Méthodes (PSI) – Séries entières

1 ✓ Calcul du rayon de convergence

Nous avons, dans les grandes lignes, quatre moyens de déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$:

1. **La définition**. On a $R = \sup\left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n \rho^n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\right\}$ si cet ensemble est majoré. Sinon : $R = +\infty$.
2. **L'interprétation pratique du rayon de convergence**. Utile si l'on connaît la nature de la série entière évaluée en certains nombres complexes :
   — s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge, alors $R \leqslant |z|$ (c'est-à-dire : z est hors du disque) ;
   — s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge, alors $R \geqslant |z|$ (c'est-à-dire : z est dans le disque).
3. **La règle de D'Alembert**. Un recours que vous appréciez et que je n'ai pas à détailler. Je mets toutefois en garde contre sa mauvaise utilisation dans la section 1.2. → page 2
4. **Le théorème de comparaison des séries entières**.

Vous pouvez combiner plusieurs de ces méthodes, par exemple en déterminant *d'abord* un équivalent simple de a_n (qu'on note b_n), *puis* en appliquant une de ces méthodes à la détermination du rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.

Le théorème de comparaison nécessite d'avoir quelques rayons de convergence de référence : on peut penser à ceux des développements en série entière usuels (la série géométrique notamment), mais aussi à ceux obtenus en dérivant ou intégrant des séries entières de rayon connus.

Enfin, on n'oublie pas que ce théorème de comparaison peut s'appliquer aussi si l'on a un encadrement grossier. Si une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$ pour tout n assez grand, cela suffit à démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 (le démontrer).

On devra souvent se contenter d'un tel encadrement lorsqu'il s'agira d'expliciter des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en étudiant la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ associée : faute d'avoir une expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, comment pourrions-nous en déduire un équivalent simple ? Il faudra dans ces cas-là se contenter de peu. Voir la section 2.4, et plus particulièrement l'exemple 15, pour avoir une idée de ce que j'entends par là. → page 13

1.1 Cas où revenir à la définition est pertinent

La définition n'est pas un critère *pratique*, **sauf lorsque le comportement asymptotique de $(a_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ peut être facilement déterminé grâce au théorème des croissances comparées**.

Exemple 1. Pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+$, la suite $\left(e^{-n^2}\rho^n\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (d'après le théorème des croissances comparées) et est donc bornée ; on en déduit :

$$\left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid \left(e^{-n^2}\rho^n\right)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\right\} = \mathbb{R}_+ \text{ (qui n'est pas majoré)},$$

et donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2} z^n$ est $R = +\infty$.

Exemple 2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est non constant et $\rho \in \mathbb{R}_+$, alors la suite $(P(n)\rho^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (et est donc bornée) si $\rho < 1$ d'après le théorème des croissances comparées, et si $\rho \geqslant 1$ alors elle tend vers $\pm\infty$ et n'est donc pas bornée ; on en déduit :

$$\left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (P(n)\rho^n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\right\} = [0,1[,$$

et donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} P(n)z^n$ est $R=1$.

Autrement, la définition est surtout utile pour les exercices THÉORIQUES (la preuve en est l'usage abondante fait dans les démonstrations du cours).

1.2 ✓ Cas où utiliser la règle de D'Alembert est *idiot*

Si l'on vous demande de déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, vous ne DEVEZ PAS utiliser la règle de D'Alembert lorsque :

— c'est une série entière usuelle (vous perdez du temps et donnez l'impression de ne pas connaître votre cours) ;

— la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie à l'aide de cosinus et sinus (ils n'ont pas de limite, voire peuvent s'annuler, ce qui ne permet pas d'écrire $\frac{u_{n+1}}{u_n}$) ;

— la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas explicite (ou, du moins, est trop compliquée), et que vous avez seulement connaissance d'une inégalité du type $u_n \leqslant \alpha_n$ pour tout n (avec α_n explicite, elle).

Sur ce dernier point, notez que $u_n \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ne permet absolument pas d'en déduire que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ ou quoi que ce soit de semblable. On oublie la règle de D'Alembert dans ce cas, et on se contente d'utiliser *le théorème de comparaison des séries entières.*

2 ✓ Applications des séries entières

2.1 Calcul de valeurs approchées

Les séries entières permettent d'exprimer plusieurs constantes remarquables sous forme de somme. Or nous savons qu'il est possible de calculer des valeurs approchées de sommes à l'aide des sommes partielles : cela passe par une majoration convenable du reste. Ici, il s'agira en général du reste d'une série de Taylor, qui est rarement estimé à l'aide d'une comparaison entre série et intégrales (à cause du terme $\dfrac{1}{n!}$ gênant, qu'on n'interpole qu'avec peine à l'aide d'une fonction de la variable réelle). Il est ici préférable de passer par la formule de Taylor avec reste intégral. Ainsi, si l'objectif est de donner une valeur approchée de $S(x_0)$ à 10^{-k} près, où $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une somme de série entière :

— soit il s'agit d'une série alternée, et on majore son reste grâce au théorème spécial des séries alternées (voir section 5 du document *Méthodes* du chapitre sur les séries, ou la section 3 du document *Méthodes* du chapitre sur les séries de fonctions) ;

— soit, dans les autres cas, on privilégie la formule de Taylor avec reste intégral, en écrivant :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad R_N(x_0) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x_0^n = S(x_0) - \sum_{n=0}^{N} a_n x_0^n = x_0^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(tx_0)\mathrm{d}t,$$

et on majore le reste intégral en majorant $f^{(N+1)}$ (qu'on espère facile à calculer) par son maximum : le reste de l'intégrale ne pose alors plus de souci, étant donné que :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!}\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{N+1}}{(N+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(N+1)!}.$$

Dans les deux cas, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que : $R_N(x_0) \leqslant 10^{-k}$; pour un tel entier N, la somme partielle $\sum_{n=0}^{N} a_n x_0^n$ est une valeur approchée de de $S(x_0)$ à 10^{-k} près.

Si on n'entre pas dans cette configuration, on peut songer à une comparaison entre série et intégrales, mais elle est rarement efficace dans ce contexte...

Exemple 3. Que vaut approximativement $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$? Pour en donner une valeur approchée, disons à 10^{-2} près, nous allons passer par le calcul des sommes partielles ; nous devons déterminer pour quelles valeurs de $N \in \mathbb{N}$ on a : $\left| e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \right| < \frac{1}{100}$. Or, d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$e^1 = \sum_{n=0}^{N} \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!} 1^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} \exp^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-t)^N e^t \mathrm{d}t,$$

donc :

$$0 \leqslant e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-t)^N e^t \mathrm{d}t \leqslant \frac{e}{N!} \int_0^1 (1-t)^N \mathrm{d}t = \frac{e}{(N+1)!}.$$

Cette majoration n'est pas tout à fait satisfaisante car nous ne savons pas majorer e (nous cherchons justement à le calculer !). Nous y parvenons, certes grossièrement, en majorant e par une somme qu'on sait calculer : une somme télescopique. En effet, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $n! = n \cdot (n-1) \times \cdots \times 1 \geqslant n(n-1)$, donc :

$$e = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 + (1-0) = 3.$$

On en déduit :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \leqslant \frac{3}{(N+1)!}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{3}{(N+1)!} < \frac{1}{100}$, c'est-à-dire $(N+1)! > 300$; puisque $6! = 720$, le choix $N = 5$ suffit. Alors l'écart entre la somme e et la somme partielle $\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$ est strictement inférieur à 10^{-2}, donc $\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$ est une valeur approchée de e à 10^{-2} près. On en déduit :

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{160}{63} \approx 2{,}71 \quad \text{(troncature)}.$$

On retrouve l'approximation bien connue.

Exercice 1. Expliquer comment l'un des développements en série entière usuels permettrait de retrouver, par ces méthodes, la fameuse approximation $\pi \approx 3{,}14$.

Exercice 2. Donner une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-2} près, avec des sommes partielles ayant un nombre raisonnable de termes (de sorte qu'il soit réaliste de faire le calcul à la main).

2.2 ✓ Calcul de sommes

Pour calculer explicitement la somme d'une série entière, on tente de l'écrire à partir de sommes de séries entières connues à l'aide :

- d'évaluations (en remplaçant x par x^2, $-x$, $\sqrt{x}$ si c'est licite, etc.) ;
- de combinaisons linéaires ;
- de dérivées (éventuellement d'ordre plus grand que 1) ou de primitives.

Calcul d'une somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$: quelques pistes

Pour trouver à quelle somme usuelle se ramener :

Si vous avez dans le terme général...		Essayez de vous ramener à...
une factorielle : $\frac{1}{n!}$		exp
une factorielle : $\frac{1}{(2n)!}$, $\frac{1}{(2n+1)!}$	pas de $(-1)^n$	ch ou sh
	du $(-1)^n$	cos ou sin
pas de factorielle : $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{2n}$		$x \mapsto \ln(1 \pm x)$
pas de factorielle : $\frac{1}{2n+1}$	pas de $(-1)^n$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ (dériver)
	du $(-1)^n$	arctan
autres cas de figure		$x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ou $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Détaillons l'usage des évaluations :

— si vous devez calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{an+b}$ alors que vous connaissez $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, vous remplacez x par x^a dans cette dernière somme, puis la multipliez par x^b, et vous reconnaîtrez la somme que vous voulez calculer ;

— si vous devez calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors que vous connaissez $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$, vous remplacez x par $\sqrt{x}$ ou $\sqrt{-x}$ (selon le signe, mais attention au fait qu'il puisse apparaître un $(-1)^n$ dans le processus) dans ces dernières sommes ;

— si vous devez calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$ alors que vous connaissez $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (ou inversement), vous remplacez x par $-x$ dans cette dernière somme, et en vertu de : $(-x)^n = (-1)^n x^n$, vous reconnaîtrez la 1re somme ;

Voici deux usages de la dérivation ou intégration, qui résument la stratégie globale :

— si vous devez calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ alors que vous connaissez $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, retenez qu'un facteur n s'interprète comme provenant de la dérivation de $x \mapsto x^n$: on a $S(x) = xT'(x)$; ainsi, en calculant la dérivée de la somme connue, vous en déduisez S ;

— si vous devez calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n x^n}{an+b+1}$ alors que vous connaissez $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, retenez qu'une division par $an+b+1$ s'interprète comme provenant de l'intégration de $x \mapsto x^{an+b}$: on a $x^{b+1} S(x^a) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{an+b} \mathrm{d}t = \int_0^x t^b T(t^a) \mathrm{d}t$; ainsi, par un calcul de primitive, vous en déduisez $S(x^a)$, puis $S(x)$ avec une extraction de racine ae.

S'il y a un numérateur ou dénominateur de degré plus élevé en n, on peut dériver et intégrer plusieurs fois. Mais il vaut mieux être méthodique : notons que lorsqu'on dérive la somme S d'une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \; S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \; S^{(3)}(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}, \ldots$$

il apparaît successivement, en facteur de $a_n x^{n-j}$, les polynômes $P_j = X(X-1)\cdots(X-j+1)$ évalués en n. Avec cette notation : $S^{(j)}(x) = \sum_{n=j}^{+\infty} P_j(n) a_n x^{n-j}$. Cela motive l'utilisation de ces polynômes pour faciliter le calcul de sommes de séries entières, dans les deux situations que nous développons plus amplement à la section 2.2.1. → page 6

Exemple 4. (Illustration du premier cas) Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on vous laisse vérifier que le rayon de convergence est $+\infty$).

On note qu'on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. On s'y ramène donc en écrivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^3\right)^n}{n!} = x e^{3x}.$$

Exemple 5. (Illustration du deuxième cas) Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1}$ pour tout $x \in [0,1]$ (on vous laisse vérifier que le rayon de convergence est 1 et qu'il y a convergence aussi pour $x = 1$).

On note qu'on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$. On s'y ramène en écrivant :

$$\forall x \in]0,1], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Pour $x = 0$, la somme est clairement égale à 1.

Exemple 6. (Illustration du troisième cas) Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on vous laisse vérifier que le rayon de convergence est $+\infty$).

On note qu'on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. On s'y ramène en écrivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = e^{-x^2}.$$

Exemple 7. (Illustration du quatrième cas) Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n x^{2n}}{(2n+1)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on vous laisse vérifier que le rayon de convergence est $+\infty$).

On note qu'on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh}(x)$. Par dérivation, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n x^{2n}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!},$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}(x) - \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} \right).$$

Pour $x = 0$, cette somme vaut clairement 0 (ce qui nous fournit d'ailleurs un prolongement de $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(x) - \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)$ en une application développable en série entière en 0, et en particulier de classe C^∞ au voisinage de 0, sans avoir à utiliser le théorème de la limite de la dérivée ou un autre argument laborieux).

Exercice 3. Calculer cette somme sans recourir à une dérivation.

Exemple 8. (Illustration du cinquième cas) Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ pour tout $x \in [0,1[$ (on vous laisse vérifier que le rayon de convergence est 1, et si vous le souhaitez vous pouvez même vous convaincre qu'il y a convergence en $x = -1$).

On note qu'on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$. On en déduit, en intégrant terme à terme :

$$\forall x \in]-1{,}1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On se ramène alors à la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ *via* une extraction de racine carrée :

$$\forall x \in]0{,}1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right).$$

Pour $x = 0$, cette somme est clairement égale à 1.

2.2.1 Somme de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$, où P est polynomiale

Plus haut, nous avons défini des polynômes $P_j = X(X-1)\cdots(X-j+1)$, dont l'intérêt est de permettre d'écrire succinctement le terme général d'une série entière dérivée : si $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $S^{(j)}(x) = \sum_{n=j}^{+\infty} P_j(n)a_n x^{n-j}$.

Voyons en quoi cela nous permet de calculer des sommes de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$, où P est polynomiale.

On détermine des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ tels que : $P = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j P_j$, et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k} \alpha_j P_j(n)x^n = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j \sum_{n=j}^{+\infty} P_j(n)x^{n-j} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{j!x^j}{(1-x)^{j+1}},$$

puisque $x \mapsto \sum_{n=j}^{+\infty} P_j(n)x^{n-j}$ est la dérivée j^{e} de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, c'est-à-dire $x \mapsto \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$.

Exemple 9. Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ pour tout $x \in]-1{,}1[$ (nous vous laissons vérifier que le rayon de convergence est 1). Pour cela, notons $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ la somme géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n^2 = n(n-1) + n$, donc :

$$\forall x \in]-1{,}1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x^2 S''(x) + xS'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

2.2.2 Somme de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}x^n$, où P est polynomiale

Ce cas est déjà mentionné dans le document *Méthodes* sur les séries numériques (section 2.2.2), et nous vous y renvoyons. Il est analogue à celui ci-dessus.

2.2.3 Somme de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} x^n$, où P et Q sont polynomiales

Dans ce cas, il est HORS DE QUESTION de partir du calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$ et d'intégrer autant de fois que le degré de Q ne l'impose. Vous vous simplifierez considérablement la vie avec une décomposition en éléments simples : de la sorte, il n'apparaîtra plus que des facteurs de degré 1 ou 2 au dénominateur : cela correspond à UNE SEULE intégration.

Exemple 10. Calculons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)}$ pour tout $x \in]-1,1[$ (nous vous laissons vérifier que le rayon de convergence est 1). On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} &= \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= -\frac{x^2 \ln(1-x)}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - x - \frac{x^2}{2}\right) \\
&= -\frac{x^2 \ln(1-x)}{2} - \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(1-x)(1-x^2) + x + \frac{x^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

2.2.4 Sommes indexées par une classe de congruence

Si vous devez calculer des sommes du type :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1},$$

vous pouvez reconnaître des sommes indexées par des classes de congruence, et les calculer grâce à une formule d'orthogonalité : voir *Méthodes* du chapitre II, section 4.4 (*Sommes indexées par une classe de congruence*).

Ne foncez cependant pas tête baissée dans cette méthode : il peut y avoir d'autres façons de procéder (c'est le contexte qui vous permettra de juger si elles sont plus efficaces ou non) :

— si vous cherchez à calculer $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{an+b}}{(an+b)!}$ avec a de taille raisonnable, vous pouvez aussi montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre a (calculer $f^{(a)}$ et reconnaître f) : si vous savez la résoudre, alors vous en déduisez f (cela nécessite de se placer sur $\mathbb{R}$, mais si vous avez besoin de l'identité sur $\mathbb{C}$ il suffit d'utiliser le principe du prolongement analytique expliqué à la section 6) ; → page 19

— si vous cherchez à calculer $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{an+b}}{an+b}$, vous pouvez vous ramener à une somme géométrique *via* une dérivation terme à terme ; il reste alors à simplifier cette somme géométrique (on obtient une fraction rationnelle), et à intégrer le résultat obtenu pour obtenir à nouveau f *via* une décomposition en éléments simples.

Dans le second cas, la formule d'orthogonalité nécessiterait d'utiliser le logarithme complexe pour simplifier la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(e^{\frac{2i\pi k}{a}} x\right)^n}{n}$: il est préférable d'éviter son recours.

Exemple 11. Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut calculer : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$. Après trois dérivations terme à terme, ce qui est licite pour une fonction développable en série entière, on a :

$$f^{(3)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n+2)(3n+1)(3n)\frac{x^{3n-1}}{(3n+2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \overset{[n'=n-1]}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} = f(x).$$

Donc f est solution de l'équation différentielle : $y^{(3)} = y$, dont les solutions sont de la forme suivante après mise sous forme matricielle $Y' = AY$ et diagonalisation sur $\mathbb{C}$:

$$x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \gamma e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Grâce aux conditions initiales : $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, et : $f''(0) = 1$. (on les déduit des coefficients de 1, x et x^2 dans le développement en série entière de f), on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

À noter que pour la toute dernière étape (explicitation de α, β, γ), il peut être préférable d'utiliser la $\mathbb{C}$-base de solutions $\left(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{jx}, x \mapsto e^{j^2x}\right)$, qui se prête mieux à la dérivation (mais pas seulement : les propriétés de j permettent d'accélérer la résolution du système linéaire).

Exercice 4.

1. Compléter les détails omis.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$ par une autre méthode.

Exemple 12. Soit $x \in]-1,1[$. On veut calculer : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$. Une dérivation terme à terme, licite parce que f est développable en série entière, donne :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x}.$$

On en déduit :

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Exercice 5.

1. Compléter les détails omis.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ par une autre méthode.

Enfin, notons que si l'on vous demande de calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{an+b}$ avec z de module 1, vous pouvez soit :

— utiliser la formule d'orthogonalité mentionnée plus haut pour vous ramener au logarithme complexe (à condition de l'avoir déjà calculé) ;

— d'abord calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{an+b}\frac{z^n}{an+b}$, avec $x \in [0,1[$, *via* une dérivation terme à terme, puis montrer avec le théorème spécial des séries alternées (si $z = -1$) ou une transformation d'Abel que la série converge uniformément sur $[0,1]$; conclure avec le théorème de la double limite ;

— utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer directement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{an+b} = \int_0^1 x^{b-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (zx^a)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1-zx^a} \mathrm{d}x,$$

sachant que l'hypothèse de domination s'obtient par majoration des sommes partielles géométriques (cette formule a l'avantage de ne pas nécessiter un argument supplémentaire pour étendre en 1 une égalité valide pour $|x| < 1$).

On donne un exemple de calcul par cette dernière approche dans *Méthodes* du chapitre VII, section 5.5.1.

2.3 ✓ Résolution d'équations différentielles

Soit (E) une équation différentielle du second ordre dont on cherche des solutions non nulles :

$$\forall x \in I, \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x).$$

Si l'on nous demande de chercher une solution de (E) sous la forme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à déterminer et $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, voici comment procéder :

1. On dérive deux fois terme à terme S. C'est possible parce que S est une somme de série entière (on pense à le rappeler dans notre raisonnement). On a donc :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

(*on pourrait aussi écrire* $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$, *etc., mais je le déconseille : cela revient implicitement à déjà faire un changement d'indice, et à quoi bon ? On aura peut-être à nouveau besoin d'en refaire un plus tard, à cause des multiplications par* x, x^2, *etc. Autant attendre de voir à la fin de quoi on a besoin*).

2. On injecte ces expressions dans (E) pour voir à quelle condition S est solution. À ce stade, *on développe les produits par* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, de sorte à ne plus avoir de termes dépendant de x en facteur des sommes $S(x)$, $S'(x)$ et $S''(x)$. S'il apparaît des fractions rationnelles dans (E), au besoin on multiplie toute l'équation par ce qu'il faut pour qu'il n'apparaisse plus que des puissances de x.

3. Il apparaît alors, dans notre équation, plusieurs sommes de séries entières, où les puissances de x ne sont pas nécessairement les mêmes (exemples fréquents : $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}$, etc.). Faites des changements d'indice de sorte à ce que la puissance de x soit la même dans chaque somme, *peu importe* laquelle (disons x^n). Il est HORS DE QUESTION que vos calculs fassent apparaître des quantités de la forme $\frac{1}{x^k}$.

4. Quitte à isoler des termes, en général les premiers termes de ces sommes, faites commencer toutes ces sommes de séries (nouvellement réindexées pour qu'il y figure la même puissance de x) aux mêmes indices, de sorte à ce que l'égalité (E) soit équivalente à une égalité du type :

$$\text{termes isolés} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} (\text{terme dépendant de } a_n, a_{n+1}, \text{ etc.})\, x^n = d(x)$$

(*attention à bien quantifier* x *à chaque étape de vos équivalences : si l'on dit : « soit* $x \in]-R, R[$, *alors* S *est solution de* (E) *sur* $]-R, R[$ *si et seulement si... », le raisonnement est faux : il sous-entend que* S *est solution de* (E) *sur* $]-R, R[$ *si et seulement s'il vérifie l'égalité pour* CE x *fixé, alors qu'il le faut pour tout* x).

5. Si d est développable en série entière (c'est en particulier le cas si d est constante ou polynomiale !), alors on invoque l'unicité des coefficients d'une somme de série entière pour en déduire que S est solution de (E) *si et seulement si* (notez l'équivalence), en reprenant les termes de l'égalité ci-dessus :

$$\begin{cases} \text{(terme dépendant de } a_n, a_{n+1}, \text{ etc.)} = \text{coefficient de } d \text{ en facteur de } x^n, \\ \text{termes isolés} = \text{termes correspondants aux mêmes puissances de } x \text{ dans le développement de } d. \end{cases}$$

On ne perd pas de vue qu'un terme constant correspond au coefficient de x^0.

6. On a alors une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, qui nous permet en général d'en déduire une expression explicite. Si la récurrence relie a_n et a_{n-2}, il faut distinguer la parité de n.
7. Réciproquement, si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est de la forme trouvée, alors on montre que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est la somme d'une série entière **de rayon de convergence non nul** : pour cela, si l'on a obtenu une relation de la forme $a_{n+1} = \bigstar \cdot a_n$ aux étapes précédentes, il est facile d'appliquer la règle de D'Alembert. Ensuite, toute l'étude qui précède démontre que S est solution de (E) (parce qu'on a raisonné par équivalence) : on a alors déterminé les solutions de (E) développables en série entière.

Ci-dessous je rédigerai les étapes 2 à 4 légèrement différemment : je simplifierai d'abord le membre de gauche de (E) dans un calcul à part, avant d'injecter dans (E). Ce n'est qu'un détail rédactionnel.

2.3.1 ✓ Détails : arriver à la relation de récurrence

La marche globale est décrite ci-dessus, mais je la détaille ici sur deux exemples, où reconnaître la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ peut éventuellement être problématique. Je ne me soucierai pas d'expliciter la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, par contre (n'essayez même pas).

Solutions développables en série entière : arriver à la relation de récurrence

On cherche une solution de (E) sous la forme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose $R > 0$.

(1) Calculer S', S'', etc., et les injecter dans le membre de gauche de (E).

(2) Développer les expressions.

(3) Faire des changements d'indice pour avoir partout la même puissance de x.

(4) Regrouper en une seule somme, et identifier les coefficients de chaque membre de l'égalité (E).

Exemple 13. Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation différentielle linéaire :

$$\forall x \in I, \quad (1-x^2)y''(x) + xy(x) = 1. \tag{E}$$

où I est un intervalle contenant 0. Pour cela, soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont on note S la somme. Alors S est de classe C^∞ et dérivable terme à terme sur $]-R, R[$, donc :

$$\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$(1-x^2)S''(x) + xS(x) \overset{(1)}{=} (1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(développons, pour identifier correctement les coefficients de chaque puissance de x)

$$\overset{(2)}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

(faisons les changements d'indice adéquats pour avoir partout la même puissance de x, disons x^n, sans oublier d'adapter les bornes)

$$\overset{(3)}{=} \sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+2)(n'+1)a_{n'+2}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n''=1}^{+\infty} a_{n''-1}x^{n''}$$

(les sommes ne commencent pas au même indice : faisons-les toutes commencer à 1, en isolant les termes en trop (bien comprendre pourquoi on ne peut commencer à 0) ; enfin, comme les variables sont muettes, il est indolore de tout renommer n : faisons-le par souci de clarté)

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 2a_2 - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n$$

(rassemblons les sommes et factorisons par x^n : ainsi le coefficient de chaque monôme sera bien identifié !)

$$\overset{(4)}{=} 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + a_{n-1}\right) x^n.$$

Alors S est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + a_{n-1}\right) x^n = 1 \tag{4}$$

(il reste à identifier coefficient par coefficient, SANS OMETTRE LE COEFFICIENT CONSTANT DE DROITE, ÉGAL À 1 ; notez aussi que ci-dessous, je ne mettrai pas de x^n dans les relations : en effet, j'identifie les COEFFICIENTS de la somme de série entière dans chaque membre de l'égalité, or x^n n'est pas contenu dans lesdits coefficients)

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + a_{n-1} & = & 0, \\ 2a_2 & = & 1. \end{array} \right. \qquad \text{(unicité des coefficients)}$$

Nous avons la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$. N'essayez pas de la déterminer explicitement. Attardez-vous seulement sur les subtilités de chaque étape du raisonnement.

Exemple 14. Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation différentielle linéaire :

$$\forall x \in I, \quad x(1-x)y''(x) - 3y(x) = \cos(x).$$

où I est un intervalle contenant 0. Pour cela, soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, dont on note S la somme. Alors S est de classe C^∞ et dérivable terme à terme sur $]-R,R[$, donc :

$$\forall x \in]-R,R[, \; S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned} x(1-x)S''(x) - 3S(x) &\overset{(1)}{=} x(1-x)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &\overset{(3)}{=} \sum_{n'=1}^{+\infty} (n'+1)n' a_{n'+1} x^{n'} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &\overset{(4)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)n a_{n+1} - (n(n-1)+3)a_n\right) x^n. \end{aligned}$$

Alors S est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)na_{n+1}-(n(n-1)+3)a_n\right)x^n=\cos(x)$$

(développons en série entière le membre de droite, afin d'avoir une égalité entre deux sommes de séries entières, où l'on identifiera chaque coefficient par unicité)

$$\overset{(4)}{\iff} \forall x\in]-R,R[,\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)na_{n+1}-(n(n-1)+3)a_n\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

(on voit que seules des puissances paires de x apparaissent dans le membre de droite : NE SURTOUT PAS identifier le coefficient en facteur de x^n à gauche avec celui en facteur de x^{2n} à droite : ce serait ne rien comprendre au sens de l'unicité des coefficients, parce qu'on ne comparerait pas les coefficients des mêmes monômes ! nous n'allons pas y « remédier » en faisant le changement d'indice abominable $n'=2n$, mais en séparant les termes pairs et impairs du membre de gauche – grâce au théorème de sommation par paquets, ici appliquable par absolue convergence – pour correctement les identifier : les termes pairs s'écrivent $n=2p$ avec $p\geqslant 1$ (car $n\geqslant 2$) et ceux impairs s'écrivent $n=2p+1$ avec $p\geqslant 1$; on peut aussi renommer en p l'indice de sommation n du membre de droite, pour clarifier l'identification : après tout, c'est une variable muette !)

$$\iff \forall x\in]-R,R[,\sum_{p=0}^{+\infty}\left((2p+1)2pa_{2p+1}-(2p(2p-1)+3)a_{2p}\right)x^{2p}$$

$$+\sum_{p=0}^{+\infty}\left((2p+2)(2p+1)a_{2p+2}-((2p+1)(2p)+3)a_{2p+1}\right)x^{2p+1}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p}$$

(il reste à identifier coefficient par coefficient : noter à quel point ce serait différent si l'on avait suivi une des mauvaises idées nommées ci-dessus)

$$\iff \begin{cases}\forall p\in\mathbb{N}, & (2p+1)2pa_{2p+1}-(2p(2p-1)+3)a_{2p} & = & \frac{(-1)^p}{(2p)!}, & \text{(terme en } x^{2p} \text{ à droite)}\\ \forall p\in\mathbb{N}, & (2p+2)(2p+1)a_{2p+2}-((2p+1)(2p)+3)a_{2p+1} & = & 0. & \text{(terme en } x^{2p+1} \text{ à droite)}\end{cases}$$

Nous avons la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ (simplifiable, en regroupant les termes en a_{2p} et a_{2p+1}). N'essayez pas de la déterminer explicitement. Attardez-vous seulement sur les subtilités de chaque étape du raisonnement (en particulier les deux dernières).

2.3.2 ✓ Détails : déduire $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de la relation de récurrence

Comme les relations de récurrence obtenues dépendent en général de n, ce ne sont pas de bêtes suites arithmétiques ou géométriques dont vous savez immédiatement trouver la forme générale : pour voir comment faire dans ce cas, consultez le document *Méthodes*, section 2 (*Relations de récurrence dépendant de n*).

2.4 Études de suites

Pour expliciter une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant une relation de récurrence :

1. On obtient (par récurrence en général) une majoration de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisante pour en déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}u_nx^n$ est non nul. On pose alors : $\forall x\in]-R,R[$, $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$ (si u_n est trop gros pour que $\sum_{n\geqslant 0}u_nx^n$ soit de rayon de convergence non nul, on remplace cette série entière par $\sum_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}x^n$; l'initiative de la série entière à introduire revient à l'énoncé, de toute façon).
2. On multiplie par x^n la relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n\geqslant 0}$, et on somme cette relation de $n=0$ à $+\infty$: cela donne une relation vérifiée par S (en général une équation différentielle). Cela nous permet d'en déduire une égalité : $S(x)=f(x)$ pour tout x au voisinage de 0, avec f explicite (si l'on a besoin de conditions initiales, ne pas oublier que $S(0)=u_0$ et $S'(0)=u_1$).

3. On développe f en série entière. Pour tout x au voisinage de 0 : $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Les a_n peuvent être explicités si f s'écrit simplement à l'aide de fonctions usuelles. Comme $S(x)=f(x)$, par unicité des coefficients d'une somme de série entière on en déduit : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=a_n$.

Lorsqu'on passe de la relation vérifiée par $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à la relation vérifiée par S, il peut apparaître des sommes de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+k}x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} nu_{n+k}x^n$, etc. Pour exprimer en fonction de S ces sommes, commencez par faire un changement de variable adéquat pour que dans le terme général apparaisse u_n. Ensuite, factorisez par une puissance convenable de x pour qu'apparaisse u_nx^n, et vous pourrez alors faire apparaître $S(x)$ facilement (quitte à retrancher des premiers termes manquants). Par exemple, pour tout $x\in]-R,R[$ non nul :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty} u_nx^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} u_nx^n=\frac{1}{x}\left(S(x)-u_0\right).$$

On procède de même pour le deuxième type de somme ci-dessus, en se souvenant que la multiplication par n provient d'une dérivation.

Exemple 15. (Suite définie par une relation de récurrence) Utilisons la méthode expliquée ci-dessus pour retrouver l'expression explicite d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,$$

avec pour premiers termes $u_0=0$ et $u_1=1$ (c'est la suite de Fibonacci).

Tout d'abord, nous devons nous assurer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_nx^n$ est de rayon de convergence R non nul. Pour cela, notons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons l'encadrement (grossier) : $0\leqslant u_n\leqslant 2^n$. Cela se démontre par récurrence double : je relègue la vérification à l'exercice plus bas. Comme la série entière géométrique $\sum_{n\geqslant 0} 2^nx^n=\sum_{n\geqslant 0}(2x)^n$ est de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, d'après le théorème de comparaison des séries entières on a $R\geqslant \frac{1}{2}>0$. Ainsi la somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_nx^n$ est définie sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$; si l'on multiplie par x^n l'égalité $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, et qu'on somme de $n=0$ à $+\infty$, on obtient :

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty} u_nx^n \iff \forall x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[,\quad \sum_{n=2}^{+\infty} u_nx^{n-2}=\sum_{n=1}^{+\infty} u_nx^{n-1}+S(x),$$

et donc, après multiplication par x^2 (je procède ainsi pour éviter de diviser par x ou x^2, et de me poser la question de la validité en $x=0$) :

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[,\quad \sum_{n=2}^{+\infty} u_nx^n=x\sum_{n=1}^{+\infty} u_nx^n+x^2S(x) \iff \forall x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[,\quad S(x)-u_0-u_1x=x(S(x)-u_0)+x^2S(x).$$

Comme $u_0=0$ et $u_1=1$ par hypothèse, on en déduit :

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[,\quad (x^2+x-1)S(x)=-x \iff \forall x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[,\quad S(x)=-\frac{x}{x^2+x-1}.$$

Il reste à développer en série entière cette fraction rationnelle. Comme nous l'expliquons dans la section 3.1, on y parvient grâce à une décomposition en éléments simples, qui nous ramène au développement en série géométrique (et éventuellement à ses dérivées). On obtient ici, après avoir noté $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ les deux racines de X^2+X-1 :

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[,\quad S(x)=-\frac{x}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1^n}-\frac{1}{x_2^n}\right)x^n.$$

Mais on a aussi, par définition : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. On en déduit, par identification des coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x_2^n} \right) = \frac{x_2^n - x_1^n}{\sqrt{5}(x_1 x_2)^n}.$$

Comme $x_1 x_2 = -1$, on peut simplifier cette expression et obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

C'est aussi l'expression que vous auriez trouvée en explicitant la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *via* les méthodes classiques (soit de 1re année, soit en mettant la relation de récurrence sous forme matricielle).

Exercice 6. Compléter l'exemple ci-dessus :

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2^n$ (ne pas utiliser l'expression explicite de $(u_n)_{n \geqslant 0}$! en effet, pour obtenir cette expression explicite, nous avions DÉJÀ besoin de savoir que cet encadrement est vrai : le serpent se mordrait la queue).
2. Montrer : $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $x^2 + x - 1 \neq 0$, et : $\dfrac{1}{x^2+x-1} = \dfrac{1}{x_1 - x_2} \left(\dfrac{1}{x - x_1} - \dfrac{1}{x - x_2} \right)$ où l'on a posé : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
3. En déduire le développement en série entière de $x \mapsto -\dfrac{x}{x^2+x-1}$ proposé.

Exercice 7. Soit $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Retrouver le résultat vu en 1re année, sur la forme explicite des suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$, grâce aux séries entières et en s'inspirant de l'exemple précédent. Montrer que le rayon de convergence est non nul risque de vous embêter : vous aurez probablement besoin de la plus grande racine (qui est positive) de l'équation $x^2 - |a|x - |b| = 0$.

Cette méthode s'applique aussi aux calculs de suites définies par des sommes : si $u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, alors pour tout x dans un voisinage de 0 : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right)$ (produit de Cauchy). Si l'on connaît les deux sommes du membre de droite, on en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et on poursuit le raisonnement comme ci-dessus pour en déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 16. (Suite définie par une somme) Voyons comment passer par les séries entières permet de calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} k.$$

On note que $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n \geqslant 0} n x^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} x^n$. Ces deux séries entières sont de rayon de convergence 1, donc $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence au moins 1, et pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right).$$

La deuxième somme est géométrique, et donc égale à $\dfrac{1}{1-x}$. La première s'obtient par dérivation et multiplication par x de la somme géométrique. On en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \frac{x}{(1-x)^3}.$$

Il reste à développer en série entière l'application $x \mapsto \dfrac{x}{(1-x)^3}$, en dérivant deux fois le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et en multipliant par $\dfrac{x}{2}$. On en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)n}{2} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(n+1)n}{2}$.

Exercice 8. Écrire les détails omis dans l'exemple ci-dessus :

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$, et calculer sa somme.
2. Développer en série entière l'application $x \mapsto \dfrac{x}{(1-x)^3}$.

Exercice 9. S'inspirer de cet exemple pour trouver une expression explicite de $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (vous pouvez bien sûr être plus aventureux, et considérer $\sum_{k=0}^{n} k^4$, $\sum_{k=0}^{n} k^5$, etc., mais c'est plus calculatoire).

Nous mentionnons aussi le cas particulier des suites vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$, dans la section 4.3. → page 18

2.5 ✓ Fonctions génératrices

L'idée est ici très proche de celle du paragraphe précédent. Voir le cours du chapitre de probabilités, et son livret *Méthodes* (section 7, *Fonctions génératrices : cas où elles prévalent*), pour plus de détails.

3 ✓ Développer en série entière

Pour montrer qu'une fonction se développe en série entière en 0 (ou expliciter ce développement), on tente de l'écrire à partir de développements en séries entières en 0 connus à l'aide :

— de combinaisons linéaires ;

— d'évaluations (en remplaçant x par x^2, $-x$, $\sqrt{x}$ si c'est licite, etc.) ;

— de dérivées (éventuellement d'ordre plus grand que 1) ou de primitives.

Si l'on n'est pas dans les cas de figure ci-dessus (exemple : fonction définie comme une *composition* ou un *quotient* de fonctions, même développables en série entière), alors on privilégie la méthode de l'équation différentielle, expliquée dans la section 3.2. → page 17

3.1 ✓ Cas des fractions rationnelles

Pour développer en série entière une fraction rationnelle de la forme $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *où Q ne s'annule pas en* 0, on effectue une décomposition en éléments simples *dans* $\mathbb{C}$. Alors, développer en série entière en 0 l'application $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ revient à développer en série entière des fractions rationnelles de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^k}$ où $a \neq 0$ et $k \geqslant 1$. Cela se fait en partant du développement de $x \mapsto \dfrac{1}{a-x} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{x}{a}}$, et en le dérivant.

Exemple 17. Pour développer en série entière l'application $x \mapsto \dfrac{x}{(2-x)^2}$, on écrit simplement que pour tout $x \in]-2,2[$, on a $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, et donc :

$$\forall x \in]-2,2[, \quad \frac{x}{(2-x)^2} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^{n+1}}{2^{n+2}},$$

où l'on a déduit le développement en série entière de $u \mapsto \dfrac{1}{(1-u)^2}$ à partir de celui usuel de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$, que nous avons dérivé ensuite. En posant $u = \frac{x}{2}$, on obtient le développement ci-dessus.

Exemple 18. Développons en série entière l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$. Si l'on note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors on peut démontrer que $x^2+x+1 = (x-j)(x-\bar{j})$, de sorte qu'une décomposition en éléments simples de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ serait de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{j, \bar{j}\}, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{a}{x-j} + \frac{b}{x-\bar{j}},$$

avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Comme le membre de gauche est réel pour $x \in \mathbb{R}$, celui de droite doit l'être également, donc il doit être égal à son conjugué : ceci impose $b = \bar{a}$. Il reste alors à multiplier par $(x-j)$ l'égalité, et à prendre $x \to j$, pour obtenir : $a = \dfrac{1}{j-\bar{j}} = \dfrac{1}{i\sqrt{3}}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{j} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{j}} + \frac{1}{\bar{j}} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{\bar{j}}}\right).$$

Prenons $x \in]-1,1[$, de sorte que $\left|\frac{x}{j}\right| = \left|\frac{x}{\bar{j}}\right| < 1$ (en effet $|j| = |\bar{j}| = 1$: ce n'est rien d'autre que $e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$!). On peut alors utiliser le développement en série géométrique, et en déduire :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{j} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{j}\right)^n - \frac{1}{\bar{j}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\bar{j}}\right)^n\right) = \frac{i}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^{n+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{n+1}}\right) x^n.$$

Ainsi $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ est développée en série entière en 0.

Comme il s'agit d'une fonction à valeurs réelles, il est raisonnable d'être déçu de ne pas avoir des coefficients manifestement réels. Pour y remédier, il suffit d'écrire : $\frac{1}{j^{n+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(j^{-(n+1)}\right) = 2i\mathrm{Im}\left(e^{-\frac{2i\pi(n+1)}{3}}\right) = -2i\sin\left(\frac{2\pi(n+1)}{3}\right)$. On a alors l'expression plus satisfaisante :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi(n+1)}{3}\right) x^n.$$

Une exception notable à la méthode ci-dessus. Dans le cas où l'on veut développer en série entière en 0 l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^k}$, où k est un entier naturel non nul, nul besoin de décomposer en éléments simples : il suffit de composer le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ avec $x \mapsto x^k$ (sachant que $x^k \in]-1,1[$ si $x \in]-1,1[$, ce qui permet bien d'évaluer le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en x^k).

Exemple 19. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $x^5 \in]-1,1[$, donc :

$$\frac{1}{1-x^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^5\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{5n}.$$

C'est plus rapide que de passer par une décomposition en éléments simples, comme on le fait dans l'exercice suivant.

Exercice 10.

1. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, e^{\pm\frac{2i\pi}{5}}, e^{\pm\frac{4i\pi}{5}}\}, \qquad \frac{1}{1-x^5} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x - e^{\frac{2i\pi}{5}}} + \frac{\bar{\beta}}{x - e^{-\frac{2i\pi}{5}}} + \frac{\gamma}{x - e^{\frac{4i\pi}{5}}} + \frac{\bar{\gamma}}{x - e^{-\frac{4i\pi}{5}}}.$$

2. En déduire :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-x^5} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 + 2\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)\right)x^n.$$

3. Le développement obtenu semble différent de celui proposé dans l'exemple 19 : étonnant car le développement en série entière en 0 est normalement unique. Expliquer pourquoi il n'y a en vérité pas de contradiction.

3.2 ✓ Méthode de l'équation différentielle

Soit f une fonction qu'on cherche à développer en série entière :

1. On cherche une équation différentielle (E) vérifiée par f (pour cela vous aurez besoin de calculer f', f''... et de les exprimer en fonction de f, si possible).
2. On cherche une solution de (E) sous la forme de la somme S d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *de rayon de convergence non nul*, et vérifiant les mêmes conditions initiales (c'est-à-dire vérifiant $S(0) = f(0)$; au besoin $S'(0) = f'(0)$ si (E) est d'ordre 2, etc.). Par unicité des coefficients d'une série entière, on obtient des équations vérifiées par les a_n, qu'on résout.
3. On vérifie que la série entière obtenue est effectivement de rayon de convergence non nul, de sorte que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit correctement définie (et de classe C^∞) sur un voisinage de 0. Alors, en invoquant l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy, on en déduit $f(x) = S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Pour le second point, on pourra éventuellement s'inspirer des explications détaillées de la section 2.3. ← page 9

4 À quoi servent les produits de Cauchy ?

4.1 ✓ À justifier qu'une application est développable en série entière

En effet, le produit de Cauchy nous assure que le produit de deux sommes de séries entières reste une somme de série entière. C'est donc un moyen **théorique** de montrer qu'une application est développable en série entière, si elle est produit de fonctions développables en série entière en 0. De la sorte, les fonctions $x \mapsto e^x \ln(1+x)$, $x \mapsto (\arctan(x))^2$ et $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{1-x}$ sont toutes développables en série entière en 0.

Néanmoins, ce n'est pas un outil **pratique** pour développer en série entière. En effet, la somme $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est rarement calculable directement (c'est d'ailleurs souvent le contraire : on *utilise* les séries entières *pour* calculer de telles sommes). Si l'on a besoin d'expliciter le développement en série entière d'une fonction obtenue à l'aide d'un produit, on essaiera plutôt de la linéariser pour faire disparaître le produit (ce serait possible pour $x \mapsto \sin(x)e^x$ ou $x \mapsto (\cos(x))^2$ par exemple), ou d'utiliser l'une des méthodes de la section précédente.

4.2 À expliciter des suites ou calculer des sommes

La stratégie est développée à la fin de la section 2.4. ← page 12

4.3 Cas des relations de la forme $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$ ou $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$

Pour déterminer l'expression explicite d'une suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$, il est plus pertinent d'étudier $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{w_n}{n!} x^n$ plutôt que $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n x^n$. Pour comprendre ce qui rend cette dernière série préférable, notons que l'identité $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ implique, après division par $n!$ dans la relation de récurrence ci-dessus :

$$\frac{w_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} \frac{v_{n-k}}{(n-k)!},$$

donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{w_n}{n!} x^n$ est le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ par $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{v_n}{n!} x^n$, et si l'on parvient à démontrer que ces deux séries entières ont un rayon de convergence supérieur ou égal à $R > 0$, alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{n!} x^n.$$

Si l'on connaît u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors cette identité permet *a priori* de calculer la somme du membre de droite puis, *via* les principes de la section 2.4, d'en déduire w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas d'une relation de la forme : $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$, on peut reprendre le raisonnement ci-dessus. Si l'on note S la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!} x^n$, alors $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n$ n'est rien d'autre que la dérivée de $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} = S(x) - u_0$: c'est donc S'. Le produit de Cauchy ci-dessus donne alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n = S'(x).$$

Nous nous retrouvons avec une équation différentielle vérifiée par S : si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est explicite et la somme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n$ calculable, alors on est en mesure d'expliciter S. Une fois S écrite à l'aide de fonctions usuelles, on développe en série entière l'expression obtenue et, par identification, on trouve une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 ☢ Utilisation de la formule intégrale de Cauchy

La formule intégrale de Cauchy (qui n'est pas du cours et est à savoir démontrer) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in]0, R[, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} \mathrm{d}t,$$

où : $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ (on la démontre en général pour $z_0 = 0$), est extraordinaire parce qu'elle permet de contrôler la taille des coefficients a_n d'une série entière (et donc aussi la taille de ses dérivées successives) uniquement à l'aide de la taille de sa somme sur des sphères appropriées. C'est donc en particulier dans ces contextes qu'on peut songer à l'employer :

Quand utiliser la formule intégrale de Cauchy

Lorsqu'on veut démontrer une propriété des **coefficients** ou des **dérivées** d'une fonction f développable en série entière (nullité, majoration...), alors que nos hypothèses ne portent que sur f.

Le théorème de Liouville, présent dans vos feuilles d'exercices, est à cet égard un cas d'école et sa démonstration doit impérativement être connue.

Attention cependant : notez bien qu'il faut savoir contrôler la taille de f dans le plan complexe. Ce n'est donc d'aucune utilité (du moins, au niveau de la classe préparatoire) si elle fait intervenir une fonction non définie dans le plan complexe, ou du moins mal connue, comme $x \mapsto \sqrt{1+x}$, ou si les hypothèses se bornent à des intervalles de $\mathbb{R}$.

Exemple 20. Soit $f : \mathrm{B}_f(0{,}1) \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\mathrm{B}_f(0{,}1)$ et développable en série entière sur $\mathrm{B}(0{,}1)$. On suppose que f est nulle sur $\mathrm{S}(0{,}1)$, et on veut montrer que f est identiquement nulle (ceux qui connaissent le principe du maximum ne seront pas surpris par ce résultat).

On est en plein dans le cadre d'application de la formule de Cauchy : les hypothèses sont sur f, et plus précisément sur son comportement sur le bord du disque unité du plan complexe (ce qui fait immédiatement songer au $f(e^{it})$ de la formule intégrale de Cauchy), et on veut en déduire un résultat sur ses coefficients (en effet, la nullité de f équivaut à la nullité de ses coefficients a_n).

Faisons. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in]0{,}1[$, on a : $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t$. Problème : on voudrait faire apparaître $f(e^{it})$, puisque la nullité est sur la sphère unité. L'idée est de prendre la limite quand $r \to 1$, ce qui est licite par le théorème de continuité des intégrales à paramètres (en effet les hypothèses sur f assurent la continuité de $(t,r) \mapsto f\left(re^{it}\right)e^{-int}$ sur le fermé borné $[0{,}2\pi] \times [0{,}1]$, et donc par le théorème des bornes atteintes l'hypothèse de domination est automatiquement vérifiée). On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 0\mathrm{d}t = 0,$$

d'où le résultat : $f = 0$ sur $\mathrm{B}(0{,}1)$ et donc sur $\mathrm{B}_f(0{,}1)$.

Équivalent ou majoration d'une suite non explicite à l'aide de sa série génératrice. Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est étudiée *via* sa série génératrice $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ (dont on note S la somme) vous pouvez, à défaut de pouvoir l'expliciter (si S est explicite mais trop compliquée à développer explicitement en série entière), la majorer grâce à la formule de Cauchy, voire en donner un équivalent (mais c'est beaucoup plus difficile). Cela nécessite d'avoir en présence des fonctions usuelles dont le comportement dans le plan complexe est saisissable, à savoir $z \mapsto e^z$ et des fractions rationnelles.

Pour avoir la meilleure majoration possible, on essaie de choisir r de sorte à compenser la croissance du terme prépondérant de $S(re^{it})$. Cela dépend du contexte.

Quand privilégier la formule de Parseval à la formule de Cauchy ? La formule de Parseval :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right|^2 \mathrm{d}t$$

a très souvent le même mérite que la formule de Cauchy. Quelques différences néanmoins :

- elle fait apparaître **tous** les coefficients a_n dans le membre de gauche, et non un seul isolément, ce qui est intéressant si vous avez **des relations entre les coefficients** dans les hypothèses ou conclusions du résultat à montrer ;
- elle donne une **égalité** liant les $|a_n|$ et $|f|$, ce qui permet entre autres de s'en servir dans les **minorations** de la somme des $|a_n|$ ou des dérivées, si vous avez des hypothèses invoquant des minorations de $|f|$ (chose *a priori* impossible avec la formule de Cauchy).

C'est dans ces contextes que vous pouvez y songer. En dehors de cela, il revient très souvent au même de raisonner avec l'une ou l'autre formule.

6 Les séries entières et le prolongement des identités

Nous avons déjà illustré cette année comment, en ayant une égalité de la forme $P(x) = Q(x)$ entre deux applications polynomiales, pour un nombre fini de x (tant que ce nombre dépasse le degré de $P - Q$), nous pouvons en déduire : $P = Q$. C'est un raisonnement extrêmement puissant puisqu'ensuite, une égalité entre polynômes peut être évaluée en TOUT nombre complexe, en TOUT endomorphisme, en TOUTE matrice, etc., alors qu'on avait originellement une égalité valable en une poignée de nombres seulement.

Seulement l'approche a ses limites puisque, en mathématiques, tout n'est pas forcément polynomial... Toutefois, beaucoup de fonctions usuelles sont des sommes de séries entières, et c'est intéressant parce qu'il a été démontré dans le cours un résultat analogue à celui mentionné ci-dessus pour les polynômes :

$$\text{si } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ pour tout } x \text{ dans un voisinage de } 0, \text{ alors : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n.$$

En particulier, si tous les coefficients a_n et b_n sont égaux, alors les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ sont égales, et donc leurs sommes aussi ; mais partout, pas seulement dans un voisinage de 0 ! En résumé :

Principe du prolongement analytique

Deux sommes de séries entière égales sur un voisinage de 0 sont égales PARTOUT !

En vérité, le « principe du prolongement analytique » ici formulé est une version édulcorée du vrai principe qui est archi-méga-encore-plus-puissant.

Ainsi, si une égalité entre deux fonctions développables en série entière est valable pour tout x dans un voisinage de 0, alors elle est valable tout le temps. C'est très utile lorsque nous sommes contraints de passer par la variable réelle (pour dériver, intégrer, etc.), alors que nous voulons ultimement évaluer une somme en un nombre complexe. Nous l'illustrons dans l'exemple suivant.

Exemple 21. Imaginons qu'on ait à calculer la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(n\theta)}{2^n}$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. Nous avons coutume de calculer de telles sommes en passant par la forme exponentielle : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(n\theta)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{in\theta}}{2^n}\right)$. De la sorte ici, grâce aux propriétés de l'exponentielle, nous reconnaissons la somme de série entière $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$ évaluée en $z = \frac{e^{i\theta}}{2}$. Or nous savons obtenir cette somme par dérivation de la somme géométrique ; on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{donc :} \quad \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

et donc : $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. Il suffirait alors de poser $x = \frac{e^{i\theta}}{2}$, et de prendre la partie réelle, pour en déduire la somme voulue. Problème : pour dériver la somme géométrique, nous avions besoin de nous restreindre à une variable réelle (car nous ne savons pas dériver selon une variable complexe en PSI), et il n'est donc pas possible de donner à x une valeur complexe...

C'est là que le principe du prolongement analytique, expliqué ci-dessus, vient à la rescousse : l'égalité ci-dessus peut se réécrire :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = 1, \tag{$*$}$$

et il s'agit d'une égalité entre deux sommes de séries entières (en effet un produit de fonctions développables en série entière est développable en série entière, et la fonction constante égale à 1 est aussi une somme de série entière), sur un voisinage de 0. Par le principe du prolongement analytique, elles sont égales partout sur leur disque ouvert (commun) de convergence : cela nous permet alors de l'évaluer en $\frac{e^{i\theta}}{2}$. C'est ce que nous formalisons ci-dessous, puisque deux choses sont très informelles dans les phrases précédentes :

— le fait que le membre de gauche soit une somme de série entière ;
— ce qu'est ce fameux disque ouvert commun de convergence.

Pour montrer que cette égalité reste valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, notons $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ le produit de Cauchy de la série entière $(1-z)^2 = 1 - 2z + z^2$ (qui est de rayon de convergence infini) par $\sum_{n\geqslant 1} nz^{n-1}$ (qui est de rayon de convergence 1). Alors $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ est de rayon de convergence au moins 1, et si l'on note f sa somme alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a :

$$(1-z)^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = f(z). \tag{$\dagger$}$$

En particulier, cette égalité doit être aussi vraie en remplaçant z par un réel $x \in]-1,1[$ (qui vérifie bien $|x| < 1$). En comparant ($\dagger$) avec ($*$), on a donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 1.$$

Ainsi f et $x \mapsto 1$ sont deux sommes de série entière qui coïncident sur un voisinage de 0 (en l'occurrence $]-1,1[$). Par unicité des coefficients, on a donc $c_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_n = 0$. Autrement dit, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = c_0 = 1$, et donc l'égalité ($\dagger$) montre que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a :

$$(1-z)^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = 1, \text{ et donc : } \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Mission accomplie : on a étendu à des nombres complexes une relation *a priori valable en des réels uniquement*. On peut la multiplier par z et poser $z = \frac{e^{i\theta}}{2}$ (qui vérifie bien $|z| < 1$) pour en déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{in\theta}}{2^n} = \frac{\frac{e^{i\theta}}{2}}{\left(1 - \frac{e^{i\theta}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{e^{i\theta}}{2}}{\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{2}\right|^4} \times \left(1 - \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^2,$$

et donc : $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(n\theta)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{e^{i\theta}}{2}}{\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{2}\right|^4} \times \left(1 - \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^2\right).$$

Exercice 11. Terminer le calcul ci-dessus pour en déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(n\theta)}{2^n} = 2 \cdot \frac{5\cos(\theta) - 4}{(5 - 4\cos(\theta))^2}$.

Exercice 12. Redémontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$, sans utiliser de prolongement analytique, mais avec un produit de Cauchy adéquat.

Exercice 13. Utiliser le principe du prolongement analytique pour montrer que si l'on sait que $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que les fonctions cosinus et sinus sont développables en série entière sur $\mathbb{C}$, alors on en déduit que cette relation doit aussi être vraie pour tout $x \in \mathbb{C}$, *sans utiliser les formules d'Euler*.

Exercice 14. Montrer que l'application $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ N'est PAS développable en série entière en 0 (*raisonner par l'absurde, et utiliser le principe du prolongement analytique pour montrer qu'on aurait alors :* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = z$ *; conclure que c'est impossible*). De même avec $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ et $z \mapsto |z|^2$.

L'exercice suivant est un raffinement de ce principe du prolongement analytique, plus proche en esprit du « vrai » principe. On y montre notamment que 0 est nécessairement un zéro « isolé » d'une fonction développable en série entière.

Exercice 15. (principe des zéros isolés : version faible) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière dans un voisinage de 0 qu'on appelle I.

1. Montrer que f est identiquement nulle si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.
2. Montrer que si f est non identiquement nulle alors, en notant $n_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $a_{n_0} \neq 0$, et g l'application $x \mapsto \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^{n-n_0}$:
   — pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = x^{n_0} g(x)$;
   — l'application g est développable en série entière sur I, et $g(0) \neq 0$;
   — il existe $r > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in]-r, r[\cap I$ (utiliser le point précédent).
3. Déduire de la question précédente que si f est une application développable en série entière en 0, qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, alors f est identiquement nulle (on pourrait remplacer $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ par toute suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ convergeant vers 0).

Table des matières