Méthodes (MP) – Séries entières

☢ Utilisation de la formule intégrale de Cauchy

La formule intégrale de Cauchy (qui n'est pas du cours et est à savoir démontrer) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in]0,R[, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t,$$

où : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ (on la démontre en général pour $z_0 = 0$), est extraordinaire parce qu'elle permet de contrôler la taille des coefficients a_n d'une série entière (et donc aussi la taille de ses dérivées successives) uniquement à l'aide de la taille de sa somme sur des sphères appropriées. C'est donc en particulier dans ces contextes qu'on peut songer à l'employer :

Quand utiliser la formule intégrale de Cauchy

Lorsqu'on veut démontrer une propriété des **coefficients** ou des **dérivées** d'une fonction f développable en série entière (nullité, majoration...), alors que nos hypothèses ne portent que sur f.

Le théorème de Liouville, présent dans vos feuilles d'exercices, est à cet égard un cas d'école et sa démonstration doit impérativement être connue.

Attention cependant : notez bien qu'il faut savoir contrôler la taille de f dans le plan complexe. Ce n'est donc d'aucune utilité (du moins, au niveau de la classe préparatoire) si elle fait intervenir une fonction non définie dans le plan complexe, ou du moins mal connue, comme $x \mapsto \sqrt{1+x}$, ou si les hypothèses se bornent à des intervalles de $\mathbb{R}$.

Exemple 1. Soit $f : \mathrm{B}_f(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\mathrm{B}_f(0,1)$ et développable en série entière sur $\mathrm{B}(0,1)$. On suppose que f est nulle sur $\mathrm{S}(0,1)$, et on veut montrer que f est identiquement nulle (ceux qui connaissent le principe du maximum ne seront pas surpris par ce résultat).

On est en plein dans le cadre d'application de la formule de Cauchy : les hypothèses sont sur f, et plus précisément sur son comportement sur le bord du disque unité du plan complexe (ce qui fait immédiatement songer au $f(e^{it})$ de la formule intégrale de Cauchy), et on veut en déduire un résultat sur ses coefficients (en effet, la nullité de f équivaut à la nullité de ses coefficients a_n).

Faisons. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in]0,1[$, on a : $a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t$. Problème : on voudrait faire apparaître $f(e^{it})$, puisque la nullité est sur la sphère unité. L'idée est de prendre la limite quand $r \to 1$, ce qui est licite par le théorème de continuité des intégrales à paramètres (en effet les hypothèses sur f assurent la continuité de $(t,r) \mapsto f\left(re^{it}\right)e^{-int}$ sur le compact $[0,2\pi] \times [0,1]$, et donc par le théorème des bornes atteintes l'hypothèse de domination est automatiquement vérifiée). On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 0\mathrm{d}t = 0,$$

d'où le résultat : $f = 0$ sur $\mathrm{B}(0,1)$ et donc sur $\mathrm{B}_f(0,1)$.

Équivalent ou majoration d'une suite non explicite à l'aide de sa série génératrice. Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est étudiée *via* sa série génératrice $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$ (dont on note S la somme) vous pouvez, à défaut de pouvoir l'expliciter (si S est explicite mais trop compliquée à développer explicitement en série entière), la majorer grâce à la formule de Cauchy, voire en donner un équivalent (mais c'est beaucoup plus difficile). Cela nécessite d'avoir en présence des fonctions usuelles dont le comportement dans le plan complexe est saisissable, à savoir $z \mapsto e^z$ et des fractions rationnelles.

Pour avoir la meilleure majoration possible, on essaie de choisir r de sorte à compenser la croissance du terme prépondérant de $S(re^{it})$. Cela dépend du contexte.

Quand privilégier la formule de Parseval à la formule de Cauchy ? La formule de Parseval :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right|^2 \mathrm{d}t$$

a très souvent le même mérite que la formule de Cauchy. Quelques différences néanmoins :

— elle fait apparaître **tous** les coefficients a_n dans le membre de gauche, et non un seul isolément, ce qui est intéressant si vous avez **des relations entre les coefficients** dans les hypothèses ou conclusions du résultat à montrer ;

— elle donne une **égalité** liant les $|a_n|$ et $|f|$, ce qui permet entre autres de s'en servir dans les **minorations** de la somme des $|a_n|$ ou des dérivées, si vous avez des hypothèses invoquant des minorations de $|f|$ (chose *a priori* impossible avec la formule de Cauchy).

C'est dans ces contextes que vous pouvez y songer. En dehors de cela, il revient très souvent au même de raisonner avec l'une ou l'autre formule.