Méthodes (PSI) – Réduction des endomorphismes
✓ Applications de la réduction

1 La diagonalisation

1.1 Dans l'étude de suites récurrentes linéaires

C'est l'application la plus banale que nous donnons de la réduction. Voir la section *Un exemple standard : les matrices compagnons* sur les matrices compagnons pour plus de détails.

1.2 Dans l'étude de chaînes de Markov

Voir le cours du chapitre de probabilités, et son document *Méthodes* (section 3.2, *Chaînes de Markov*).

1.3 Dans l'étude d'équations différentielles linéaires

1.3.1 Mise d'une équation différentielle sous forme matricielle : $Y' = AY + B$

La réduction matricielle permet d'étudier des équations différentielles aussi variées que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'''(t) - 4y''(t) + 6y'(t) + y(t) = t^3, \text{ ou : } \begin{cases} y_1' &= y_1 + 3y_2 + 8y_3, \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' &= y_1 + 2y_2 + y_3. \end{cases}$$

Voyons comment : soit n un entier naturel non nul, et soient $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}, b_1, \ldots, b_n : I \to K$ des applications continues sur I. Si l'on cherche à déterminer les applications $y_1, \ldots, y_n : I \to K$ dérivables sur I qui vérifient le système différentiel linéaire :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} y_1'(t) &= a_{1,1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{1,n}(t)y_n(t) + b_1(t), \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\vdots \\ y_i'(t) &= a_{i,1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{i,n}(t)y_n(t) + b_i(t), \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n,1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{n,n}(t)y_n(t) + b_n(t), \end{cases} \tag{S}$$

On peut mettre ce système sous forme matricielle en définissant :

$$\forall t \in I, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

En effet, (S) s'écrit également sous la forme matricielle suivante :

$$\forall t \in I, \quad \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + B(t).$$

Autrement dit, résoudre (S), c'est également chercher l'ensemble des applications vectorielles $Y : I \to \mathrm{M}_{n,1}(K)$ dérivables sur I telles que : $\forall t \in I$, $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$.

Si, à la place, on étudie une équation différentielle linéaire d'ordre n, de la forme :

$$\forall t \in I, \quad y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = b(t), \tag{E}$$

où $a_1, \dots, a_n : I \to K$ sont des applications continues, alors en posant :

$$\forall t \in I, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

(la matrice $A(t)$ est une matrice compagnon : voir *Un exemple standard : les matrices compagnons*), (E) s'écrit également sous la forme matricielle suivante **(le vérifier pour s'en convaincre ! ! !)** :

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + B(t).$$

Si, pour tout $t \in I$, on pose :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

alors pour tout $t \in I$ d'après ce qui précède, on a : $Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + B(t)$, donc $Y : I \to \mathrm{M}_{n,1}(K)$ est solution de l'équation différentielle matricielle : $Y' = AY + B$.

Il suffit donc de savoir résoudre une équation différentielle mise sous cette forme matricielle pour en déduire les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre n notée (E). Il sera important de savoir mettre sous forme matricielle toute équation différentielle linéaire.

Exemple 1. Le système différentiel : $\begin{cases} y_1' &= y_1 &+2y_2 &+4y_3, \\ y_2' &= y_1 &-3y_2 &+9y_3, \\ y_3' &= y_1 & &+y_3. \end{cases}$ peut se réécrire ainsi sous forme d'équation différentielle matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. L'équation différentielle linéaire $y^{(4)} = y' - y$ s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}.$$

Exemple 3. L'équation différentielle : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'''(t) - e^t y''(t) + \cos(t) y(t) = t^2$, s'écrit matriciellement :

$$\forall t \in I, \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cos(t) & 0 & e^t \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix},$$

où l'on a posé : $\forall t \in I,\, Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

En résumé, aussi bien les systèmes différentiels linéaires que les équations différentielles linéaires peuvent se mettre sous la forme $Y' = AY + B$.

1.3.2 Résolution explicite de $Y' = AY + B$: cas où A est diagonalisable

Dans le cas où A est à coefficients constants, et diagonalisable (en vérité on peut relâcher les hypothèses, mais ce serait au détriment de la clarté), on peut ramener la résolution de $Y' = AY + B$ à celle de n équations différentielles linéaires du premier ordre qu'on sait résoudre. Pour ce faire :

1. On diagonalisable A : il existe alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$;
2. **C'est l'étape clé :** on change d'inconnues en posant $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$; alors $Z' = P^{-1}Y'$, et donc :
$$Y' = AY + B \iff Y' = PDP^{-1}Y + B \overset{[P^{-1}\times]}{\iff} P^{-1}Y' = DP^{-1}Y + P^{-1}B \iff Z' = DZ + P^{-1}B.$$
Notons $P^{-1}B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ pour la suite.
3. Comme D est diagonale, de coefficients diagonaux qu'on note λ_i, le système différentiel $Z' = DZ + P^{-1}B$ équivaut, lorsqu'on identifie composante par composante, à :
$$\begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \lambda_n z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z_1' & = & \lambda_1 z_1 + \beta_1, \\ & \vdots & \\ z_n' & = & \lambda_n z_n + \beta_n. \end{array} \right.$$
Nous avons n équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre, sans dépendances les unes aux autres : nous savons TOUTES les résoudre, grâce aux méthodes vues en 1re année (ou celles que je donne dans le document *Méthodes* du chapitre sur les équations différentielles) ! On en déduit $z_1, \dots, z_n$.
4. Ayant obtenu $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on en déduit Y en calculant $Y = PZ$.

Si $B = 0$, notez qu'il est inutile de calculer P^{-1} dans cette résolution ! En effet, cette matrice ne doit être explicitée que pour le calcul éventuel de $P^{-1}B$.

Exemple 4. Déterminons les applications $y_1, y_2, y_3 : I \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 3y_1 + y_2 - 4y_3, \\ y_2' & = & -8y_1 - 2y_2 + 12y_3, \\ y_3' & = & -2y_1 - y_2 + 5y_3. \end{array} \right. \qquad (\mathscr{H})$$
Si on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -8 & -2 & 12 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, alors ce système équivaut à $\mathscr{H}' : Y' = AY$. Je vous laisse vérifier qu'on a : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Posons : $Z = P^{-1}Y =$

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Alors :

$$Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y \overset{[P^{-1}\times]}{\iff} P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \iff Z' = DZ \iff \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 2z_2 \\ 3z_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z_1' &=& z_1 \\ z_2' &=& 2z_2, \\ z_3' &=& 3z_3. \end{cases}$$

Ainsi z_1, z_2 et z_3 doivent vérifier trois équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre : la résolution est triviale. On en déduit :

$$Y' = AY \iff \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} z_1(t) &=& \alpha e^t \\ z_2(t) &=& \beta e^{2t}, \\ z_3(t) &=& \gamma e^{3t}. \end{cases}$$

En se souvenant que $Z = P^{-1}Y$, on déduit : $Y = PZ = \begin{pmatrix} -z_2 - z_3 \\ 4z_1 + 5z_2 + 4z_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}$. En remplaçant z_1, z_2 et z_3 par leurs expressions respectives, on obtient :

$$Y' = AY \iff \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} -\beta e^{2t} - \gamma e^{3t} \\ 4\alpha e^t + 5\beta e^{2t} + 4\gamma e^{3t} \\ \alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{3t} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} y_1(t) &=& & -\beta e^{2t} & -\gamma e^{3t}, \\ y_2(t) &=& 4\alpha e^t & +5\beta e^{2t} & +4\gamma e^{3t}, \\ y_3(t) &=& \alpha e^t & +\beta e^{2t} & +\gamma e^{3t}, \end{cases}$$

décrivant ainsi toutes les solutions de $(\mathscr{H})$. Notez qu'on n'a jamais eu besoin de calculer P^{-1} !

Exercice 1. Appliquer cette méthode au système : $\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f'(t) &=& \mathrm{ch}(t)f(t) + \mathrm{sh}(t)g(t) + e^t, \\ g'(t) &=& \mathrm{sh}(t)f(t) + \mathrm{ch}(t)g(t) + e^{-t}. \end{cases}$

Remarque. Pour cet exemple spécifique, on pourrait aussi résoudre le système en trouvant des équations différentielles simples vérifiées par $f+g$ et $f-g$; mais, en fait, cela revient implicitement à montrer que la matrice associée au système se réduit avec la matrice de passage inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (et dans ce cas, $Z = P^{-1}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f-g \\ f+g \end{pmatrix}$ vérifie bien un système différentiel tel que décrit dans la méthode ci-dessus) : c'est de la réduction « à la main ».

1.3.3 Résolution explicite de $Y' = AY + B$: cas où A n'est pas diagonalisable

Si A n'est pas diagonalisable, rien n'est perdu : pour résoudre $Y' = AY$,

— on trigonalise A, quitte à se placer dans $\mathbb{C}$: il existe alors une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$;

— on change encore une fois d'inconnues en posant $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$; alors $Z' = P^{-1}Y'$, et donc :

$$Y' = AY \iff Y' = PTP^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = TP^{-1}Y \iff Z' = TZ;$$

— la dernière ligne de ce système est de la forme $z_n' = \lambda_n z_n$: on sait résoudre ; on résout alors progressivement le système en allant de la dernière équation à la première, et en injectant les $z_n, z_{n-1}, \ldots, z_k$ déterminés à chaque étape, cela revient à résoudre n équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre ;

— ayant obtenu $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on en déduit Y en calculant $Y = PZ$.

Notez qu'il est inutile de calculer P^{-1} ! L'approche est analogue si l'équation est de la forme $Y' = AY + B$.

1.4 ☢ Dans la résolution d'équations matricielles

Le terme est vague. Par « équation matricielle », j'entends la résolution d'équations de la forme $A = P(M)$, où $A \in \mathrm{M}_n(K)$ est une matrice fixée, $P \in K[X]$ un polynôme donné (souvent avec peu de coefficients non nuls) et $M \in \mathrm{M}_n(K)$ l'inconnue de cette équation, mais d'autres configurations sont possibles. Par exemple, l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une telle équation.

Leur résolution est compliquée par le fait qu'il n'existe pas de fonction « racine n^{e} matricielle » (du moins pas clairement, et de toute façon pas au programme) pour inverser les relations.

Même pour une relation aussi simple que : $M^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$, la résolution n'est pas aussi intuitive qu'on ne le voudrait. On penserait naïvement à prendre les racines carrées des coefficients : $M = \begin{pmatrix} \pm\alpha & 0 \\ 0 & \pm\beta \end{pmatrix}$ convient, certes, mais il peut y avoir d'autres solutions ; par exemple, l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a également pour solution $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (vérifiez-le). De plus, penser que les équations matricielles se résolvent comme les équations réelles ou complexes entraîne de graves erreurs : l'équation $x^4 = -1$ n'a pas de solution x réelle, alors que l'équation $M^4 = -\mathrm{I}_2$ a des solutions $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, par exemple : $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient, vérifiez-le (cet exemple ne vient pas de nulle part, comment y ai-je pensé ? Que représentent géométriquement $-\mathrm{I}_2$ et la matrice solution proposée ?).

Toutefois, si l'on cherche à résoudre $M^k = D$ où D est une matrice diagonale *dont les coefficients diagonaux sont tous distincts*, alors les seules solutions sont bien obtenues « comme on pense », en extrayant les racines k^{e} des coefficients diagonaux de D.

Exercice 2. Démontrer cette affirmation.

La situation est déjà délicate pour la résolution d'une équation aussi simple que $M^k = D$ où D est diagonale, alors que dire si l'on remplace D par une matrice A arbitraire ? Quelles sont les solutions de l'équation matricielle $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, par exemple ?

Il va de soi que poser $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, puis calculer M^2, pour en déduire neuf équations (non linéaires) vérifiées par a, b, c, etc., dans l'espoir de les résoudre, **est voué à l'échec**. Vous n'y parviendrez JAMAIS ainsi, et ce même si M est d'ordre 2.

C'est alors que la réduction vient à la rescousse. L'idée est que si l'on veut résoudre $A = P(M)$, *où A est diagonalisable*, alors A et M commutent (en effet : $AM = MP(M) = P(M)M = MA$), donc les endomorphismes canoniquement associés à A et M, qu'on note f_A et f_M, commutent également. En particulier, **les sous-espaces propres de f_A sont stables par** f_M, donc on peut étudier l'endomorphisme induit par f_M sur chaque sous-espace propre ; comme f_A est une homothétie sur chaque sous-espace propre, l'étude s'en voit simplifiée, et comme la somme des sous-espaces donne l'espace ambiant entier (puisque A est diagonalisable), déterminer la restriction de f_M à chaque sous-espace propre permet d'en déduire f_M. Plus précisément :

1. On diagonalise A : si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres (adaptée à la décomposition en somme de sous-espaces propres), alors en notant Q la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$, on a $A = QDQ^{-1}$ où D est diagonale.
2. On montre que A et M commutent en écrivant : $AM = MP(M) = P(M)M = MA$.
3. On introduit leurs endomorphismes canoniquement associés f_A et f_M, et on utilise la commutation pour en déduire que les sous-espaces propres de f_A (qui sont ceux de A) sont stables par f_M.
4. Comme la somme des sous-espaces propres égale l'espace entier, et qu'ils sont tous stables par f_M, on en déduit que la matrice de f_M dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, disons de la forme : $M' = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_k \end{pmatrix}$, où A_i est carrée et d'ordre égal à la dimension du i^{e} sous-espace propre.

   Notons que si chaque sous-espace propre est une droite, alors les A_i sont des blocs d'ordre 1 et donc M' est une matrice diagonale ! Situation royale et privilégiée en exercice.

   Si on a davantage d'informations sur M et A, certains blocs sont éventuellement simplifiables : voir exemple ci-dessous.
5. D'après la formule du changement de base, appliquée à f_M avec la base canonique et $\mathcal{B}$, on a : $M = QM'Q^{-1}$.
6. On injecte les expressions $A = QDQ^{-1}$ et $M = QM'Q^{-1}$ dans l'équation $A = P(M)$, et on en déduit : $D = P(M')$ (multiplier à gauche par Q^{-1} et à droite par Q).
7. Cette égalité équivaut à des équations vérifiées par les coefficients de M'. On les résout, et on en déduit M', puis M.

Exemple 5. Résolvons l'équation matricielle $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Notons A la matrice du membre de droite.

1. On sait montrer que A est diagonalisable : si $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A = QDQ^{-1}$.
2. On a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent.
3. Notons f_A et f_M leurs endomorphismes canoniquement associés. Ils commutent, donc les sous-espaces propres de f_A, c'est-à-dire $\ker(f_A - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\ker(f_A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, sont stables par f_M.
4. Soit $\mathcal{B}$ la base obtenue par concaténation des familles génératrices des sous-espaces propres ci-dessus (ou encore : ce sont les colonnes de Q). Grâce à la stabilité de $\ker(f_A - \mathrm{Id})$ et $\ker(f_A)$ (qui sont des droites), on sait que dans cette base, la matrice de f_M est de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
5. D'après la formule du changement de base : $M = Q\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}Q^{-1}$.
6. On a $A = M^2$, c'est-à-dire, d'après les points 1. et 5. ci-dessus : $QDQ^{-1} = Q\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}Q^{-1}$. Après multiplication à gauche par Q^{-1} et à droite par Q, cela donne : $D = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$.
7. On identifie les coefficients de $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$, et cela donne : $\alpha^2 = 2$, $\beta = 0$, et donc : $\alpha = \pm\sqrt{2}$, $\beta = 0$. On en déduit les égalités :
$$M = Q\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Réciproquement, ces deux matrices conviennent.

Exercice 3. Imiter cette démarche pour résoudre l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Si A n'est pas diagonalisable, mais malgré tout de forme assez simple, alors vous pourrez toujours y parvenir en suivant cette méthode.

Exercice 4. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^2 = A$, où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $MA = AM$.
2. En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\alpha^2 = \gamma^2 = 1$. Que vérifie β ? En déduire les deux matrices M qui conviennent.

1.5 Dans les produits scalaires impliquant des endomorphismes autoadjoints

Voir le cours du chapitre sur les espaces préhilbertiens et euclidiens, et son document *Méthodes*, sections 4.2 et 4.3.

2 La trigonalisation

Toutes les applications de la diagonalisation valent également pour la trigonalisation, bien que l'affaire devienne plus délicate (elle doit être indiquée dans ce cas).

Nous ne donnons qu'un exemple d'application n'ayant pas été formulé dans le cas de la diagonalisation. L'intérêt de la trigonalisation est :

— qu'au contraire de la diagonalisation, elle est valable pour toute matrice (quitte à être dans $\mathbb{C}$) ;

— qu'elle « dévoile » les valeurs propres : ce sont les coefficients diagonaux (alors que pour une matrice quelconque, les valeurs propres ne sont en général pas visibles à l'œil nu).

C'est grâce à une triangulation, notamment, que nous avons démontré que la trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités (identité analogue pour le déterminant). Lorsqu'on veut montrer des propriétés du spectre, il peut donc être plus commode de travailler sur une triangulation (dans $\mathbb{C}$). Par exemple, si A est une matrice complexe d'ordre n dont on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes (comptées avec multiplicités) :

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^k) = \left\{\lambda^k \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\right\}$, c'est-à-dire : les valeurs propres complexes de A^k sont celles de A élevées à la puissance k (notez qu'on peut montrer directement une inclusion – laquelle ? – partant de la définition de valeur propre ; mais l'égalité est fausse si on ne considère que les valeurs propres réelles : considérer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de A^2 pour s'en convaincre) ;

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{tr}(A^k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$;

— pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a : $\det(P(A)) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(\lambda_i)$.

Essayez de démontrer ces propositions, très utilisées en exercice.

Table des matières