, nous devons nous assurer que la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence R non nul. Pour cela, notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'encadrement (grossier) : $0 \leq u_n \leq 2^n$. Cela se démontre par récurrence double : je relègue la vérification à l'exercice plus bas. Comme la série entière géométrique $\sum_{n \geq 0} 2^n x^n = \sum_{n \geq 0} (2x)^n$ est de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, d'après le théorème de comparaison des

séries entières on a $R \geq \frac{1}{2} > 0$. Ainsi la somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est définie sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$; si l'on multiplie

par x^n l'égalité $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, et qu'on somme de $n = 0$ à $+\infty$, on obtient :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_nx^n \iff \forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} u_nx^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_nx^{n-1} + S(x),$$

et donc, après multiplication par x^2 (je procède ainsi pour éviter de diviser par x ou x^2 , et de me poser la question de la validité en $x = 0$) :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} u_nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} u_nx^n + x^2S(x) \iff \forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \quad S(x) - u_0 - u_1x = x(S(x) - u_0) + x^2S(x).$$

Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ par hypothèse, on en déduit :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \quad (x^2 + x - 1)S(x) = -x \iff \forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \quad S(x) = -\frac{x}{x^2 + x - 1}.$$

Il reste à développer en série entière cette fraction rationnelle. Comme nous l'expliquons dans le document *Développer en série entière*, on y parvient grâce à une décomposition en éléments simples, qui nous ramène au développement en série géométrique (et éventuellement à ses dérivées). On obtient ici, après avoir noté

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ les deux racines de $X^2 + X - 1$:

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \quad S(x) = -\frac{x}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x_2^n} \right) x^n.$$

Mais on a aussi, par définition : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_nx^n$. On en déduit, par identification des coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x_2^n} \right) = \frac{x_2^n - x_1^n}{\sqrt{5}(x_1x_2)^n}.$$

Comme $x_1x_2 = -1$, on peut simplifier cette expression et obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

C'est aussi l'expression que vous auriez trouvée en explicitant la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ via les méthodes classiques (soit de 1^{re} année, soit en mettant la relation de récurrence sous forme matricielle).

Exercice 5. Compléter l'exemple ci-dessus :

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2^n$ (ne pas utiliser l'expression explicite de $(u_n)_{n \geq 0}$! en effet, pour obtenir cette expression explicite, nous avons DÉJÀ besoin de savoir que cet encadrement est vrai : le serpent se mordrait la queue).
2. Montrer : $\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, x^2 + x - 1 \neq 0$, et : $\frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right)$ où l'on a posé : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.
3. En déduire le développement en série entière de $x \mapsto -\frac{x}{x^2 + x - 1}$ proposé.

Exercice 6. Soit $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Retrouver le résultat vu en 1^{re} année, sur la forme explicite des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, grâce aux séries entières et en s'inspirant de l'exemple précédent. Montrer que le rayon de convergence est non nul risque de vous embêter : vous aurez probablement besoin de la plus grande racine (qui est positive) de l'équation $x^2 - |a|x - |b| = 0$.

Cette méthode s'applique aussi aux calculs de suites définies par des sommes : si $u_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$,

alors pour tout x dans un voisinage de 0 : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_nx^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n \right)$ (produit de Cauchy). Si

l'on connaît les deux sommes du membre de droite, on en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et on poursuit le raisonnement comme ci-dessus pour en déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 14. (suite définie par une somme) Voyons comment passer par les séries entières permet de calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n k.$$

On note que $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n \geq 0} n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} x^n$. Ces deux séries entières sont de rayon de convergence 1, donc $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence au moins 1, et pour tout $x \in]-1, 1[$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right).$$

La deuxième somme est géométrique, et donc égale à $\frac{1}{1-x}$. La première s'obtient par dérivation et multiplication par x de la somme géométrique. On en déduit :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \frac{x}{(1-x)^3}.$$

Il reste à développer en série entière l'application $x \mapsto \frac{x}{(1-x)^3}$, en dérivant deux fois le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, et en multipliant par $\frac{x}{2}$. On en déduit :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)n}{2} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(n+1)n}{2}$.

Exercice 7. Écrire les détails omis dans l'exemple ci-dessus :

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} n x^n$, et calculer sa somme.
2. Développer en série entière l'application $x \mapsto \frac{x}{(1-x)^3}$.

Exercice 8. S'inspirer de cet exemple pour trouver une expression explicite de $\sum_{k=0}^n k^2$ et $\sum_{k=0}^n k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (vous pouvez bien sûr être plus aventureux, et considérer $\sum_{k=0}^n k^4$, $\sum_{k=0}^n k^5$, etc., mais c'est plus calculatoire).

Nous mentionnons aussi le cas particulier des suites vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$, dans le document *À quoi servent les produits de Cauchy ?*

5 ✓ Fonctions génératrices

L'idée est ici très proche de celle du paragraphe précédent. Voir le cours du chapitre de probabilités, et son document *Méthodes* (section 7, *Fonctions génératrices : cas où elles prévalent*), pour plus de détails.

Table des matières

1	Calcul de valeurs approchées	1
2	✓ Calcul de sommes	2
2.1	Somme de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$, où P est polynomiale	4
2.2	Somme de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$, où P est polynomiale	5
2.3	Somme de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} x^n$, où P et Q sont polynomiales	5
2.3.1	Sommes indexées par une classe de congruence	6
3	✓ Résolution d'équations différentielles	7
3.1	✓ Détails : arriver à la relation de récurrence	8
3.2	✓ Détails : déduire $(a_n)_{n \geq 0}$ de la relation de récurrence	11
4	Études de suites	11
5	✓ Fonctions génératrices	13