Méthodes (MP) – Réduction des endomorphismes
Réduction à l'aide d'un polynôme annulateur : cas subtils

Nous parlons ici de l'étude des endomorphismes qui vérifient une relation polynomiale de la forme :

$$f^3 = -f, \quad f^3 + 2f^2 = 0_{\mathrm{L}(E)}, \quad f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E,$$

c'est-à-dire qui admettent un polynôme annulateur explicite, **mais dans le cas particulier où ce polynôme annulateur n'est pas scindé, ou bien est scindé mais pas à racines simples** (de sorte qu'on ne peut pas conclure qu'ils sont diagonalisables avec le critère polynomial de diagonalisation). Dans les exemples ci-dessus, les polynômes annulateurs sont respectivement $X^3 + X = X(X^2 + 1)$, $X^3 + 2X^2 = X^2(X + 2)$ et $X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)(X + 1)$, qui ne sont pas scindés à racines simples.

Mais on peut malgré tout les réduire (il y a derrière cela une stratégie générale, mais qui n'est pas du tout au programme). Il y a généralement les étapes suivantes :

1. Montrer une décomposition en somme directe de sous-espaces stables, de la forme :
$$E = \ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f)), \text{ où } P \text{ et } Q \text{ sont des polynômes, ou : } E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f).$$
2. Expliciter des bases simples de chaque composante de la somme directe. En général, elles sont de la forme $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots)$ (si les polynômes de la somme directe sont irréductibles).
3. En déduire la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition. Elle est diagonale par blocs puisque c'est dans une base adaptée à des sous-espaces stables, et si les choses sont bien faites alors les blocs sont de « petites » matrices compagnons.

Nous expliquons comment procéder à chaque étape, dans les sections ci-dessous.

1 Décomposer en somme directe de sous-espaces stables

Il suffit d'appliquer le lemme des noyaux. En effet, si f est annulé par P, alors : $E = \ker(P(f))$. La décomposition demandée revient alors à décomposer P en éléments irréductibles.

Si P est scindé, alors nul besoin de refaire la démonstration en détails : vous invoquez le cours. On sait en effet que dans ce cas-là, l'espace vectoriel ambiant est somme directe des sous-espaces caractéristiques.

1.1 Cas particulier fréquent : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$

Ce cas particulier ne se produit que si f est annulé par un polynôme ayant 0 pour racine (c'est-à-dire : multiple de X). Plus concrètement, cela signifie que f vérifie une relation de la forme :

$$a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f = 0_{\mathrm{L}(E)}, \tag{$*$}$$

avec $a_1 \neq 0$ pour simplifier la discussion. Notez bien l'absence de l'endomorphisme identité.

Pour montrer la décomposition en somme directe $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, notons que cette fois nous avons une donnée sur les dimensions grâce au théorème du rang : nous savons que nous avons toujours $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, indépendamment des hypothèses sur f. Il suffit donc de démontrer que la somme est directe (ce que je dis est faux si l'on est en dimension non supposée finie, auquel cas on ne peut pas utiliser le théorème du rang et on n'a pas d'autre choix que de suivre la démarche ci-dessous). Vous pouvez le faire en suivant l'indication de l'exercice ci-dessous :

Exercice 1. Soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. Notons $\vec{x} \in E$ un antécédent de $\vec{y}$ par f.

1. Appliquer $(*)$ à $\vec{x}$, et en déduire une expression de la forme $\vec{y} = -\sum_i a_i f^i(\vec{y})$, où les valeurs prises par l'indice de sommation i sont à préciser.
2. En déduire que $\vec{y} = \vec{0}$, et conclure.

Si l'on n'est pas en dimension finie, et que nous devons explicitement construire, pour tout $\vec{x} \in E$, des vecteurs $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, alors on peut procéder par analyse et synthèse, mais il s'avère qu'on peut directement expliciter $\vec{y}$ et $\vec{z}$ à l'aide de la relation $(*)$, un peu modifiée :

$$\left(a_n f^{n-1} + a_{n-1} f^{n-2} + \cdots + a_2 f + a_1 \mathrm{Id}_E\right) \circ f = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

Si l'on appelle : $Q = \sum_{k=2}^{n-1} a_k f^{k-2}$, alors cette relation s'écrit plus succinctement :

$$(Q(f) \circ f + a_1 \mathrm{Id}_E) \circ f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$\dagger$}$$

Comme nous avons là des polynômes en f, on pourrait bien sûr écrire toutes les compositions dans l'ordre inverse (par commutation). Voyons comment en déduire l'explicitation voulue :

Exercice 2. On rappelle qu'on suppose $a_1 \neq 0$. Soit $\vec{x} \in E$. On pose $U = Q \cdot X + a_1$.

1. Montrer que $U(f)(\vec{x})$ appartient à $\ker(f)$, et que $f(\vec{x})$ appartient à $\ker(U(f))$.
2. Écrire $\vec{x}$ en fonction de $U(f)(\vec{x})$ et $f(\vec{x})$, et en déduire le résultat voulu.

Enfin, nous laissons en agrément un exercice montrant qu'en fait, la somme directe $\ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ n'est qu'une réécriture de la somme directe obtenue par le lemme des noyaux.

Exercice 3. Soit P un polynôme annulateur non nul de f. On suppose qu'il existe $U \in K[X]$ tel que : $P = XU$, avec : $U(0) \neq 0$. Montrer : $\operatorname{im}(f) = \ker(U(f))$.

2 ☢ Trouver une base adaptée pour réduire f

Supposons pour simplifier que f est annulé par un polynôme de la forme $P = (X - \alpha) \cdot Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. D'après le lemme des noyaux, on a : $E = \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(Q(f))$. Il s'agit à présent d'utiliser cette décomposition pour en déduire la matrice de f dans une base adaptée : on produit une base de E en concaténant une base de $\ker(Q(f))$ et une base de $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$.

Notez que c'est un sous-espace propre si $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$: généralement, une hypothèse sur f est faite pour se retrouver dans ce cas de figure ; soit une hypothèse d'inversibilité, soit une hypothèse du type $f \neq \alpha \mathrm{Id}_E$. Nous y reviendrons.

Enfin, notez que si Q est scindé, alors le lemme des noyaux permet en vérité de faire apparaître des sous-espaces caractéristiques : nous vous renvoyons alors à la section 3 sur la triangulation pour savoir comment réagir. Je suppose ci-dessous que Q n'est pas scindé.

Pour que les indications suivantes aient une chance d'aboutir, il vaut mieux être dans ces configurations favorables :

— **la dimension de E est raisonnable**, ainsi que le degré de Q ;

— le polynôme Q est **irréductible**, ou sa décomposition en facteurs irréductibles ne fait pas intervenir de puissances strictement supérieures à 1 (ce qui nous ramène au cas irréductible grâce au lemme des noyaux).

Autrement : soit vous avez besoin d'indications, soit vous devez faire une analyse approfondie des hypothèses (et en particulier de la matrice qu'on doit supposément obtenir) pour savoir comment fabriquer une base.

Les étapes sont alors, peu ou prou, les suivantes :

(1) On montre que $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$ (c'est-à-dire : α est valeur propre de f).

(2) On utilise les hypothèses de l'énoncé pour montrer : $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \neq E$, et on en déduit grâce à la somme directe : $\ker(Q(f)) \neq \{\vec{0}\}$.

(3) On explicite une famille libre de $\ker(Q(f))$, de la forme $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{\ell}(\vec{x}))$ avec $\vec{x} \in \ker(Q(f))$. **Cette étape peut être différente si Q n'est pas irréductible, mais nous n'en parlerons pas.** Cela donne une minoration de la dimension de $\ker(Q(f))$ (puisque la dimension majore le cardinal de toute famille libre). Combiner toutes les inégalités dimensionnelles permet d'en déduire la dimension exacte de $\ker(Q(f))$ et que $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{\ell}(\vec{x}))$ est en vérité une **base** de $\ker(Q(f))$.

(4) Il reste à concaténer une base de $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$ (qui est une famille de vecteurs propres de f associés à α) avec la base $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{\ell}(\vec{x}))$ de $\ker(Q(f))$, pour avoir une base de E. Puis on écrit la matrice de f dans cette base adaptée pour conclure.

Le nombre de vecteurs de la famille $(f^k(\vec{x}))_k = (\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots)$ dépend du degré de Q et de son irréductibilité.

La troisième étape ne nécessite pas d'explications excessives. L'exemple ci-dessous suffira pour comprendre comment obtenir la dimension exacte de $\ker(Q(f))$. Pour les autres étapes :

(1) Pour montrer que α est une valeur propre de f, vous aurez souvent besoin :

  (∗) de montrer que c'est l'unique valeur propre *possible* ; là, on a besoin d'utiliser le fait que les valeurs propres de f soient parmi les racines de ses polynômes annulateurs : comme le polynôme annulateur P est rarement fourni par l'énoncé sous une forme factorisée, vous aurez probablement besoin de calculer $P(\alpha)$ pour vérifier que c'est une racine, puis de faire la division euclidienne par $X - \alpha$ pour trouver le facteur Q (et montrer que Q n'a pas d'autre racine réelle) ;

  (†) de montrer que α en est effectivement une ; pour y parvenir, cela dépend des hypothèses de l'énoncé : soit on raisonne par l'absurde en supposant que $f - \alpha \mathrm{Id}_E$ est inversible (ou hypothèse analogue, qui contredit le fait que α soit valeur propre), et multiplier $P(f) = 0_{\mathrm{L}(E)}$ par $(f - \alpha \mathrm{Id}_E)^{-1}$ contredit une autre hypothèse (pour cette étape, il vaut mieux factoriser P pour reconnaître $P(f) = (f - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ Q(f))$; soit vous utilisez la dimension de E pour en déduire que le degré de χ_f est impair, et donc montrer l'existence d'une racine réelle de χ_f grâce à ses limites en $\pm\infty$ et au théorème des valeurs intermédiaires ; par unicité de la valeur propre démontrée en (∗), on en déduit que ce doit être α ; il peut y avoir d'autres pistes.

(3) Pour montrer que la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{\ell}(\vec{x}))$ est libre, vous écrivez une relation de dépendance linéaire :
$$a_0 \vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + \cdots + a_{\ell} f^{\ell}(\vec{x}) = \vec{0},$$
et vous appliquez f à cette égalité autant de fois qu'il y a d'inconnues a_i (voir les conseils de la section 1 de *Méthodes*, chapitre d'algèbre linéaire), en vous souvenant de l'hypothèse $Q(f)(\vec{x}) = \vec{0}$ (vraie car $\vec{x} \in \ker(Q(f))$) pour simplifier les puissances de f qui excéderaient f^{ℓ}. Vous aurez alors un système linéaire avec autant d'équations que d'inconnues, et que vous pourrez résoudre avec la méthode du pivot de Gauß.

Cas particulier plus simple : $\ell = 1$ et Q irréductible. Si $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille de $\ker(Q(f))$ avec Q irréductible, elle est automatiquement libre ! En effet, dans le cas contraire $\vec{x}$ serait un vecteur propre de f, et l'égalité $Q(f)(\vec{x}) = \vec{0}$ impliquerait que la valeur propre associée serait une racine de Q : impossible si le polynôme est irréductible.

(4) Lorsqu'on écrit la matrice de f dans cette base, on note que la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$ est $\alpha \mathrm{I}$ (vu qu'il s'agit d'un sous-espace propre), tandis que la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\ker(Q(f))$ débute par une « sous-diagonale » de 1. Cela provient du fait que sa matrice s'obtient en calculant l'image par f des vecteurs de $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{\ell}(\vec{x}))$, sachant que $f\left(f^k(\vec{x})\right) = f^{k+1}(\vec{x})$ (le vecteur suivant de la famille). Pour exprimer la dernière image (à savoir $f^{\ell+1}(\vec{x})$) en fonction des autres vecteurs $f^k(\vec{x})$, vous aurez éventuellement besoin d'isoler $f^{\ell+1}(\vec{x})$ dans l'égalité $Q(f)(\vec{x}) = \vec{0}$ (vraie car $\vec{x} \in \ker(Q(f))$).

Réduire f grâce à la décomposition $E = \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(Q(f))$.

(1) Montrer l'existence et unicité de la valeur propre α.

(2) Montrer : $E \neq \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$, et en déduire $\ker(Q(f)) \neq \{\vec{0}\}$ grâce à la somme directe.

(3) Produire une base cyclique de $\ker(Q(f))$ à l'aide d'un vecteur non nul.

(4) Écrire la matrice dans une base adaptée à la somme directe. On obtient des blocs compagnons.

Pour l'existence de la valeur propre α : théorème des valeurs intermédiaires ou raisonnement par l'absurde. Pour l'unicité : regarder les racines du polynôme annulateur P.

Exemple 1. Soit f un endomorphisme de E tel que : $f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$. Par le lemme des noyaux : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$. En trouvant une *jolie* base adaptée à cette décomposition, nous pourrons réduire f. Pour cela nous supposons de plus, ici, que E **est un espace vectoriel réel de dimension** 3, et que $f \neq 2\mathrm{Id}_E$.

Tout d'abord, notons que 2 est valeur propre de f (autrement dit : $f - 2\mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible). Raisonnons par l'absurde en supposant que ce n'est pas le cas. La relation supposée vérifiée par f peut se réécrire : $(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f^2 + \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathrm{L}(E)}$. Si 2 n'est pas valable propre, alors $f - 2\mathrm{Id}_E$ est inversible et composer l'égalité précédente par son inverse à gauche donne : $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ (†). Mais c'est impossible : cette égalité impliquerait $\det(f^2) = \det(-\mathrm{Id}_E) = (-1)^3 = -1$ (ici intervient l'hypothèse $\dim(E) = 3$), alors que $\det(f^2) = \det(f)^2 \geqslant 0$ car $\det(f) \in \mathbb{R}$ (ici intervient l'hypothèse que E est un espace vectoriel *réel*). Contradiction. Par l'absurde, on a démontré que 2 est valeur propre de f (et $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$) (1).

On en déduit en particulier : $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (3). Mais du fait que $f \neq 2\mathrm{Id}_E$ par hypothèse, on a aussi : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \neq E$, et donc : $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \neq \{\vec{0}\}$, sinon la somme directe : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$ donnerait une contradiction. Ainsi il existe des vecteurs non nuls dans $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$ (2) : soit $\vec{x}$ l'un d'entre eux.

Montrons que $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$ (3). Tout d'abord, comme f laisse stable ce noyau, la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, dont nous allons à présent justifier la liberté : dans le cas contraire, $\vec{x}$ serait un vecteur propre de f, associé à 2 puisque c'est l'unique racine réelle du polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + X - 2 = (X - 2)(X^2 + 1)$. Mais dans ce cas on aurait : $\vec{x} \in \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \cap \ker\left(f - 2\mathrm{Id}_E\right) = \{\vec{0}\}$: c'est absurde puisque $\vec{x} \neq \vec{0}$. D'où la liberté de la famille (3).

On peut en déduire la dimension de $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$, puis que $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est en fait une **base** de ce noyau. D'après ce qui précède, $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$ de cardinal 2, et comme la dimension excède le cardinal des familles libres on en déduit : $\dim\left(\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \geqslant 2$. En combinant tout ce que l'on sait :

$$3 = 1 + 2 \leqslant \dim(\ker(f)) + \dim\left(\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) = \dim(E) = 3,$$

ce qui n'est possible que si l'on a les égalités :

$$\dim(\ker(f)) = 1, \text{ et : } \dim\left(\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) = 2. \quad (3)$$

En particulier, $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$ de cardinal égal à la dimension de l'espace, donc c'en est une **base** (3).

Soit $\vec{y}$ un vecteur qui engendre $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ (il en existe un vu que $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1). Du fait que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$, concaténer une base de ces deux noyaux donne une base de E. Par conséquent, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{y}, \vec{x}, f(\vec{x}))$ est une base de E (4). Écrivons la matrice de f dans cette base : on a $f(\vec{e}_1) = f(\vec{y}) = 2\vec{y}$ car $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $f(\vec{e}_2) = f(\vec{x}) = \vec{e}_3$, et enfin $f(\vec{e}_3) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

On a réduit f.

Exercice 4. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. On suppose : $f^3 + 2f^2 = 0_{\mathrm{L}(E)}$, et : $f^2 \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Par le lemme des noyaux on a : $E = \ker\left(f + 2\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f^2\right)$.

1. Montrer que -2 est valeur propre de f.
2. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2) \setminus \ker(f)$, alors $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker\left(f^2\right)$.

3. On suppose de plus que $\ker(f) \neq \ker(f^2)$. Montrer que la matrice de f dans une base convenable est de la forme :
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. On suppose : $f^3+f^2+f = -\mathrm{Id}_E$. Par le lemme des noyaux on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$.

1. Montrer que -1 est valeur propre de f (*s'inspirer de l'exemple ci-dessus peut fonctionner*).
2. Montrer que si $\vec{x} \in \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \setminus \{\vec{0}\}$, alors $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$.
3. On suppose de plus que $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Montrer que la matrice de f dans une base convenable est de la forme :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Se demander pourquoi $\ker(Q(f))$ est toujours un espace cyclique dans les cas particuliers de cette section. Peut-on généraliser ?

Table des matières