MÉTHODES – Séries entières
À quoi servent les produits de Cauchy ?

1 ✓ À justifier qu'une application est développable en série entière

En effet, le produit de Cauchy nous assure que le produit de deux sommes de séries entières reste une somme de série entière. C'est donc un moyen **théorique** de montrer qu'une application est développable en série entière, si elle est produit de fonctions développables en série entière en 0. De la sorte, les fonctions $x \mapsto e^x \ln(1+x)$, $x \mapsto (\arctan(x))^2$ et $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{1-x}$ sont toutes développables en série entière en 0.

Néanmoins, ce n'est pas un outil **pratique** pour développer en série entière. En effet, la somme $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est rarement calculable directement (c'est d'ailleurs souvent le contraire : on *utilise* les séries entières *pour* calculer de telles sommes). Si l'on a besoin d'expliciter le développement en série entière d'une fonction obtenue à l'aide d'un produit, on essaiera plutôt de la linéariser pour faire disparaître le produit (ce serait possible pour $x \mapsto \sin(x)e^x$ ou $x \mapsto (\cos(x))^2$ par exemple), ou d'utiliser l'une des méthodes du document *Développer en série entière*.

2 À expliciter des suites ou calculer des sommes

La stratégie est développée à la fin du document *Études de suites*.

3 Cas des relations de la forme $w_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$ ou $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$

Pour déterminer l'expression explicite d'une suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$, il est plus pertinent d'étudier $\sum_{n\geqslant 0} \frac{w_n}{n!} x^n$ plutôt que $\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$. Pour comprendre ce qui rend cette dernière série préférable, notons que l'identité $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ implique, après division par $n!$ dans la relation de récurrence ci-dessus :

$$\frac{w_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} \frac{v_{n-k}}{(n-k)!},$$

donc $\sum_{n\geqslant 0} \frac{w_n}{n!} x^n$ est le produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ par $\sum_{n\geqslant 0} \frac{v_n}{n!} x^n$, et si l'on parvient à démontrer que ces deux séries entières ont un rayon de convergence supérieur ou égal à $R > 0$, alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{n!} x^n.$$

Si l'on connaît u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors cette identité permet *a priori* de calculer la somme du membre de droite puis, *via* les principes de la section **??**, d'en déduire w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas d'une relation de la forme : $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$, on peut reprendre le raisonnement ci-dessus. Si l'on note S la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!} x^n$, alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n$ n'est rien d'autre que la dérivée de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} = S(x) - u_0$: c'est donc S'. Le produit de Cauchy ci-dessus donne alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n = S'(x).$$

Nous nous retrouvons avec une équation différentielle vérifiée par S : si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est explicite et la somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n$ calculable, alors on est en mesure d'expliciter S. Une fois S écrite à l'aide de fonctions usuelles, on développe en série entière l'expression obtenue et, par identification, on trouve une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Table des matières