MÉTHODES (PSI) – Réduction des endomorphismes

✓ Trigonalisation d'une matrice explicite A

Vous n'avez pas de méthode systématique à connaître : la trigonalisation d'une matrice, toujours en dimension 2 ou 3, doit être guidée. Néanmoins, cette section n'est pas sans intérêt : nous allons voir que les exercices de triangulation ont presque toujours la même structure. Il est bon d'avoir un peu de recul dessus.

Parlons rapidement de la trigonalisation en dimension 2 : c'est élémentaire. Notons que si A est une matrice d'ordre 2 triangulable mais non diagonalisable, alors elle admet une unique valeur propre, d'ordre de multiplicité 2 (pourquoi ? la réponse est dans le cours !). Pour la trianguler, il suffit d'en déterminer un vecteur propre, et de prendre n'importe quel vecteur qui ne lui est pas proportionnel pour qu'ils forment une base de triangulation.

En effet, notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique, $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ la base de triangulation (X_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre double λ, et X_2 est n'importe quel vecteur qui ne lui est pas proportionnel), et f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. Par définition d'un vecteur propre, on a $f_A(X_1) = \lambda X_1$; alors, peu importe ce que vaut $f_A(X_2)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$: elle est bien triangulaire supérieure.

Exemple 1. Triangulons $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a immédiatement : $\chi_B = (X-1)^2$; donc 1 est l'unique valeur propre de B. Le polynôme caractéristique est scindé, donc B est triangulable (mais n'est pas diagonalisable : pourquoi ? vous DEVEZ savoir le justifier, même hors d'un contexte de triangulation !). Pour la trianguler, suivons la démarche ci-dessus :

1. La résolution de $BX = X$ montre que $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B associé à 1.
2. On prend un vecteur X_2 qui lui est indépendant, par exemple $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ est une base de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
3. Soit f_B l'endomorphisme canoniquement associé à B. Puisque X_1 est un vecteur propre de B associé à 1, on a $f_B(X_1) = X_1$ (INUTILE de calculer BX_1, vous savez que ce vecteur égale X_1 puisque X_1 est solution de $BX = X$! réfléchissez à ce que vous faites !). De plus : $f_B(X_2) = BX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1 + X_2$.

   On a donc : $T = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique. D'après la formule du changement de base :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(f_B) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_B) \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0),$$

   donc : $B = PTP^{-1}$, où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a triangulé B.

Mise en garde 1. Comme vous le voyez dans cet exemple, la deuxième colonne de la matrice T ne contient pas $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (le vecteur colonne $f(X_2)$), mais ses COORDONNÉES dans la NOUVELLE BASE $\mathcal{B}$.

OUBLIEZ LA BASE CANONIQUE ! ELLE NE VOUS SERT À RIEN POUR OBTENIR LA MATRICE D'UN ENDOMORPHISME DANS UNE AUTRE BASE !

Passons à la dimension 3, celle avec laquelle on vous embêtera en pratique. Si A n'est pas diagonalisable mais triangulable, alors il y a deux possibilités :

— elle admet une valeur propre simple et une valeur propre double ;

— elle admet une unique valeur propre triple.

Pourquoi n'y a-t-il pas d'autre cas ? Nous donnons ci-dessous la structure des exercices de triangulation dans le premier cas. Le second cas y ressemble beaucoup.

1 Cas d'une valeur propre double

Dans ce cas, si A n'est pas diagonalisable mais triangulable, alors le sous-espace propre associé à sa valeur propre double est de dimension 1 (pourquoi ?). En vérité, dans ce cas particulier, on pourrait trianguler A aussi facilement que dans le cas d'une matrice d'ordre 2 (les deux sous-espaces propres fournissent déjà deux vecteurs linéairement indépendants ; n'importe quelle façon d'adjoindre un vecteur linéairement indépendant donne alors une base de triangulation), mais on a souvent besoin d'une matrice triangulaire *jolie* (comprendre : diagonale par blocs) pour faciliter les calculs. D'où des indications pour « bien » compléter une famille de vecteurs propres en une base de *jolie* triangulation.

Exercice type 1. Soit $A \in \mathrm{M}_3(K)$. On note λ sa valeur propre simple et μ sa valeur propre double.

1. Déterminer un vecteur propre X_λ associé à λ, et un vecteur propre X_μ associé à μ.
2. Résoudre l'équation $AX - \mu X = X_\mu$ d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(K)$. On note X_3 **une** solution.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (X_\lambda, X_\mu, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(K)$.
4. On note P la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$. Montrer qu'il existe $T \in \mathrm{M}_3(K)$ triangulaire supérieure telle que : $A = PTP^{-1}$.

Notez que dans la deuxième question, vous choisissez pour X_3 une solution, n'importe laquelle, bien que l'équation $AX - \mu X = X_\mu$ ait une infinité de solutions, dépendant d'une variable auxiliaire. Tant qu'à faire, choisissez une solution simple, avec plusieurs zéros en coordonnées, afin de simplifier l'inversion de la matrice de passage (si nécessaire) !

Exemple 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Nous vous laissons vérifier que $\chi_A = (X-1)(X+1)^2$, de sorte que 1 soit valeur propre simple et -1 valeur propre double.

1. On vérifie que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre $\ker(A - \mathrm{I}_3)$ et que $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre $\ker(A + \mathrm{I}_3)$.
2. On résout l'équation $AX + X = X_2$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Un tel vecteur colonne est solution si et seulement si : $\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ b+c & = & -1 \end{array} \right.$, si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
$$X = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \\ -1-\alpha \end{pmatrix}.$$
Prenons $\alpha = 0$ (et donc $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$).
3. La famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

4. Soit f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. Écrivons sa matrice dans la base $\mathcal{B}$: on a $f_A(X_1) = X_1$ (parce que X_1 est un vecteur propre de A associé à 1), $f_A(X_2) = -X_2$ (raison analogue) et $f_A(X_3) = AX_3 = X_2 - X_3$ (d'après la question précédente, X_3 étant solution de $AX + X = X_2$). Par conséquent, la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique. D'après la formule du changement de base :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0).$$
   C'est-à-dire : $A = PTP^{-1}$, où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a triangulé A.

Mise en garde 2. Encore une fois, pour obtenir la matrice de f_A dans la nouvelle base, notez que je n'ai fait AUCUN calcul explicite. En particulier, je n'ai pas du tout besoin de savoir à quoi égale $f_A(X_3)$. Après tout, pour obtenir la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$, il m'est seulement nécessaire de savoir exprimer $f_A(X_1)$, $f_A(X_2)$ et $f_A(X_3)$ en fonction de X_1, X_2 et X_3 ; or le fait que X_1 et X_2 soient vecteurs propres, et que X_3 soit solution de l'équation $AX + X = X_2$, donne DÉJÀ les expressions désirées.

VOYEZ ENCORE UNE FOIS QUE LA BASE CANONIQUE NE SERT À RIEN ICI ! UTILISEZ CE QUE VOUS SAVEZ DU VECTEUR X_3 : QU'IL EST SOLUTION D'UNE ÉQUATION !

2 Cas d'une valeur propre triple

Selon que le sous-espace propre associé à cette valeur propre triple λ soit de dimension 1 ou 2, l'exercice varie très légèrement. Mais en tous les cas, on complète une famille libre de vecteurs propres associés à λ *via* la résolution d'équations de la forme $AX - \lambda X = X_i$, autant de fois qu'il le faut pour avoir une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Exemple 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Nous vous laissons vérifier que $\chi_A = (X-1)^3$, et que le sous-espace propre de A associé à 1 est de dimension 1, engendré par $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. On résout l'équation $AX - X = X_1$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Un tel vecteur colonne est solution si et seulement si : $\left\{ \begin{array}{rcl} -a-b-c & = & -1 \\ a+c & = & 0 \end{array} \right.$, si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$. Prenons $\alpha = 0$ (et donc : $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).
2. On résout l'équation $AX - X = X_2$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On trouve : $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. La famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car : $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

4. Soit f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. Écrivons sa matrice dans la base $\mathcal{B}$: on a $f_A(X_1) = X_1$ (parce que X_1 est un vecteur propre de A associé à 1), $f_A(X_2) = AX_2 = X_1 + X_2$ (X_2 étant solution de $AX - X = X_1$) et $f_A(X_3) = AX_3 = X_2 + X_3$ (X_3 étant solution de $AX - X = X_2$).
   Par conséquent, la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique. D'après la formule du changement de base :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0).$$
   C'est-à-dire : $A = PTP^{-1}$, où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a triangulé A.

Mise en garde 3. Cet exemple le montre encore : inutile de calculer $f_A(X_1)$, $f_A(X_2)$ et $f_A(X_3)$ explicitement : les questions préliminaires permettent de les exprimer entièrement en fonction de X_1, X_2 et X_3, sans jamais utiliser leurs coordonnées dans la base canonique. Au risque de me répéter :

Pour écrire la matrice de f dans une base quelconque $(X_i)_i$, ne mettez pas en colonne les coordonnées de $f(X_i)$ dans la base canonique !

Table des matières