Méthodes (MP) – Séries entières
✓ Développer en série entière

Pour montrer qu'une fonction se développe en série entière en 0 (ou expliciter ce développement), on tente de l'écrire à partir de développements en séries entières en 0 connus à l'aide :

— de combinaisons linéaires ;

— d'évaluations (en remplaçant x par x^2, $-x$, $\sqrt{x}$ si c'est licite, etc.) ;

— de dérivées (éventuellement d'ordre plus grand que 1) ou de primitives.

Si l'on n'est pas dans les cas de figure ci-dessus (exemple : fonction définie comme une *composition* ou un *quotient* de fonctions, même développables en série entière), alors on privilégie la méthode de l'équation différentielle, expliquée dans la section 2. → page 2

1 ✓ Cas des fractions rationnelles

Pour développer en série entière une fraction rationnelle de la forme $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *où Q ne s'annule pas en* 0, on effectue une décomposition en éléments simples *dans* $\mathbb{C}$. Alors, développer en série entière en 0 l'application $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ revient à développer en série entière des fractions rationnelles de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^k}$ où $a \neq 0$ et $k \geqslant 1$. Cela se fait en partant du développement de $x \mapsto \dfrac{1}{a-x} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{x}{a}}$, et en le dérivant.

Exemple 1. Pour développer en série entière l'application $x \mapsto \dfrac{x}{(2-x)^2}$, on écrit simplement que pour tout $x \in]-2{,}2[$, on a $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, et donc :

$$\forall x \in]-2{,}2[, \quad \frac{x}{(2-x)^2} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^{n+1}}{2^{n+2}},$$

où l'on a déduit le développement en série entière de $u \mapsto \dfrac{1}{(1-u)^2}$ à partir de celui usuel de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$, que nous avons dérivé ensuite. En posant $u = \frac{x}{2}$, on obtient le développement ci-dessus.

Exemple 2. Développons en série entière l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$. Si l'on note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors on peut démontrer que $x^2 + x + 1 = (x-j)(x-\bar{j})$, de sorte qu'une décomposition en éléments simples de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ serait de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{j, \bar{j}\}, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{a}{x-j} + \frac{b}{x-\bar{j}},$$

avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Comme le membre de gauche est réel pour $x \in \mathbb{R}$, celui de droite doit l'être également, donc il doit être égal à son conjugué : ceci impose $b = \bar{a}$. Il reste alors à multiplier par $(x-j)$ l'égalité, et à prendre $x \to j$, pour obtenir : $a = \dfrac{1}{j-\bar{j}} = \dfrac{1}{i\sqrt{3}}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{j} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{j}} + \frac{1}{\bar{j}} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{\bar{j}}} \right).$$

Prenons $x \in]-1{,}1[$, de sorte que $\left|\frac{x}{j}\right| = \left|\frac{x}{\bar{j}}\right| < 1$ (en effet $|j| = |\bar{j}| = 1$: ce n'est rien d'autre que $e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$!). On peut alors utiliser le développement en série géométrique, et en déduire :

$$\forall x \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{j} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{j}\right)^n - \frac{1}{\bar{j}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\bar{j}}\right)^n \right) = \frac{i}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^{n+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{n+1}} \right) x^n.$$

Ainsi $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ est développée en série entière en 0.

Comme il s'agit d'une fonction à valeurs réelles, il est raisonnable d'être déçu de ne pas avoir des coefficients manifestement réels. Pour y remédier, il suffit d'écrire : $\frac{1}{j^{n+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{n+1}} = 2i\mathrm{Im}\left(j^{-(n+1)}\right) = 2i\mathrm{Im}\left(e^{-\frac{2i\pi(n+1)}{3}}\right) = -2i\sin\left(\frac{2\pi(n+1)}{3}\right)$. On a alors l'expression plus satisfaisante :

$$\forall x \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{x^2+x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi(n+1)}{3}\right) x^n.$$

Une exception notable à la méthode ci-dessus. Dans le cas où l'on veut développer en série entière en 0 l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^k}$, où k est un entier naturel non nul, nul besoin de décomposer en éléments simples : il suffit de composer le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ avec $x \mapsto x^k$ (sachant que $x^k \in]-1{,}1[$ si $x \in]-1{,}1[$, ce qui permet bien d'évaluer le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en x^k).

Exemple 3. Pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a $x^5 \in]-1{,}1[$, donc :

$$\frac{1}{1-x^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^5\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{5n}.$$

C'est plus rapide que de passer par une décomposition en éléments simples, comme on le fait dans l'exercice suivant.

Exercice 1.

1. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\frac{1}{1-X^5} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X-e^{\frac{2i\pi}{5}}} + \frac{\bar{\beta}}{X-e^{-\frac{2i\pi}{5}}} + \frac{\gamma}{X-e^{\frac{4i\pi}{5}}} + \frac{\bar{\gamma}}{X-e^{-\frac{4i\pi}{5}}}.$$

2. En déduire :

$$\forall x \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-x^5} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + 2\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)\right) x^n.$$

3. Le développement obtenu semble différent de celui proposé dans l'exemple 3 : étonnant car le développement en série entière en 0 est normalement unique. Expliquer pourquoi il n'y a en vérité pas de contradiction.

2 ✓ Méthode de l'équation différentielle

Soit f une fonction qu'on cherche à développer en série entière :

1. On cherche une équation différentielle (E) vérifiée par f (pour cela vous aurez besoin de calculer f', f''... et de les exprimer en fonction de f, si possible).
2. On cherche une solution de (E) sous la forme de la somme S d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *de rayon de convergence non nul*, et vérifiant les mêmes conditions initiales (c'est-à-dire vérifiant $S(0) = f(0)$; au besoin $S'(0) = f'(0)$ si (E) est d'ordre 2, etc.). Par unicité des coefficients d'une série entière, on obtient des équations vérifiées par les a_n, qu'on résout.
3. On vérifie que la série entière obtenue est effectivement de rayon de convergence non nul, de sorte que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit correctement définie (et de classe C^∞) sur un voisinage de 0. Alors, en invoquant l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy, on en déduit $f(x) = S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Pour le second point, on pourra éventuellement s'inspirer des explications détaillées de la section *Résolution d'équations différentielles.*

Table des matières