Méthodes – Séries entières
Le prolongement des identités

Vous avez déjà vu comment, en ayant une égalité de la forme $P(x) = Q(x)$ entre deux applications polynomiales, pour un nombre fini de x (tant que ce nombre dépasse le degré de $P - Q$), nous pouvons en déduire : $P = Q$. C'est un raisonnement extrêmement puissant puisqu'ensuite, une égalité entre polynômes peut être évaluée en TOUT nombre complexe, en TOUT endomorphisme, en TOUTE matrice, etc., alors qu'on avait originellement une égalité valable en une poignée de nombres seulement.

Seulement l'approche a ses limites puisque, en mathématiques, tout n'est pas forcément polynomial... Toutefois, beaucoup de fonctions usuelles sont des sommes de séries entières, et c'est intéressant parce qu'il a été démontré dans le cours un résultat analogue à celui mentionné ci-dessus pour les polynômes :

$$\text{si } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ pour tout } x \text{ dans un voisinage de } 0, \text{ alors : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n.$$

En particulier, si tous les coefficients a_n et b_n sont égaux, alors les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ sont égales, et donc leurs sommes aussi ; mais partout, pas seulement dans un voisinage de 0 ! En résumé :

Principe du prolongement analytique

Deux sommes de séries entière égales sur un voisinage de 0 sont égales PARTOUT !

En vérité, le « principe du prolongement analytique » ici formulé est une version édulcorée du vrai principe qui est archi-méga-encore-plus-puissant.

Ainsi, si une égalité entre deux fonctions développables en série entière est valable pour tout x dans un voisinage de 0, alors elle est valable tout le temps. C'est très utile lorsque nous sommes contraints de passer par la variable réelle (pour dériver, intégrer, etc.), alors que nous voulons ultimement évaluer une somme en un nombre complexe. Nous l'illustrons dans l'exemple suivant.

Exemple 1. Imaginons qu'on ait à calculer la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(n\theta)}{2^n}$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. Nous avons coutume de calculer de telles sommes en passant par la forme exponentielle : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(n\theta)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{in\theta}}{2^n}\right)$. De la sorte ici, grâce aux propriétés de l'exponentielle, nous reconnaissons la somme de série entière $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$ évaluée en $z = \frac{e^{i\theta}}{2}$. Or nous savons obtenir cette somme par dérivation de la somme géométrique ; on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{donc :} \quad \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

et donc : $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. Il suffirait alors de poser $x = \frac{e^{i\theta}}{2}$, et de prendre la partie réelle, pour en déduire la somme voulue. Problème : pour dériver la somme géométrique, nous avions besoin de nous restreindre à une variable réelle (car nous ne savons pas dériver selon une variable complexe en PSI), et il n'est donc pas possible de donner à x une valeur complexe...

C'est là que le principe du prolongement analytique, expliqué ci-dessus, vient à la rescousse : l'égalité ci-dessus peut se réécrire :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = 1, \tag{$*$}$$

et il s'agit d'une égalité entre deux sommes de séries entières (en effet un produit de fonctions développables en série entière est développable en série entière, et la fonction constante égale à 1 est aussi une somme de série entière), sur un voisinage de 0. Par le principe du prolongement analytique, elles sont égales partout sur leur disque ouvert (commun) de convergence : cela nous permet alors de l'évaluer en $\frac{e^{i\theta}}{2}$. C'est ce que nous formalisons ci-dessous, puisque deux choses sont très informelles dans les phrases précédentes :

— le fait que le membre de gauche soit une somme de série entière ;

— ce qu'est ce fameux disque ouvert commun de convergence.

Pour montrer que cette égalité reste valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, notons $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ le produit de Cauchy de la série entière $(1-z)^2 = 1 - 2z + z^2$ (qui est de rayon de convergence infini) par $\sum\limits_{n\geqslant 1} nz^{n-1}$ (qui est de rayon de convergence 1). Alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ est de rayon de convergence au moins 1, et si l'on note f sa somme alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a :

$$(1-z)^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = f(z). \qquad (\dagger)$$

En particulier, cette égalité doit être aussi vraie en remplaçant z par un réel $x \in]-1,1[$ (qui vérifie bien $|x| < 1$). En comparant ($\dagger$) avec ($*$), on a donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 1.$$

Ainsi f et $x \mapsto 1$ sont deux sommes de série entière qui coïncident sur un voisinage de 0 (en l'occurrence $]-1,1[$). Par unicité des coefficients, on a donc $c_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_n = 0$. Autrement dit, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = c_0 = 1$, et donc l'égalité ($\dagger$) montre que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a :

$$(1-z)^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = 1, \text{ et donc : } \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Mission accomplie : on a étendu à des nombres complexes une relation *a priori valable en des réels uniquement*. On peut la multiplier par z et poser $z = \frac{e^{i\theta}}{2}$ (qui vérifie bien $|z| < 1$) pour en déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{in\theta}}{2^n} = \frac{\frac{e^{i\theta}}{2}}{\left(1 - \frac{e^{i\theta}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{e^{i\theta}}{2}}{\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{2}\right|^4} \times \left(1 - \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^2,$$

et donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(n\theta)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{e^{i\theta}}{2}}{\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{2}\right|^4} \times \left(1 - \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^2\right)$.

Exercice 1. Terminer le calcul ci-dessus pour en déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(n\theta)}{2^n} = 2 \cdot \frac{5\cos(\theta) - 4}{(5 - 4\cos(\theta))^2}$.

Exercice 2. Redémontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$, sans utiliser de prolongement analytique, mais avec un produit de Cauchy adéquat.

Exercice 3. Utiliser le principe du prolongement analytique pour montrer que si l'on sait que $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que les fonctions cosinus et sinus sont développables en série entière sur $\mathbb{C}$, alors on en déduit que cette relation doit aussi être vraie pour tout $x \in \mathbb{C}$, *sans utiliser les formules d'Euler*.

Exercice 4. Montrer que l'application $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ N'est PAS développable en série entière en 0 (*raisonner par l'absurde, et utiliser le principe du prolongement analytique pour montrer qu'on aurait alors :* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = z$ *; conclure que c'est impossible*). De même avec $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ et $z \mapsto |z|^2$.

L'exercice suivant est un raffinement de ce principe du prolongement analytique, plus proche en esprit du « vrai » principe. On y montre notamment que 0 est nécessairement un zéro « isolé » d'une fonction développable en série entière.

Exercice 5. (principe des zéros isolés : version faible) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière dans un voisinage de 0 qu'on appelle I.

1. Montrer que f est identiquement nulle si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.
2. Montrer que si f est non identiquement nulle alors, en notant $n_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $a_{n_0} \neq 0$, et g l'application $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^{n-n_0}$:
   - pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = x^{n_0} g(x)$;
   - l'application g est développable en série entière sur I, et $g(0) \neq 0$;
   - il existe $r > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in]-r, r[\cap I$ (utiliser le point précédent).
3. Déduire de la question précédente que si f est une application développable en série entière en 0, qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, alors f est identiquement nulle (on pourrait remplacer $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ par toute suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ convergeant vers 0).