# Méthodes (MP) – Réduction des endomorphismes

**Application des polynômes de Lagrange en algèbre linéaire**

Il NE s'agit PAS d'expliquer, dans cette section, l'application des polynômes d'interpolation de Lagrange :
- aux problèmes sur les polynômes (pour cela, voir le document *Méthodes* sur les polynômes) ;
- à l'étude de la matrice de Vandermonde.

On illustre ici des applications à l'étude des matrices et endomorphismes.

## 1 Pour accélérer le calcul de puissances matricielles

Nous avons donné deux moyens de calculer des puissances entières de matrices dans la section 4 : en réduisant (diagonalisation ou triangulation), ou en faisant la division euclidienne de $X^n$ par un polynôme annulateur. Nous proposons une troisième approche permettant de calculer des puissances matricielles d'une matrice $A$ à partir de ses valeurs propres, dans le cas où $A$ est **diagonalisable**. Elle a l'avantage :
- de nous affranchir d'expliciter une base de vecteurs propres (et donc de calculer la matrice de passage $P$ et son inverse, *a priori* indispensables pour calculer $A = PDP^{-1}$), ce qui est certes une qualité partagée par la méthode de la division euclidienne ;
- de calculer également des puissances négatives quand $A$ est inversible (ce que ne permet pas la méthode de la division euclidienne), ce qui est certes une qualité partagée par la diagonalisation ;
- de calculer y compris des « puissances non entières », ce que ne permet aucune des deux méthodes classiques : voir la section 2 pour voir ce qu'on entend par là. → page 4

Pour ce faire : si $P$ est une matrice inversible et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(K)$ est une matrice diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$. En fait, plus généralement, on a l'égalité suivante, **qui est la clé de cette section, et donc à comprendre** :

$$\forall Q \in K[X],\ Q(A) = PQ(D)P^{-1} = P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q(\lambda_p) \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{‡}$$

En effet, pour tout polynôme $Q \in K[X]$, que l'on écrit : $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a :

$$\begin{aligned} Q(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = \sum_{k=0}^{n} a_k PD^kP^{-1} &= P\left(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\right)P^{-1} && \text{(on obtient là } PQ(D)P^{-1}\text{)} \\ &= P\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_1^k & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_p^k \end{pmatrix}P^{-1} && \text{(somme coefficient par coefficient)} \\ &= P\begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q(\lambda_p) \end{pmatrix}P^{-1}. \end{aligned}$$

Un argument plus économe pour justifier (‡) est de dire : les applications $Q \mapsto Q(A)$ et $Q \mapsto PQ(D)P^{-1}$ sont linéaires sur $K[X]$ et coïncident sur la famille génératrice $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $K[X]$ (vu qu'on a $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), donc elles sont égales partout.

L'idée est alors d'utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange pour construire *explicitement* un polynôme $Q \in K_{p-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $Q(\lambda_i) = \lambda_i^n$. Ainsi, par (‡) :

$$Q(A) = P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q(\lambda_p) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_p^n \end{pmatrix} P^{-1} = PD^nP^{-1} = A^n.$$

En calculant $Q(A)$ (qui ne fait intervenir que $A^k$ pour $k \leqslant p-1$, puisque $Q \in K_{p-1}[X]$), on obtient $A^n$ pour TOUT entier $n$, et sans avoir calculé $P$ et $P^{-1}$ (puisque ces deux matrices n'apparaissent pas dans la construction de $Q$ : seules les valeurs propres $\lambda_i$ interviennent).

Comme on l'a annoncé plus haut, l'avantage de procéder ainsi est qu'**il n'est plus nécessaire d'expliciter la matrice de passage $P$ ou son inverse** $P^{-1}$ : c'est un gain précieux du point de vue calculatoire, en particulier lorsqu'on a démontré qu'une matrice est diagonalisable par des moyens détournés (par exemple : en constatant que le polynôme caractéristique est scindé et à racines simples).

Aussi, cette méthode se généralise à plein d'autres situations : tout ce dont on a besoin, c'est de deux matrices (ci-dessus : $A$ et $A^n$) qui se réduisent en des matrices diagonales (dans leur cas : $D$ et $D^n$) avec la même matrice de passage. En fait, plus généralement, si des matrices $A$ et $B$ s'écrivent : $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$, avec $D$ et $D'$ diagonale, alors on construit un polynôme interpolateur $Q$ envoyant les coefficients diagonaux de $D$ sur ceux de $D'$ (avec une subtilité si des coefficients diagonaux de $D$ se répètent : s'ils ne sont pas envoyés sur des coefficients diagonaux égaux de $D'$, le polynôme $Q$ ne peut pas exister), de sorte que : $Q(D) = D'$, puis, en imitant le raisonnement plus haut : $Q(A) = B$.

C'est parce que cette méthode est peu exigeante qu'elle s'applique aussi, pour ce qu'on illustre ici, aux puissances négatives (exemple 2) voire non entières (section 2). On pourrait aussi calculer ainsi des exponentielles de matrices, etc. → page 4

**Exemple 1.** On cherche à calculer les puissances entières de : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Après calcul : $\chi_A = (X-4)(X-2)$. Le polynôme caractéristique est scindé et à racines simples, donc $A$ est diagonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, que l'on écrit : $Q = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a :

$$Q(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = \sum_{k=0}^{d} a_k P \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} P^{-1} = P \left( \sum_{k=0}^{d} a_k \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \right) P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k 2^k & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{d} a_k 4^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a montré : $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(A) = P \begin{pmatrix} Q(2) & 0 \\ 0 & Q(4) \end{pmatrix} P^{-1}$ (nous n'avons fait que redémontrer dans ce cas particulier l'identité (‡)).

Voyons comment nous allons en déduire $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ grâce à l'interpolation de Lagrange, *sans calculer $P$ ni $P^{-1}$* : soit $(L_0, L_1)$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée aux réels 2 et 4, et trouvons le polynôme $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ vérifiant : $Q(2) = 2^n$, $Q(4) = 4^n$. On sait qu'il est défini par :

$$Q = Q(2)L_0 + Q(4)L_1 = 2^n \frac{X-4}{2-4} + 4^n \frac{X-2}{4-2} = \frac{1}{2} \left( (4^n - 2^n)\, X + \left( 2^{n+2} - 2 \cdot 4^n \right) \right).$$

On a alors, étant donné que $Q(2) = 2^n$ et $Q(4) = 4^n$ :

$$Q(A) = P \begin{pmatrix} Q(2) & 0 \\ 0 & Q(4) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} = A^n,$$

c'est-à-dire :

$$A^n = Q(A) = \frac{1}{2} \left( (4^n - 2^n)\, A + \left( 2^{n+2} - 2 \cdot 4^n \right) \mathrm{I}_2 \right).$$

Toutes les quantités du membre de droite étant connues, on en déduit $A^n$ :

$$A^n = \frac{1}{2}\left((4^n - 2^n)\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} + \left(2^{n+2} - 2\cdot 4^n\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4^n + 2^n & 4^n - 2^n\\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n\end{pmatrix} = 2^{n-1}\begin{pmatrix}2^n + 1 & 2^n - 1\\ 2^n - 1 & 2^n + 1\end{pmatrix}.$$

*Nous n'avons pas eu besoin d'expliciter $P$ ni $P^{-1}$.*

**Exercice 1.** Soit $A \in \mathrm{M}_p(K)$ une matrice diagonalisable, ayant seulement deux valeurs propres distinctes $a$ et $b$. En s'inspirant de cet exemple, montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{a-b}\left((a^n - b^n)A + (a\cdot b^n - b\cdot a^n)\mathrm{I}_p\right)$, et que cette égalité vaut aussi pour $n \in \mathbb{Z}$ si $A$ est inversible.

**Exemple 2.** Soit $A = \begin{pmatrix}-19 & -16 & 48\\ 8 & 5 & -24\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$. On a : $\det(A) = -45 \neq 0$, donc $A$ est inversible. Utilisons les polynômes interpolateurs de Lagrange pour calculer $A^{-100}$. Nous vous laissons vérifier qu'on a : $\chi_A = (X+5)(X+3)^2$, et de plus : $A + 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}-16 & -16 & 48\\ 8 & 8 & -24\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-16 & 0 & 0\\ 8 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ est de rang 1, donc par le théorème du rang : $\dim(\ker(A + 3\mathrm{I}_3)) = 2$. Les ordres de multiplicité des valeurs propres coïncident avec les dimensions des sous-espaces propres, donc $A$ est diagonalisable d'après le critère de diagonalisation : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}P^{-1}$. Par le même raisonnement que dans l'exemple précédent, on a :

$$A^{-100} = \begin{pmatrix}(-3)^{-100} & 0 & 0\\ 0 & (-3)^{-100} & 0\\ 0 & 0 & (-5)^{-100}\end{pmatrix}, \quad \text{et : } \forall Q \in \mathbb{R}[X],\ Q(A) = P\begin{pmatrix}Q(-3) & 0 & 0\\ 0 & Q(-3) & 0\\ 0 & 0 & Q(-5)\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Soit $(L_0, L_1)$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée aux réels $-3$ et $-5$, et soit $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ le polynôme interpolateur tel que : $Q(-3) = (-3)^{-100} = 3^{-100}$, et : $Q(-5) = (-5)^{-100} = 5^{-100}$. On a :

$$Q = Q(-3)L_0 + Q(-5)L_1 = 3^{-100}\frac{X+5}{-3+5} + 5^{-100}\frac{X+3}{-5+3} = \frac{1}{2}\left(\left(3^{-100} - 5^{-100}\right)X + \left(5\cdot 3^{-100} - 3\cdot 5^{-100}\right)\right).$$

On a alors, étant donné que $Q(-3) = (-3)^{-100}$ et $Q(-5) = (-5)^{-100}$ :

$$Q(A) = P\begin{pmatrix}Q(-3) & 0 & 0\\ 0 & Q(-3) & 0\\ 0 & 0 & Q(-5)\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}(-3)^{-100} & 0 & 0\\ 0 & (-3)^{-100} & 0\\ 0 & 0 & (-5)^{-100}\end{pmatrix} = A^{-100},$$

c'est-à-dire :

$$A^{-100} = Q(A) = \frac{1}{2}\left(\left(3^{-100} - 5^{-100}\right)A + \left(5\cdot 3^{-100} - 3\cdot 5^{-100}\right)\mathrm{I}_3\right).$$

Après simplifications :

$$A^{-100} = \begin{pmatrix}-7\cdot 3^{-100} + 8\cdot 5^{-100} & -8\cdot 3^{-100} + 8\cdot 5^{-100} & 24\cdot 3^{-100} - 24\cdot 5^{-100}\\ 4\cdot 3^{-100} - 4\cdot 5^{-100} & 5\cdot 3^{-100} - 4\cdot 5^{-100} & -12\cdot 3^{-100} + 12\cdot 5^{-100}\\ -3^{-100} + 5^{-100} & -3^{-100} + 5^{-100} & 4\cdot 3^{-100} - 3\cdot 5^{-100}\end{pmatrix}.$$

*Nous n'avons pas eu besoin d'expliciter $P$ ni $P^{-1}$.* Notez qu'avec les matrices, même une puissance négative peut s'écrire comme un polynôme.

On voit cependant que même s'il est avantageux de ne pas avoir à calculer $P$ et $P^{-1}$, on ne peut pas être gagnant sur tous les fronts : si le polynôme interpolateur est de degré $n$, alors il faut calculer $A^k$ pour tout $k \leqslant n$, ce qui est coûteux si $n$ est grand. On ne peut pas tout avoir. On rencontre essentiellement les mêmes avantages et défauts que la méthode de la division euclidienne exposée dans la section *Calcul des puissances d'une matrice, avec une division euclidienne par un polynôme annulateur* (avec cependant un avantage en plus pour les polynômes interpolateurs : l'autre méthode se cantonne aux puissances positives).

## 2 Dans la résolution d'équations matricielles (autre approche)

Cette section propose une autre approche (qui a le désavantage de s'appliquer à moins de situations : le cas non diagonalisable devient hors de portée) pour résoudre partiellement les équations matricielles abordées dans la section *Applications de la réduction, dans la résolution d'équations matricielles*, de la forme $P(M) = A$ avec $P \in K[X]$, mais qui sont plus souvent de la forme $M^k = A$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_n(K)$, avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Les polynômes interpolateurs permettent, dans ce cadre, d'expliciter des matrices $M$ qui vérifient $M^k = A$, dans le cas où $A$ est diagonalisable (sans assurer cependant qu'on obtient ainsi *toutes* les solutions).

Rien ne change par rapport à la section précédente : si $A$ est diagonalisable, réduite sous la forme : $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ (où la matrice de passage $P$ n'a pas besoin d'être explicitée), alors une racine $k^{\text{e}}$ évidente est : $M = P \begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt[k]{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$, comme vous pouvez le vérifier (si les racines $k^{\text{es}}$ n'ont pas de sens, on remplace les $\sqrt[k]{\lambda_i}$ par des nombres complexes $\omega_i$ vérifiant $\omega_i^k = \lambda_i$). Pour calculer $M$ sans expliciter $P$ et $P^{-1}$, on construit un polynôme interpolateur $Q$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \sqrt[k]{\lambda_i}$. En imitant le raisonnement qui démontre (‡) (mais que l'on devrait reproduire en détails à chaque fois), on a donc :

$$Q(A) = P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt[k]{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = M.$$

Ainsi $M = Q(A)$ est une solution de l'équation $M^k = A$. Varier les choix de racines $k^{\text{es}}$ permet d'obtenir d'autres solutions (sans toutefois nous assurer qu'il n'y en a pas d'autres, à moins d'hypothèses supplémentaires). Nous illustrons cette résolution incomplète sur un exemple concret plus bas.

En fait, on pourrait même résoudre entièrement l'équation $M^k = A$ par ce moyen-là, mais la stratégie devient bien plus subtile, et pas plus rentable que la méthode de la section 6.1.4. Nous n'en parlerons pas.

**Exemple 3.** Trouvons *une* matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^3 = A$, avec : $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Après calcul : $\chi_A = (X-1)(X-8)$. Le polynôme caractéristique est scindé et à racines simples, donc $A$ est diagonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$. Une matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant clairement $M^3 = A$ est alors : $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On l'explicite sans déterminer $P$ ni $P^{-1}$ grâce aux polynômes interpolateurs : soit $(L_0, L_1)$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée aux réels 1 et 8, et trouvons le polynôme $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ vérifiant : $Q(1) = 1$, $Q(8) = 2$. On sait qu'il est défini par :

$$Q = Q(1)L_0 + Q(8)L_1 = \frac{X-8}{1-8} + 2\frac{X-1}{8-1} = \frac{1}{7}(X+6).$$

On a alors, étant donné que $Q(1) = 1$ et $Q(8) = 2$ (on imite le raisonnement utilisé plusieurs fois dans cette section) :

$$Q(A) = P \begin{pmatrix} Q(1) & 0 \\ 0 & Q(8) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = M,$$

c'est-à-dire : $M = \frac{1}{7}(A + 6\mathrm{I}_2) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$. On a explicité une solution de $M^3 = A$, *sans expliciter $P$ ni $P^{-1}$*. Notez qu'avec les matrices, même une racine cubique peut s'écrire comme un polynôme.

# 3 Pour montrer que des matrices commutent par un argument polynomial

C'est, dans cette section, **l'apport le plus utile des polynômes interpolateurs**, et le seul qui leur soit exclusif (en effet, les problèmes des deux sections précédentes peuvent très bien s'étudier par d'autres méthodes). Ils apparaissent pour démontrer des relations de commutation dans des cas non triviaux (en particulier abstraits ; parce que, si les matrices sont explicites, il suffit de calculer leur produit explicitement dans les deux sens possibles, pour vérifier la commutation). C'est utile en particulier pour utiliser la formule du binôme de Newton, ou produire des sous-espaces stables.

En effet, dans un contexte théorique, ou quand des matrices ne sont pas explicites, notre principal moyen de démontrer que des matrices commutent est de démontrer que l'une est un polynôme de l'autre, parce que deux polynômes d'une même matrice commutent toujours : c'est par exemple ce que l'on fait lorsqu'on résout des équations matricielles de la forme $P(M) = A$ (voir la section *Applications de la réduction, dans la résolution d'équations matricielles*). En fait, on a même un peu mieux, mais il faut savoir le démontrer (exercice suivant) : si deux matrices $A$ et $B$ commutent, alors tout polynôme en $A$ commute avec tout polynôme en $B$.

**Exercice 2.** Soient $A$ et $B$ deux matrices d'ordre $n$ telles que : $AB = BA$.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k B = BA^k$, et en déduire : $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $A^k B^\ell = B^\ell A^k$.
2. En déduire : $\forall (P, Q) \in (K[X])^2$, $P(A)Q(B) = Q(B)P(A)$.

En particulier, si $A$ et $B$ commutent, alors tout polynôme en $A$ commute avec $B$. Mais ce n'est pas évident de *toute* matrice que l'on définirait à l'aide de $A$. Par exemple : si $M$ est une matrice telle que $M^2 = A$, est-il vrai que $M$ et $B$ commutent ? Certes, on sait montrer que $M$ et $A$ commutent (parce que : $AM = M^2M = M^3 = MM^2 = MA$ ; on utilise le fait que $A$ soit un polynôme en $M$), et par hypothèse $A$ et $B$ commutent, mais cela ne prouve pas qu'il en est de même de $M$ et $B$ (la commutativité n'est pas transitive, comme le montre l'exercice suivant avec un contre-exemple très simple).

**Exercice 3.** Soient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = BA$ et $BC = CB$, mais que $AC \neq CA$.

Et pourtant, il reste vrai que si $M^2 = A$, alors $M$ et $B$ commutent. Mais comment faire ? Comme d'habitude : on montre que $M$ est un polynôme en $A$ ! (Chose assez amusante, dans la mesure où réciproquement, $A$ est déjà un polynôme en $M$.) Si l'on y parvient, on invoque le résultat ci-dessus pour en déduire que $M$ commute avec $B$.

La difficulté est donc de montrer que $M$ est un polynôme en $A$. Vous n'y parviendrez pas toujours. Le cas le plus favorable est celui où $A \in \mathrm{M}_n(K)$ est diagonalisable avec $n$ valeurs propres distinctes, et si vous avez réussi à montrer que $M$ est diagonalisable avec la même matrice de passage (voir la section 6.1.4). C'est-à-dire : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $D$, $D'$ diagonales telles que : $A = PDP^{-1}$, $M = PD'P^{-1}$. Notons $\lambda_i$ les coefficients diagonaux de $D$, et $\omega_i$ ceux de $D'$. On introduit alors un polynôme interpolateur $Q \in K[X]$ vérifiant : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \omega_i$, et en imitant le raisonnement au début des sections 1 et 2 on montre (faites-le vraiment) qu'on a : $D' = Q(D)$, puis : $M = PD'P^{-1} = PQ(D)P^{-1} = Q(PDP^{-1}) = Q(A)$. C'est ce qu'on voulait démontrer, et on peut enfin conclure que $M$ commute avec $B$ en tant que polynôme en $A$ (qui commute avec $B$ par hypothèse).

**Cela marche très souvent : « presque » toute matrice définie à l'aide de $A$, est en fait un polynôme en $A$.** Mon affirmation est trop floue pour avoir un sens et pouvoir être démontrée, mais les cas rencontrés se traitent comme celui ci-dessus.

**Exercice 4.** Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ deux matrices avec $n$ valeurs propres distinctes (pas nécessairement les mêmes pour $A$ et $B$), $k, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $M, N \in \mathrm{M}_n(K)$ des matrices telles que : $M^k = A$, $N^\ell = B$. En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, montrer que $M$ et $N$ sont des polynômes en $A$ et $B$ respectivement, et en déduire que $M$ et $N$ commutent.

Ceci montre : si $A$ et $B$ commutent, alors toute racine $k^{\text{e}}$ de $A$ commute avec toute racine $\ell^{\text{e}}$ de $B$. C'était loin d'être évident.

# 4 Pour réduire des endomorphismes sans raisonner matriciellement

La raison profonde pour laquelle les polynômes interpolateurs de Lagrange interviennent si souvent, dans les calculs impliquant des matrices diagonalisables (voir sections précédentes), est qu'ils permettent de décrire les projections sur les sous-espaces propres des endomorphismes diagonalisables.

En effet, le point de départ est la relation : $\forall P \in K_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} P(\lambda_k) L_k$, où les $L_k$ sont les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $n+1$ scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ (en général ce sont les valeurs propres de l'endomorphisme étudié). En prenant $P = 1$ et $P = X$, on obtient alors : $1 = \sum_{k=0}^{n} L_k$, et : $X = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$. Le lien avec l'algèbre linéaire se fait lorsqu'on évalue ces deux identités en un **endomorphisme** $f$. On obtient :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{k=0}^{n} L_k(f), \quad f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(f).$$

La première identité, évaluée en un vecteur $\vec{x} \in E$, permet d'écrire tout vecteur de l'espace à l'aide des polynômes interpolateurs : $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k(f)(\vec{x})$, et : $f(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(f)(\vec{x})$.

$$\forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} = \sum_{k=0}^{n} L_k(f)(\vec{x}), \quad f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(f)(\vec{x}).$$

Pour aller au-delà, il faut en savoir plus sur $f$ (diagonalisabilité) pour en déduire que les $L_k(f)$ sont des projecteurs, dont les caractéristiques géométriques se décrivent à l'aide des sous-espaces propres.

Écrire un endomorphisme comme une combinaison linéaire de projecteurs, c'est une façon géométrique de le diagonaliser, une base de diagonalisation s'obtenant à l'aide de bases des images desdits projecteurs. Ayez-le en tête afin de savoir reconnaître cette situation en exercice.

# Table des matières