Méthodes – Réduction des endomorphismes

✓ Calcul des puissances d'une matrice

Soit $A \in \mathrm{M}_p(K)$. On veut calculer A^n. Il y a deux approches : avec la division euclidienne par un polynôme annulateur, ou en passant par la réduction (diagonalisation ou triangulation). Évidemment, si la matrice n'est pas diagonalisable, et si aucun indice ne vous permet de la trianguler, alors il n'y a pas d'hésitation à avoir : on utilise la méthode de division euclidienne.

Si A est semblable à une matrice triangulaire, les calculs restent assez lourds (sauf réduction *jolie* en matrice diagonale par blocs : voir la section *Trigonalisation* pour voir comment obtenir une réduction *jolie*, et la section 2 pour voir comment elle permet de calculer les puissances), donc la méthode de division euclidienne peut être préférable. → page 2

Si A est semblable à une matrice diagonale, par contre, le calcul des puissances d'une matrice diagonale est assez rapide, et l'inversion d'une matrice d'ordre raisonnable aussi. Il est donc facile de calculer les puissances de A en la diagonalisant (et du point de vue théorique c'est éventuellement plus intéressant, si on veut étudier des propriétés fines de la suite $(A^n)_{n \geqslant 0}$).

Par contre, **même si A est diagonalisable, il reste un cas où la méthode de division euclidienne est préférable** : lorsqu'il y a très peu de valeurs propres, par rapport à l'ordre de la matrice.

En effet, d'après le critère polynomial de diagonalisation, si A est diagonalisable alors $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A. C'est un polynôme de degré égal au nombre de valeurs propres distinctes de A : si A n'en a que deux, par exemple, cela nous fournit un polynôme annulateur de degré 2 : c'est très pratique ! En effet, vous verrez dans la section suivante que le degré du polynôme annulateur conditionne le degré maximal des puissances de A qu'on doit calculer, en vue d'en déduire toutes les puissances de A supérieures.

1 La méthode de la division euclidienne par un polynôme annulateur

1. On trouve un polynôme $P \in K[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathrm{M}_p(K)}$. Notons $d = \deg(P)$.
   Si l'on ne connaît pas de polynôme annulateur simple, utiliser le polynôme caractéristique : il est annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Soit $n \geqslant 1$. D'après le *théorème de division euclidienne*, il existe $(Q, R) \in K[X]^2$ (unique) tel que :
   $$X^n = PQ + R, \text{ et } \deg(R) < \deg(P). \tag{$*$}$$
   On peut écrire R sous la forme : $R = \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$.
3. En évaluant $(*)$ en A, comme $P(A) = 0_{\mathrm{M}_p(K)}$, on obtient : $A^n = R(A) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i A^i$. Il reste donc à déterminer les a_i et à calculer les A^i pour tout $i \in [\![0, d-1]\!]$.
4. Détermination des a_i. En évaluant $(*)$ en des nombres convenables, on peut obtenir autant d'équations que d'inconnues, et les résoudre comme n'importe quel système linéaire. Pour cela :
   (a) On cherche les racines de P. Il s'écrit alors : $P = \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{d_i}$, où les x_i sont les racines de P et d_i leurs multiplicités. Notons qu'on a $\sum_{i=1}^{k} d_i = \deg(P) = d$.
   (b) Il a été vu en première année que x_i est une racine d'ordre *au moins* d_i si et seulement si : $P(x_i) = P'(x_i) = \cdots = P^{(d_i - 1)}(x_i) = 0$. Alors, si on dérive $d_i - 1$ fois $(*)$, et qu'on l'évalue en la racine x_i à chaque étape, on obtient d_i équations vérifiées par les a_i, de la forme :
   $$n(n-1)\cdots(n-j+1)x_i^{n-j} = R^{(j)}(x_i) = \sum_{i=j}^{d-1} a_i (i-j)\cdots(i-j+1) x_i^{i-j}, \quad j \in [\![0, d_i - 1]\!].$$
   (c) Si on fait ce procédé pour chaque racine de P, on obtient en tout $\sum_{i=1}^{k} d_i = d$ équations vérifiées par les a_i, qui sont au nombre de d inconnues. Il y en a donc suffisamment pour résoudre le système linéaire obtenu (qui est toujours inversible, on peut le démontrer). On en déduit les a_i.

5. Après calcul des A^i, pour $i \in [\![0, d-1]\!]$, toutes les données sont connues dans le membre de droite de l'égalité $A^n = R(A) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i A^i$. On en déduit A^n.

   C'est pour diminuer le nombre de puissances A^i pour $i < d$ à calculer, qu'on a intérêt à prendre un polynôme annulateur de degré d aussi petit que possible.

Calculer A^n avec une division euclidienne

1. On trouve un polynôme annulateur de A (noté P ici), et ses racines x_i.
2. On écrit l'existence de $(Q, R) \in K[X]^2$ tel que : $X^n = PQ + R$ $(*)$, avec $\deg(R) < \deg(P)$.
3. On évalue $(*)$ en A pour avoir $A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A)$. Il reste à déterminer les coefficients a_i de R.
4. On évalue $(*)$ en les x_i pour avoir $x_i^n = P(x_i)Q(x_i) + R(x_i) = R(x_i)$: système linéaire vérifié par les a_i, qu'on résout. S'il y a des racines multiples : dériver $(*)$ et réévaluer en ces racines.
5. Une fois les a_i déterminés, on peut calculer $R(A) = A^n$.

Deux choix possibles de polynôme annulateur : χ_A, ou $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(A)} (X - \lambda)$ (si A diagonalisable).

2 La méthode de réduction

1. On diagonalise A si possible, en déterminant $P \in \mathrm{GL}_p(K)$ et des λ_i tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_p \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   Alors, connaissant P, on calcule P^{-1}, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_p^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

2. Si A n'est pas diagonalisable, on peut tout de même la trigonaliser (quitte à être dans $\mathbb{C}$).
   (a) Si la trigonalisation de A est de la forme diagonale par blocs suivante :

$$A = P \begin{pmatrix} T_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & T_k \end{pmatrix} P^{-1},$$

   où, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, T_i est de la forme $T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_i \end{pmatrix}$ (coefficients diagonaux tous égaux), alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P \begin{pmatrix} T_1^n & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & T_k^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

   et on calcule les T_i^n en les mettant sous la forme : $T_i = \lambda_i \mathrm{I} + N_i$ où N_i est nilpotente et commute (forcément) avec $\lambda_i \mathrm{I}$. On peut en effet, dans ce cas, utiliser la formule du binôme de Newton pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_i^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} N_i^j.$$

On en déduit les puissances de T_i, et par suite les puissances de A.

Les exemples de la section *Trigonalisation* montrent comment obtenir une telle trigonalisation diagonale par blocs, dans le cas des matrices carrées d'ordre 2 ou 3.

(b) Si on ne connaît pas A sous une telle forme par blocs, nous n'avons pas le choix : il faut procéder par division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur, comme ce fut traité précédemment.

2.1 Avec des polynômes interpolateurs de Lagrange

Voir la section *Application des polynômes de Lagrange en algèbre linéaire*. L'intérêt des polynômes interpolateurs, dans ce contexte, est d'une part de nous dispenser du calcul d'une matrice de passage, d'autre part de se généraliser aux puissances négatives d'une matrice (et même non entières).

Table des matières