Méthodes (PSI) – Réduction des endomorphismes

☢ Réduction à l'aide d'un polynôme annulateur : cas subtils

Nous parlons ici de l'étude des endomorphismes qui vérifient une relation polynomiale de la forme :

$$f^3 = -f, \quad f^3 + 2f^2 = 0_{\mathrm{L}(E)}, \quad f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E,$$

c'est-à-dire qui admettent un polynôme annulateur explicite, **mais dans le cas particulier où ce polynôme annulateur n'est pas scindé, ou bien est scindé mais pas à racines simples** (de sorte qu'on ne peut pas conclure qu'ils sont diagonalisables avec le critère polynomial de diagonalisation). Dans les exemples ci-dessus, les polynômes annulateurs sont respectivement $X^3 + X = X(X^2 + 1)$, $X^3 + 2X^2 = X^2(X + 2)$ et $X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)(X + 1)$, qui ne sont pas scindés à racines simples.

Mais on peut malgré tout les réduire (il y a derrière cela une stratégie générale, mais qui n'est pas du tout au programme : on sait réduire un endomorphisme dès qu'on connaît les facteurs irréductibles de son polynôme annulateur unitaire de degré minimal). La démarche est alors indiquée, et il y a généralement les étapes suivantes :

1. Montrer une décomposition en somme directe de sous-espaces stables, de la forme :
$$E = \ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f)), \text{ où } P \text{ et } Q \text{ sont des polynômes, ou : } E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f).$$
2. Expliciter des bases simples de chaque composante de la somme directe. En général, elles sont de la forme $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots)$ (si les polynômes de la somme directe sont irréductibles).
3. En déduire la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition. Elle est diagonale par blocs puisque c'est dans une base adaptée à des sous-espaces stables, et si les choses sont bien faites alors les blocs sont de « petites » matrices compagnons.

Nous expliquons comment procéder à chaque étape, dans les sections ci-dessous.

1 Décomposer en somme directe de sous-espaces stables

Par souci de clarté, nous supposons dans cette section que f admet pour polynôme annulateur P un polynôme de degré 3 ayant une unique racine simple (c'est-à-dire : $P = (X - \alpha) \cdot Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$). Néanmoins l'approche se généralise même sans cette restriction.

Si f est annulé par $P = (X - \alpha) \cdot Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ (**en général P ne sera pas présenté sous forme factorisée, pour brouiller les pistes**), alors on vous demandera de démontrer :

$$E = \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(Q(f)).$$

Derrière ce résultat se cache un résultat très important d'algèbre linéaire, mais qui n'est plus au programme (le lemme des noyaux).

Pour démontrer qu'on a cette décomposition en somme directe, en général vous ne pourrez pas recourir à la théorie de la dimension, parce que vous n'aurez pas la moindre information sur la dimension des noyaux. Vous savez donc que dans ce cas, il n'y a pas d'autre choix que de revenir à la définition d'une décomposition en somme directe, à savoir : vous devez démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \times \ker(Q(f))$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Et vous procédez par une analyse et synthèse ; l'analyse donne l'unicité (*si* des vecteurs $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors il n'y a qu'une seule possibilité), tandis que la synthèse donne l'existence (les vecteurs $\vec{y}$ et $\vec{z}$ proposés dans l'analyse conviennent effectivement).

Pour ce faire :

1. **Analyse.** Vous supposez l'existence d'un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \times \ker(Q(f))$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
   (a) Vous appliquez f à l'égalité autant de fois que le degré de Q (donc deux fois dans ce qu'on a supposé sur P). En utilisant le fait que $\vec{z} \in \ker(Q(f))$, vous pourrez exprimer $f^2(\vec{z})$ en fonction de $f(\vec{z})$ et $\vec{z}$, et en déduirez des relations de la forme :
$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) = \alpha \vec{y} + f(\vec{z}) & (\text{car } \vec{y} \in \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)) \\ f^2(\vec{x}) = \alpha^2 \vec{y} + (\clubsuit \vec{z} + \spadesuit f(\vec{z})) \end{cases}$$

(b) Nous avons trois équations linéaires, pour trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$ et $f(\vec{z})$, même si cette dernière dépend de $\vec{z}$ et ne nous intéresse pas de toute façon). Des opérations convenables sur les lignes permettent alors d'exprimer $\vec{z}$ explicitement en fonction de $\vec{x}$ (et de ses images par f). Une fois $\vec{z}$ obtenu, on en déduit $\vec{y}$ grâce à la relation $\vec{y} = \vec{x} - \vec{z}$.

À ce stade, vous n'avez pas encore besoin de l'hypothèse que $P = (X - \alpha) \cdot Q$ annule f.

2. **Synthèse.** On pose $\vec{y}$ et $\vec{z}$ égaux aux quantités trouvées dans l'analyse. On vérifie qu'on a effectivement $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (ce qui est trivial), que $f(\vec{y}) = \alpha\vec{y}$ (pour en déduire $\vec{y} \in \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$), et que $Q(f)(\vec{z}) = \vec{0}$. Pour ces vérifications, vous commencez par exprimer $\vec{y}$ et $\vec{z}$ en fonction de $\vec{x}$, **puis vous aurez besoin du fait que** $P(f)(\vec{x}) = \vec{0}$. Le polynôme P apparaîtra nécessairement en voulant développer et simplifier $f(\vec{y})$ ou $Q(f)(\vec{z})$. Ainsi on aura bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \times \ker(Q(f))$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, et ce couple est uniquement défini d'après l'analyse. On a donc : $E = \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(Q(f))$.

Si vous procédez ainsi, nul besoin de démontrer que $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \cap \ker(Q(f)) = \{\vec{0}\}$: la somme directe équivaut en effet à l'unicité de la décomposition en somme directe, et elle découle de l'analyse effectuée ci-dessus.

Exemple 1. Nous allons nous intéresser à un endomorphisme f vérifiant : $f^3 = -f$, et montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Vous pouvez noter que $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de f, de la forme annoncée. On est donc bien dans le cadre décrit ci-dessus.

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. Supposons l'existence de $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Par hypothèse on a $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, en appliquant f à cette égalité deux fois, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z}, \\ f(\vec{x}) & = & & & f(\vec{z}), \\ f^2(\vec{x}) & = & & & -\vec{z}. \end{array}\right. \qquad (1.(a))$$

On en déduit que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors $\vec{z} = -f^2(\vec{x})$ et $\vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \vec{x} + f^2(\vec{x})$ (1.(b)).

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \vec{x} + f^2(\vec{x})$, et $\vec{z} = -f^2(\vec{x})$. On a immédiatement $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x} + f^2(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = \vec{x}$. Il reste donc à montrer que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f(\vec{y}) = f(\vec{x} + f^2(\vec{x})) = f(\vec{x}) + f^3(\vec{x}) = \vec{0} \text{ car } f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(E)},$$

donc $\vec{y} \in \ker(f)$, et :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(-f^2(\vec{x})) = -f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = -f(f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})) = -f(\vec{0}) = \vec{0},$$

donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \times \ker(Q(f))$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, et ce couple est uniquement défini d'après l'analyse. On a donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

1. On suppose : $f^3 + 2f^2 = 0_{\mathrm{L}(E)}$. Montrer : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2)$.
2. On suppose : $f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E$. Montrer : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

S'il s'agit seulement de démontrer que la somme est directe (et non qu'elle donne E), c'est plus... direct :

Exercice 2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}[X]$, et $\vec{x} \in \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \cap \ker(Q(f))$.

1. Montrer : $Q(f)(\vec{x}) = Q(\alpha)\vec{x}$ (*classique : c'est du cours*).
2. On suppose que $Q(\alpha) \neq 0$. Montrer que $\vec{x} = \vec{0}$.

Voyez qu'il n'est même pas nécessaire d'utiliser que $P = (X - \alpha) \cdot Q$ est un polynôme annulateur de f, si l'on se contente de la somme directe.

1.1 Approche plus directe et méthodique

Il est possible d'expliciter très facilement la décomposition en somme directe $E = \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(Q(f))$ grâce à l'algorithme de division euclidienne. Cet exercice vous permettra de comprendre comment.

Exercice 3. On suppose que $P = (X - \alpha)Q$ est un polynôme annulateur de f, et que $Q(\alpha) \neq 0$. Soit $\vec{x} \in E$.

1. Montrer que $Q(f)(\vec{x}) \in \ker(f - \alpha\mathrm{Id}_E)$ et $f(\vec{x}) - \alpha\vec{x} \in \ker(Q(f))$.
2. Justifier l'existence de $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $Q = (X - \alpha)R + Q(\alpha)$.
3. Utiliser la question précédente pour écrire $\vec{x}$ en fonction de $Q(f)(\vec{x})$ et d'un vecteur dans $\ker(Q(f))$. Conclure.

L'avantage est que la méthode est systématique : elle marche toujours, ne nécessite pas d'avoir de flair pour expliciter les vecteurs de la décomposition (vu que la division euclidienne découle d'un *algorithme*), et se généralise à des polynômes annulateurs plus compliqués. Par contre, elle a le défaut de ne pas prouver que la décomposition est unique : il reste donc à démontrer que la somme est directe, par exemple en démontrant que $\ker(f - \alpha\mathrm{Id}_E) \cap \ker(Q(f)) = \{\vec{0}\}$.

1.2 Cas particulier fréquent : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$

Ce cas particulier ne se produit que si f est annulé par un polynôme ayant 0 pour racine (c'est-à-dire : multiple de X). Plus concrètement, cela signifie que f vérifie une relation de la forme :

$$a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f = 0_{\mathrm{L}(E)}, \tag{$*$}$$

avec $a_1 \neq 0$ pour simplifier la discussion. Notez bien l'absence de l'endomorphisme identité.

Pour montrer la décomposition en somme directe $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, notons que cette fois nous avons une donnée sur les dimensions grâce au théorème du rang : nous savons que nous avons toujours $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, indépendamment des hypothèses sur f. Il suffit donc de démontrer que la somme est directe (ce que je dis est faux si l'on est en dimension non supposée finie, auquel cas on ne peut pas utiliser le théorème du rang et on n'a pas d'autre choix que d'imiter la démarche ci-dessus). Vous le faites en suivant l'indication de l'exercice ci-dessous :

Exercice 4. Soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. Notons $\vec{x} \in E$ un antécédent de $\vec{y}$ par f, c'est-à-dire tel que : $\vec{y} = f(\vec{x})$.

1. Appliquer $(*)$ à $\vec{x}$, et en déduire une expression de la forme $\vec{y} = -\sum\limits_i a_i f^i(\vec{y})$, où les valeurs prises par l'indice de sommation i sont à préciser.
2. En déduire que $\vec{y} = \vec{0}$, et conclure.

Si l'on n'est pas en dimension finie, et que nous devons explicitement construire, pour tout $\vec{x} \in E$, des vecteurs $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, alors on peut procéder par analyse et synthèse comme ci-dessus, mais il s'avère qu'on peut directement expliciter $\vec{y}$ et $\vec{z}$ à l'aide de la relation $(*)$, un peu modifiée :

$$\Big(a_n f^{n-1} + a_{n-1} f^{n-2} + \cdots + a_2 f + a_1 \mathrm{Id}_E\Big) \circ f = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

Si l'on appelle : $Q = \sum\limits_{k=2}^{n-1} a_k f^{k-2}$, alors cette relation s'écrit plus succinctement :

$$(Q(f) \circ f + a_1 \mathrm{Id}_E) \circ f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$\dagger$}$$

Comme nous avons là des polynômes en f, on pourrait bien sûr écrire toutes les compositions dans l'ordre inverse (par commutation). Voyons comment en déduire l'explicitation voulue :

Exercice 5. On rappelle qu'on suppose $a_1 \neq 0$. Soit $\vec{x} \in E$. On pose $U = Q \cdot X + a_1$.

1. Montrer que $U(f)(\vec{x})$ appartient à $\ker(f)$, et que $f(\vec{x})$ appartient à $\ker(U(f))$.
2. Écrire $\vec{x}$ en fonction de $U(f)(\vec{x})$ et $f(\vec{x})$, et en déduire le résultat voulu.

Enfin, nous laissons en agrément un exercice montrant qu'en fait, la somme directe $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$ n'est qu'une réécriture de la somme directe du cas plus général abordé dans cette section.

Exercice 6. Montrer qu'on a : $\mathrm{im}(f) = \ker(U(f))$.

2 Réduire un endomorphisme grâce aux polynômes annulateurs

On reprend un endomorphisme f annulé par un polynôme de la forme $P = (X - \alpha) \cdot Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. D'après la section précédente, on a : $E = \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(Q(f))$. Il s'agit à présent d'utiliser cette décomposition pour en déduire la matrice de f dans une base adaptée : on produit une base de E en concaténant une base de $\ker(Q(f))$ et une base de $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$.

Notez que c'est un sous-espace propre si $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$: généralement, une hypothèse sur f est faite pour se retrouver dans ce cas de figure ; soit une hypothèse d'inversibilité, soit une hypothèse du type $f \neq \alpha \mathrm{Id}_E$. Nous y reviendrons.

Les indications sont alors, peu ou prou, les suivantes :

(1) On montre que $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$ (c'est-à-dire : α est valeur propre de f).

(2) On explicite une famille libre de $\ker(Q(f))$, de la forme $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^\ell(\vec{x}))$ avec $\vec{x} \in \ker(Q(f))$. **Cette étape peut être différente si Q n'est pas irréductible, mais nous n'en parlerons pas).**

(3) La première étape permet d'en déduire que $\dim(\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$. La seconde permet de minorer la dimension de $\ker(Q(f))$ (puisque la dimension majore le cardinal de toute famille libre). Si les choses sont bien menées, combiner ces deux inégalités à $\dim(E) = \dim(\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(Q(f)))$ (vraie du fait de la décomposition en somme directe) permet d'en déduire la dimension exacte de $\ker(Q(f))$, et que $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^\ell(\vec{x}))$ est en vérité une **base** de $\ker(Q(f))$.

(4) Il reste à concaténer une base de $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$ (qui est une famille de vecteurs propres de f associés à α) avec la base $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^\ell(\vec{x}))$ de $\ker(Q(f))$, pour avoir une base de E. Puis on écrit la matrice de f dans cette base adaptée pour conclure.

Le nombre de vecteurs de la famille $(f^k(\vec{x}))_k = (\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots)$ dépend du degré de Q et de son irréductibilité ; on vous l'indique de toute façon.

La troisième étape ne nécessite pas d'explications excessives. L'exemple ci-dessous suffira pour comprendre comment obtenir la dimension exacte de $\ker(Q(f))$. Pour les autres étapes :

(1) Pour montrer que α est une valeur propre de f, vous aurez souvent besoin :
   - ($*$) de montrer que c'est l'unique valeur propre *possible* ; là, on a besoin d'utiliser le fait que les valeurs propres de f soient parmi les racines de ses polynômes annulateurs : comme le polynôme annulateur P est rarement fourni par l'énoncé sous une forme factorisée, vous aurez probablement besoin de calculer $P(\alpha)$ pour vérifier que c'est une racine, puis de faire la division euclidienne par $X - \alpha$ pour trouver le facteur Q (et montrer que Q n'a pas d'autre racine réelle) ;
   - (†) de montrer que α en est effectivement une ; pour y parvenir, cela dépend des hypothèses de l'énoncé : soit on raisonne par l'absurde en supposant que $f - \alpha \mathrm{Id}_E$ est inversible (ou hypothèse analogue, qui contredit le fait que α soit valeur propre), et multiplier $P(f) = 0_{\mathrm{L}(E)}$ par $(f - \alpha \mathrm{Id}_E)^{-1}$ contredit une autre hypothèse (pour cette étape, il vaut mieux factoriser P pour reconnaître $P(f) = (f - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ Q(f))$; soit vous utilisez la dimension de E pour en déduire que le degré de χ_f est impair, et donc montrer l'existence d'une racine réelle de χ_f grâce à ses limites en $\pm\infty$ et au théorème des valeurs intermédiaires ; par unicité de la valeur propre démontrée en ($*$), on en déduit que ce doit être α ; il peut y avoir d'autres pistes.

(2) Pour montrer que la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^\ell(\vec{x}))$ est libre, vous écrivez une relation de dépendance linéaire :

$$a_0 \vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + \cdots + a_\ell f^\ell(\vec{x}) = \vec{0},$$

et vous appliquez f à cette égalité autant de fois qu'il y a d'inconnues a_i (voir les conseils de la section 1 de *Méthodes*, chapitre d'algèbre linéaire), en vous souvenant de l'hypothèse $Q(f)(\vec{x}) = \vec{0}$ (vraie car $\vec{x} \in \ker(Q(f))$) pour simplifier les puissances de f qui excéderaient f^ℓ. Vous aurez alors un système linéaire avec autant d'équations que d'inconnues, et que vous pourrez résoudre avec la méthode du pivot de Gauß.

(4) Lorsqu'on écrit la matrice de f dans cette base, on note que la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$ est $\alpha \mathrm{I}$ (vu qu'il s'agit d'un sous-espace propre), tandis que la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\ker(Q(f))$ débute par une « sous-diagonale » de 1. Cela provient du fait que sa matrice s'obtient en calculant l'image par f des vecteurs de $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \ldots, f^\ell(\vec{x}))$, sachant que $f\left(f^k(\vec{x})\right) = f^{k+1}(\vec{x})$ (le vecteur suivant de la famille). Pour exprimer la dernière image (à savoir $f^{\ell+1}(\vec{x})$) en fonction des autres vecteurs $f^k(\vec{x})$, vous aurez éventuellement besoin d'isoler $f^{\ell+1}(\vec{x})$ dans l'égalité $Q(f)(\vec{x}) = \vec{0}$ (vraie car $\vec{x} \in \ker(Q(f))$).

Exemple 2. On reprend l'endomorphisme de l'exemple 1, qui vérifie : $f^3 = -f$. On rappelle qu'il fut démontré dans cet exemple qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. En trouvant une *jolie* base adaptée à cette décomposition, nous pourrons réduire f. Pour cela nous supposons de plus, ici, que E **est un espace vectoriel réel de dimension** 3, et que f est un endomorphisme non nul. ← page 2

Tout d'abord, notons que 0 est valeur propre de f (autrement dit : f n'est pas injective). Raisonnons par l'absurde en supposant que ce n'est pas le cas. Alors f est bijective, donc inversible, et en multipliant l'égalité $f^3 = -f$ par f^{-1} on a : $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ (†). Mais c'est impossible : cette égalité impliquerait $\det(f^2) = \det(-\mathrm{Id}_E) = (-1)^3 = -1$ (ici intervient l'hypothèse $\dim(E) = 3$), alors que $\det(f^2) = \det(f)^2 \geqslant 0$ car $\det(f) \in \mathbb{R}$ (ici intervient l'hypothèse que E est un espace vectoriel *réel*). Contradiction. Par l'absurde, on a démontré que 0 est valeur propre de f (et $\ker(f) \neq \{\vec{0}\}$) (1).

À présent, produisons une *jolie* base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: montrons que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{0\}$, alors $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ (2). Tout d'abord, comme f laisse stable ce noyau, la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, dont nous allons à présent justifier la liberté : dans le cas contraire, $\vec{x}$ serait un vecteur propre de f, associé à 2 puisque c'est l'unique racine réelle du polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + X - 2 = (X-2)(X^2+1)$. Mais dans ce cas on aurait : $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$: c'est absurde puisque $\vec{x} \neq \vec{0}$. D'où la liberté de la famille (2).

On peut en déduire la dimension de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis que $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est en fait une **base** de ce noyau. En effet, on a vu que 0 est valeur propre de f, donc $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (3), du fait que $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ par hypothèse, on a aussi $\ker(f) \neq E$ et donc $\dim(\ker(f)) < \dim(E)$. De cela on déduit :

$$\dim\left(\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \overset{[\oplus]}{=} \dim(E) - \dim(\ker(f)) > 0.$$

Ainsi il existe bien des vecteurs non nuls dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: soit $\vec{x}$ l'un d'entre eux. D'après ce qui précède, $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ de cardinal 2, et comme la dimension excède le cardinal des familles libres on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. En combinant tout ce que l'on sait, on a :

$$3 = 1 + 2 \leqslant \dim(\ker(f)) + \dim\left(\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) = \dim(E) = 3,$$

ce qui n'est possible que si l'on a les égalités :

$$\dim(\ker(f)) = 1, \text{ et : } \dim\left(\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) = 2. \quad (3)$$

En particulier, $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ de cardinal égal à la dimension de l'espace, donc c'en est une **base** (3).

Soit $\vec{y}$ un vecteur qui engendre $\ker(f)$ (il en existe un vu que $\ker(f)$ est de dimension 1). Du fait que $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, concaténer une base de ces deux noyaux donne une base de E. Par conséquent, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{y}, \vec{x}, f(\vec{x}))$ est une base de E (4). Écrivons la matrice de f dans cette base : on a $f(\vec{e}_1) = f(\vec{y}) = \vec{0}$ car $\vec{y} \in \ker(f)$, $f(\vec{e}_2) = f(\vec{x}) = \vec{e}_3$, et enfin $f(\vec{e}_3) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

On a réduit f.

Exercice 7. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. On suppose : $f^3+2f^2 = 0_{\mathrm{L}(E)}$, et : $f^2 \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. On rappelle que d'après l'exercice 1, on a la décomposition en somme directe : $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2)$. ← page 2

1. Montrer que -2 est valeur propre de f.
2. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2) \setminus \ker(f)$, alors $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker(f^2)$.
3. On suppose de plus que $\ker(f) \neq \ker(f^2)$. Montrer que la matrice de f dans une base convenable est de la forme :
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. On suppose : $f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E$. On rappelle que d'après l'exercice 1, on a la décomposition en somme directe : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. ← page 2

1. Montrer que -1 est valeur propre de f (*s'inspirer de l'exemple ci-dessus peut fonctionner*).
2. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, alors $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
3. On suppose de plus que $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Montrer que la matrice de f dans une base convenable est de la forme :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Table des matières