# Méthodes (PSI) – Réduction des endomorphismes

**✓ Diagonalisation d'une matrice explicite $A$**

Voici la démarche générique pour la diagonalisation d'une matrice explicite $A$, si possible d'ordre raisonnable.

1. On détermine ses valeurs propres (l'ensemble des valeurs propres de $A$ est noté $\mathrm{Sp}(A)$).
2. On détermine ses sous-espaces propres (qui sont, par définition, $\ker(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ où $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$).
3. On concatène les bases de ces sous-espaces propres, et si le cardinal est suffisant alors cela donne une base de vecteurs propres qui permet de diagonaliser la matrice.

Détaillons les deux premières étapes dans les sections suivantes.

## 1 Détermination des valeurs propres

Un moyen privilégié de détermination des valeurs propres d'une matrice $A$ *est le calcul du polynôme caractéristique* $\chi_A$. Mais cela doit être fait intelligemment, sinon ce n'est pas profitable.

Notons que $\chi_A$ est nécessairement unitaire et de degré égal à l'ordre de la matrice : *c'est un moyen éventuel de détecter des erreurs de calcul.*

### 1.1 Comment calculer efficacement $\chi_A$

Rappelons que ce qui nous intéresse n'est pas tant que cela l'expression explicite de $\chi_A$ sous la forme : $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots$, mais **ses racines**, puisqu'elles sont les valeurs propres de $A$ que l'on cherche à déterminer. Or, si un polynôme $P$ s'écrit sous forme factorisée ainsi : $P = (X - a)Q$, où $a \in K$ et $Q$ est un polynôme, alors il se voit immédiatement que $a$ est une racine de $P$.

Un calcul *efficace* de $\chi_A$ est donc un calcul écrivant $\chi_A$ sous la forme factorisée :

$$\chi_A = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots ,$$

avec autant de facteurs de degré 1 que possible. Pour y parvenir :

1. **Lors du calcul de** $\det(\lambda \mathrm{I}_n - A)$**, on effectue des opérations sur les colonnes ou lignes (les deux éventuellement) de sorte à avoir autant de** $0$ **que possible dans une colonne ou ligne, et on développe par rapport à la colonne ou ligne en question.**
2. Après CHAQUE opération ou développement, **on regarde s'il est possible de trouver un facteur commun dans chaque coefficient d'une colonne, ou d'une ligne** ; si oui, on le met en facteur du déterminant, en vertu de sa multilinéarité ;
3. On revient au point 1, jusqu'au terme du calcul.

Avec du flair, on peut obtenir des factorisations autrement qu'en suivant la recommandation de l'étape 1. Il faut prendre quelques instants pour observer si des opérations simples sur les lignes ou colonnes ne permettraient pas de factoriser chaque coefficient d'une ligne ou colonne par $X - \alpha$ pour un certain $\alpha$.

Lorsque la matrice est d'ordre 3, trouver un seul facteur de $\chi_A$ suffit moralement à déterminer toutes les racines, puisque parmi les deux facteurs, l'un est de degré 2 et l'autre de degré 1. Dans les deux cas, on sait trouver les racines.

Quand nous n'avons pas d'idée d'opérations efficaces pour obtenir tous ces zéros, **on utilise la méthode du pivot de Gauß**. En faisant attention toutefois à ne pas utiliser pour pivot un coefficient qui dépendrait de $\lambda$. On peut commencer par permuter $L_1$ et $L_i$ pour simplifier l'emploi de la méthode du pivot.

**Une exception à cette exigence de factorisation :** lorsqu'on conjecture que le polynôme caractéristique est $X^n \pm a$. En ce cas, il est immédiat que les racines de $\chi_A$ sont des racines $n^{\text{es}}$ ou $2n^{\text{es}}$ de $a$ ou $a^2$, et il n'est pas nécessaire de factoriser $\chi_A$ pour trouver ses racines (on peut même au contraire se compliquer la tâche ainsi). Cela affirme en particulier quand vous reconnaissez la matrice compagnon de $X^n \pm a$.

**Cas particulier fréquent.** Un cas particulier assez fréquent est celui où la somme des coefficients de chaque ligne ou colonne égale le même nombre réel $S$. Dans ce cas, dans le calcul de $\det(\lambda \mathrm{I}_n - A)$ :

**Quand la somme des coefficients de chaque colonne égale $S$.**

1. **Faire l'opération** $L_1 \leftarrow L_1 + \cdots + L_n$ : il apparaît alors $\lambda - S$ dans chaque coefficient de la 1re ligne.
2. **Faire les opérations** $C_i \leftarrow C_i - C_1$, qui éliminent les $\lambda - S$ dans la 1re ligne.
3. **Développer par rapport à la 1re ligne** : $X - S$ est alors un facteur de $\chi_A$.

Si la propriété porte sur la somme des coefficients de chaque colonne : inverser les rôles des lignes et des colonnes ci-dessus.

Cette situation se produit TOUJOURS avec les matrices stochastiques.

*Il est bon de faire cette vérification avant toute chose.* **Cette situation se produit toujours avec les matrices stochastiques** (voir *Méthodes* du chapitre de probabilités). La somme des coefficients de chaque colonne égale 1, donc la factorisation ci-dessus est possible.

## 1.2 Techniques pour se dispenser du calcul de $\chi_A$

Il n'est pas toujours nécessaire de calculer $\chi_A$ pour obtenir les valeurs propres : certaines se voient à l'œil nu. Les principaux recours sont :

1. Une observation attentive des colonnes ou lignes avec beaucoup de zéros.
2. Une observation attentive de la somme des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne.
3. Le théorème du rang appliqué à $A - \lambda \mathrm{I}_n$ pour de bons choix de $\lambda$.
4. La trace.

Détaillons.

**Observation des colonnes ou lignes avec beaucoup de zéros.** Les valeurs propres les plus faciles à repérer s'obtiennent lorsque tous les coefficients de la $i^{\text{e}}$ colonne sont nuls *sauf éventuellement* $a_{i,i}$ (le coefficient diagonal). Dans ce cas, le coefficient $a_{i,i}$ est une valeur propre de $A$ et $E_i$ (le $i^{\text{e}}$ vecteur colonne de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(K)$) est un vecteur propre associé (pourquoi ?).

Lorsque c'est la $i^{\text{e}}$ LIGNE qui vérifie cette propriété, il reste vrai que $a_{i,i}$ est une valeur propre de $A$ (on applique le raisonnement ci-dessus à $A^\top$ et on se souvient qu'une matrice et sa transposée ont mêmes valeurs propres), mais il devient en revanche faux que $E_i$ est un vecteur propre. Attention !

**Observation de la somme des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne.** On en a déjà parlé ci-dessus pour le calcul du polynôme caractéristique, mais cette observation est profitable même quand on ne le calcule pas : si la somme des coefficients de chaque LIGNE est égale au même scalaire $S$, alors on vérifie par un calcul matriciel direct que $S$ est une valeur propre de $A$, dont un vecteur propre associé est $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Si la propriété porte sur les COLONNES, il reste vrai que $S$ est une valeur propre de $A$ (on applique le raisonnement ci-dessus à $A^\top$ et on se souvient qu'une matrice et sa transposée ont mêmes valeurs propres), mais il devient en revanche faux que $U$ est un vecteur propre. Attention !

**Par le théorème du rang.** Cela nécessite plus de nez : soustraire un bon multiple de l'identité permet parfois d'obtenir facilement une matrice non inversible. D'après le théorème du rang :

$$\text{si : } \operatorname{rang}(A - \lambda \mathrm{I}_n) < n, \text{ alors : } \dim(\ker(A - \lambda \mathrm{I}_n)) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda \mathrm{I}_n) > 0,$$

donc $\ker(A - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(K)}\}$ et $\lambda$ est valeur propre de $A$. Cette approche a même l'avantage de donner la dimension du sous-espace propre associé ! (mais insuffisant si on a besoin de calculer explicitement la matrice de passage ensuite)

Pour savoir quels choix de $\lambda$ tenter, cherchez les choix qui donneraient une colonne (ou ligne) **nulle**, ou qui donneraient des colonnes (ou lignes) **égales** (ou **opposées**). C'est le plus simple à examiner à l'œil nu. Avec l'expérience, vous arriverez à voir à l'œil nu des dépendances plus élaborés.

N'oubliez pas que la dimension du sous-espace propre associé à $\lambda$ est un minorant de son ordre de multiplicité. Cette méthode fait donc davantage que de vous donner une valeur propre : plus la dimension du sous-espace propre associé à $\lambda$ est élevée, et moins il reste de valeurs propres restantes à déterminer !

**Par la trace.** Elle permet, *si on connaît toutes les valeurs propres avec multiplicités sauf une*, d'en déduire la dernière. Après, en général, nous avons tout ce qu'il faut pour en déduire la diagonalisation de la matrice, sans avoir calculé le polynôme caractéristique.

Pour que la trace soit la somme des valeurs propres, encore faut-il que le polynôme caractéristique soit scindé. Pour cela :
— il suffit de se placer sur $\mathbb{C}$, au pire, quitte à parler des valeurs propres complexes ;
— si l'on a déjà déterminé $n-1$ valeurs propres de $A$, multiplicités comprises, alors $\chi_A$ est scindé.

Pensez à toutes ces observations avant de vous lancer dans un calcul !

**Exemple 1.** Déterminons les valeurs propres de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$. On note que la somme des coefficients de chaque colonne égale 2, donc 2 est valeur propre de $A$. De plus elle est manifestement de rang $3 < 4$, puisque $L_1 = L_3$, donc par le théorème du rang : $\dim(\ker(A)) = 1$. On en déduit que 0 est valeur propre de $A$. Le fait que la deuxième ligne soit égale à $E_2^\top$, où $E_2$ est le deuxième vecteur de la base canonique de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, donne une troisième valeur propre, à savoir 1 (on pouvait aussi trouver cette valeur propre en inspectant le rang de $A - \mathrm{I}_4$).

Il ne reste plus qu'une valeur propre à dénicher. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ la dernière valeur propre de $A$ (avec répétition éventuelle). On a : $\mathrm{tr}(A) = 9$, mais la trace est aussi la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités, donc : $\mathrm{tr}(A) = 2 + 0 + 1 + \lambda = 3 + \lambda$. En comparant ces deux expressions, on trouve : $\lambda = 6$. En conclusion :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2,0,1,6\}.$$

## 2 Détermination des sous-espaces propres

Il n'y a pas grand'chose à raconter de ce côté : il s'agit de résoudre des systèmes linéaires à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. C'est-à-dire : pour déterminer les vecteurs propres de $\lambda$, on résout : $AX = \lambda X$, d'inconnue $X$, et on écrit cette égalité sous forme d'un système linéaire équivalent.

Vous savez *a priori* qu'il existe des solutions non nulles à cette équation si $\lambda$ est une valeur propre : c'est la définition d'une valeur propre ! Trouver pour unique solution $X = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(K)}$ signifie que vous avez fait une erreur de calcul (soit dans la résolution du système linéaire, soit dans le calcul de $\chi_A$), soyez-en conscients !

**Pour vérifier vos calculs :** vous pouvez regarder si les vecteurs que vous trouvez sont effectivement solutions de $AX = \lambda X$, en calculant $AX$.

**Déterminer les sous-espaces propres sans résoudre $AX = \lambda X$.** Notons que les commentaires ci-dessus (sommes des coefficients de chaque ligne égales, coefficients diagonaux...) permettent de trouver quelques vecteurs propres sans passer par la résolution de $AX = \lambda X$. Si, de plus, on connaît *a priori* la **dimension** des sous-espaces propres, soit :
— grâce au théorème du rang ;
— grâce aux ordres de multiplicité des valeurs propres, qui majorent ces dimensions ;
alors ces vecteurs propres connus peuvent suffire à engendrer les sous-espaces propres qui les contiennent, sans qu'il ne soit nécessaire de passer par la résolution de $AX = \lambda X$.

**Exemple 2.** La matrice : $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ a pour rang 1, donc son noyau (qui est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0) est de dimension 2. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe dans $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (qui est de dimension 3), on en déduit qu'il reste au plus un sous-espace propre, et que le cas échéant sa dimension égale 1.

Or la somme des coefficients de chaque ligne égale 3, donc 3 est une valeur propre de $U$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé. D'après ce qui précède, le sous-espace propre associé à 3 est de dimension 1, donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ suffit à l'engendrer. Ainsi : $\ker(U - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Nous n'avons pas eu besoin de résoudre $UX = 3X$ (et, d'ailleurs, on a la certitude d'avoir trouvé toutes les valeurs propres, pour des raisons dimensionnelles, et $U$ est diagonalisable).

# 3 Un exemple standard : les matrices compagnons

Les matrices compagnons sont les matrices de la forme :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(K).$$

On dit dans ce cas qu'il s'agit de la matrice compagnon du polynôme $P = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_i X^i \in K[X]$.

## 3.1 Réduction des matrices compagnons

Vous devez savoir démontrer que :

— la matrice compagnon de $P$ a pour **polynôme caractéristique**... le polynôme $P$, justement ! Il est possible de le démontrer très rapidement en développant le déterminant de $X\mathrm{I}_p - C_P$ par rapport à la première ligne et en raisonnant par récurrence (nous avons là une exception très notable au fait de chercher à factoriser un déterminant dans le procédé de calcul) ;

— les **valeurs propres** de la matrice compagnon de $P$ sont les **racines** de $P$ ;

— les **sous-espaces propres** d'une matrice compagnon sont tous de **dimension** 1 ; celui associé à $\lambda \in K$ est engendré par :

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix},$$

ce qu'on démontre assez facilement en utilisant la méthode du pivot « à l'envers », c'est-à-dire en commençant par la dernière variable, et en remontant ;

— la matrice compagnon de $P$ est diagonalisable si et seulement si $P$ est **scindé et à racines simples** (c'est une conséquence de ce qui précède : pourquoi ?), et le cas échéant une matrice de passage possible est la matrice de Vandermonde associée aux racines de $P$.

La trigonalisation est plus délicate. Nous vous laissons vérifier en exercice :

**Exercice 1.** On suppose $P$ scindé. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_P)$ une valeur propre d'ordre de multiplicité $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $X_\lambda^{(k)}$ le vecteur obtenu à partir de $X_\lambda$ en dérivant $k$ fois chaque composante (si l'on voit abusivement $\lambda$ comme une variable). Montrer que la famille $\left(\frac{1}{k!}X_\lambda^{(k)}\right)_{0\leqslant k\leqslant h-1}$ est une base de $\ker\left((C_P-\lambda \mathrm{I}_n)^h\right)$, et en déduire une matrice triangulaire diagonale par blocs qui soit semblable à $C_P$.

### 3.2 Matrices compagnons et suites, équations différentielles

Les matrices compagnons apparaissent naturellement dans l'étude des suites récurrentes linéaires et équations différentielles, et c'est pourquoi vous gagnerez à les connaître.

**Étude des suites récurrentes.** Soit $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Si l'on a une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+p}+a_{p-1}u_{n+p-1}+\cdots+a_0u_n=0,$$

alors en posant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\ \vdots\\ u_{n+p-1}\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_{p,1}(K)$, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad X_{n+1}=C_PX_n.$$

**(Le vérifier pour s'en convaincre, et ne pas compter sur un bête effort de mémoire pour obtenir la bonne matrice !)**

Cette égalité diminue l'ordre de la relation de récurrence, au prix d'un accroissement dimensionnel.

Pour en déduire l'expression de $X_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, il y a deux approches dont nous comparerons les mérites. Dans les deux cas, on commence par réduire la matrice $C_P$, en trouvant $Q\in \mathrm{GL}_p(K)$ inversible et $D\in \mathrm{M}_p(K)$ diagonale ou triangulaire telles que : $C_P=QDQ^{-1}$. Pour plus de détails sur la réduction des matrices compagnons : voir la section 3.1. Ensuite :

1. **Première approche.** On change de vecteur inconnu en posant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $Y_n=Q^{-1}X_n$, et on remarque que la relation vérifiée par $X_n$ équivaut, après multiplication à gauche de chaque membre de l'égalité par $Q^{-1}$, à : $\forall n\in\mathbb{N}$, $Y_{n+1}=DY_n$. En regardant ligne à ligne cette égalité, on note que les composantes de la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ sont des suites **géométriques** si $D$ est diagonale : on sait les expliciter, et donc $Y_n$ est explicite pour tout $n\in\mathbb{N}$. On en déduit $X_n$ grâce à la relation : $X_n=QY_n$.

   Si $D$ n'est pas diagonale, alors on obtient un « second membre » dans les relations vérifiées par les composantes de $(Y_n)_{n\geqslant 0}$, mais dont la gestion n'est pas si pénible *via* un télescopage adéquat : voir l'exemple 4 ci-dessous. → page 7
   On remarque que le calcul de $Q^{-1}$ est totalement inutile suivant cette approche. Ne le faites pas.
2. **Deuxième approche.** La relation ci-dessus implique par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n=(C_P)^nX_0$. Ainsi calculer $X_n$ revient à calculer $(C_P)^n$, ce qu'on sait faire : si $D$ est diagonale, alors le calcul de $D^n$ est immédiat et on en déduit $(C_P)^n$ *via* la relation : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(C_P)^n=PD^nP^{-1}$. Cela nécessite cependant de calculer $P^{-1}$.

   Noter que la section *Calcul des puissances d'une matrice* donne des méthodes de calcul des puissances ne nécessitant pas de réduire $C_P$ (mais tout de même de connaître les valeurs propres). Cela peut notamment être intéressant si $C_P$ n'est pas diagonalisable et que vous ne savez pas la trianguler (ou ne le voulez pas).

On obtient alors $u_n$ en retenant le premier coefficient de $X_n$. On peut très légèrement diminuer la taille des matrices manipulées en notant que $u_n$ est le produit scalaire de $E_1$ (premier vecteur de la base canonique) par $X_n$, c'est-à-dire : $u_n=(1\ 0\ 0)X_n$. En remplaçant $X_n$ par $PDP^{-1}$ et en commençant par effectuer le produit $(1\ 0\ 0)P$, vous avez une matrice carrée de moins (sachant que le produit matriciel par $D$ n'est guère effrayant).

**Mérites comparés.** La première approche a l'avantage d'être beaucoup moins calculatoire (pas de calcul impliquant trois matrices carrées, pas de calcul de $P^{-1}$), mais la seconde a l'avantage d'expliciter la dépendance en les premiers termes (encodés par $X_0$). Y songer si vous cherchez une suite avec des conditions initiales prescrites. Cependant, ne pas savoir comment une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dépend de ses premiers termes n'est pas gênant si l'on veut seulement avoir une base de l'ensemble des suites qui conviennent (à nuancer tout de même, comme vous pouvez en juger dans l'exemple suivant, lorsqu'à la fin on veut déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les suites trouvées soient réelles).

**Exemple 3.** Déterminons les suites *réelles* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$. Posons : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. L'égalité précédente équivaut alors à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = CX_n$. Le calcul du polynôme caractéristique, en tirant profit de la somme des coefficients de chaque ligne qui vaut 1, mène à : $\chi_C = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X+i)(X-i)$. D'après ce qu'on a raconté dans la section 3.1, la matrice $C$ est diagonalisable et on a : $C = PDP^{-1}$, avec : ← page 4

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et :} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

La suite du raisonnement dépend selon l'approche suivie.

**Première approche.** Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$. Après multiplication à gauche de chaque membre de l'égalité : $X_{n+1} = CX_n$, par $P^{-1}$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = P^{-1}CX_n = DP^{-1}X_n = DY_n$. Si l'on note $a_n$, $b_n$ et $c_n$ les coordonnées de $Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $Y_{n+1} = DY_n$ donne, coordonnée par coordonnée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = ib_n, \quad c_{n+1} = -ic_n.$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0$, $b_n = i^n b_0$, $c_n = (-i)^n c_0$. L'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1\ 0\ 0)X_n = (1\ 0\ 0)PY_n$, permet alors d'en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a_n + b_n + c_n = a_0 + i^n b_0 + (-i)^n c_0.$$

Cependant cela ne définit pas nécessairement une suite *réelle*. Pour cela, on note que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \overline{u}_n = u_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \overline{a_0} + (-i)^n\overline{b_0} + i^n\overline{c_0} = a_0 + i^n b_0 + (-i)^n c_0.$$

Pour identifier, nous avons besoin de la liberté de la famille $\left((1)_{n\geqslant 0}, (i^n)_{n\geqslant 0}, ((-i)^n)_{n\geqslant 0}\right)$. Deux arguments possibles : 1° lorsqu'on écrit une relation de dépendance linéaire entre ces trois suites, et qu'on la regarde pour $n \in \{0,1,2\}$, on voit qu'on obtient un système dont l'inversibilité équivaut à l'inversibilité de la matrice de Vandermonde associée à 1, $i$ et $-i$ : on sait qu'elle est vérifiée, 2° c'est une famille de vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par $(u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$, associés à des valeurs propres différentes. Ceci étant dit, l'identification donne : $a_0 = \overline{a_0}$ (donc $a_0$ est réel), et : $b_0 = \overline{c_0}$. Ceci permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a_0 + 2\mathrm{Re}\left(i^n b_0\right) = a_0 + 2\mathrm{Re}(b_0)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2\mathrm{Im}(b_0)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Ceci montre que toute suite réelle vérifiant la relation de récurrence de départ est combinaison linéaire de $(1)_{n\geqslant 0}$, $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\geqslant 0}$. La réciproque est facile à vérifier.

**Deuxième approche.** Par récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$. On calcule $P^{-1}$ et on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
u_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} PD^nP^{-1}X_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1+i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2i & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(1+i)i^n + (1-i)(-i)^n}{2}\right)u_0 - \frac{i^{n+1} + (-i)^{n+1}}{2}u_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(1-i)i^n + (1+i)(-i)^n}{2}\right)u_2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Re}((1+i)i^n)\right)u_0 - \mathrm{Re}(i^{n+1})u_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{Re}((1-i)i^n)\right)u_2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)\right)u_0 - \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)u_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)\right)u_2.
\end{aligned}$$

On observe qu'ici, on n'a pas besoin de faire d'effort approfondi pour obtenir la forme des suites *réelles*.

**Exemple 4.** Déterminons les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} + u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$. Posons : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. L'égalité précédente équivaut alors à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = CX_n$. Le calcul du polynôme caractéristique, en tirant profit de la somme des coefficients de chaque ligne qui vaut 1, mène à : $\chi_C = (X+1)^2(X-1)$. D'après ce qu'on a raconté dans la section 3.1, ← page 4 on sait que la matrice $C$ n'est pas diagonalisable. Cependant, en suivant les indications de la section sur la triangulation (ou celles de l'exercice de la section précédente), on montre que l'on a $C = PTP^{-1}$, avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et :} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voyons comment poursuivre selon l'approche choisie.

**Première approche.** Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$. Après multiplication à gauche de chaque membre de l'égalité : $X_{n+1} = CX_n$, par $P^{-1}$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = P^{-1}CX_n = TP^{-1}X_n = TY_n$. Si l'on note $a_n$, $b_n$ et $c_n$ les coordonnées de $Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $Y_{n+1} = TY_n$ donne, coordonnée par coordonnée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -a_n + b_n, \quad b_{n+1} = -b_n, \quad c_{n+1} = c_n.$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-1)^n b_0$, $c_n = c_0$, $a_{n+1} = -a_n + (-1)^n b_0$. La relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas usuelle, mais on la détermine *via* la méthode du télescopage dont je parle dans *Méthodes*, *Relations de récurrence dépendant de n*. On multiplie l'égalité précédente par $(-1)^{n+1}$ et on somme. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n-1} ((-1)^{k+1}a_{k+1} - (-1)^k a_k) = -\sum_{k=0}^{n-1} b_0 = -nb_0, \quad \text{d'où :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = (-1)^n (a_0 - nb_0).$$

L'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1\ 0\ 0)X_n = (1\ 0\ 0)PY_n$, permet alors d'en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a_n + c_n = (-1)^n (a_0 - nb_0) + c_0.$$

**Deuxième approche.** En calculant $T^n$ *via* la formule du binôme de Newton (voir la section *Calcul des puissances d'une matrice*), on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus : $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} u_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} PT^nP^{-1}X_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3u_0 - 2u_1 - u_2 \\ 2u_0 - 2u_2 \\ u_0 + 2u_1 + u_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\left(3(-1)^n + 2n(-1)^{n-1} + 1\right) u_0 + \frac{1-(-1)^n}{2} u_1 + \frac{1}{4}\left(-(-1)^n - 2n(-1)^{n-1} + 1\right) u_2. \end{aligned}$$

À réarrangement près, on retrouve bien la même chose qu'avec la première approche. On pourra aussi s'entraîner à obtenir $C^n$ sans trianguler $C$ (cf. la section sur le calcul de puissances matricielles).

**Exercice 2.** Retrouver les résultats du cours de 1re année concernant les relations de récurrence linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

**On observe que pour quiconque maîtrise la réduction des matrices compagnons, l'étude des suites récurrentes n'a plus de mystère !** (Le lemme des noyaux est cependant plus intéressant.)

**Étude des équations différentielles linéaires.** Si l'on nous demande d'étudier les solutions $y$ de :

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_0 y = 0,$$

notons qu'en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$, on a : $Y' = C_P Y$. Nous expliquons dans la section *Applications de la réduction* comment, à partir de cette relation, obtenir les solutions de cette équation différentielle. C'est essentiellement la même approche que pour les suites : réduire $C_P$ ainsi : $C_P = PDP^{-1}$, et poser : $Z = P^{-1}Y$, permet de se ramener à un système différentiel $Z' = DZ$ avec $D$ diagonale ou triangulaire. Identifier ligne par ligne donne trois équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre. On sait résoudre et en déduire $Z$, puis $Y$ *via* la relation $Y = PZ$, puis $y$ en retenant sa première composante.

### 3.3 Matrices compagnons et racines de polynômes

Si $C_P$ est la matrice compagnon de $P$, alors : $P = \chi_{C_P}$. Cela veut dire en particulier que les racines de $P$ sont les valeurs propres de $\chi_{C_P}$ et que, pour tout polynôme $P$, on peut ramener l'étude de ses racines à l'étude des valeurs propres d'une certaine matrice (la matrice compagnon). L'intérêt de l'approche est qu'on peut utiliser des techniques d'algèbre linéaire pour étudier des valeurs propres (chose qui est *a priori* impossible pour les racines d'un polynôme). On pensera donc à passer par la matrice compagnon de $P$ dans les situations suivantes :

— lorsqu'on ne s'intéresse non pas aux racines de $P$, mais à ses puissances : la triangulation donne en effet un lien très simple entre les valeurs propres complexes de $C_P$ et celles de $(C_P)^k$ ;

— lorsqu'on cherche une relation entre les racines de $P$ et les coefficients de $P$, en dehors des relations coefficients-racines déjà connues.

Pour ce dernier point : les matrices vérifient de nombreuses identités reliant leurs valeurs propres et leurs coefficients :

— si $X$ est un vecteur propre de $C_P$ associé à $\lambda$, alors c'est aussi une valeur propre de $C_P^\top$ et on a : $C_P^\top X = \lambda X$, ce qui donne une relation non triviale entre $\lambda$ et les coefficients de $C_P^\top$, et donc entre $\lambda$ et les coefficients de $P$ (pourquoi parler de $C_P^\top$ plutôt que de $C_P$ ? parce que la relation $C_P X = \lambda X$ équivaut exactement à $P(\lambda) = 0$ et n'apporte pas de plus-value) ;

— plus généralement : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(C_P^\top)^k X = \lambda^k X$, ce qui fournit un lien entre les puissances de $\lambda$ et les coefficients de $C_P^\top$, puis de $P$ ;

— la trace et le déterminant de $C_P$ et de ses puissances (après triangulation : voir section consacrée) s'exprime en fonction de ses valeurs propres de $C_P$ (et donc des racines de $P$).

**Exemple 5.** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire, dont on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines complexes avec répétitions. On veut montrer : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \in \mathbb{Z}$. Pour cela, on note que si $C_P$ est la matrice compagnon de $P$, alors : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \operatorname{tr}\Big((C_P)^2\Big)$ (cela nécessite de trianguler $C_P$). Or $C_P$ est à coefficients entiers puisque $P$ l'est, donc $C_P^2$ l'est aussi et sa trace également : d'où le résultat.

**Exercice 3.** Démontrer ce même résultat sans recourir aux matrices compagnons, mais par un bon usage des fonctions symétriques élémentaires.

**Exercice 4.** Vérifier l'affirmation ci-dessus selon laquelle la relation $C_P X = \lambda X$, pour $X$ vecteur propre de $C_P$, équivaut exactement à $P(\lambda) = 0$.

# Table des matières