# Méthodes (MP) – Réduction des endomorphismes

## ✓ Diagonalisation d'un endomorphisme abstrait

Cela peut être plus compliqué, *sauf dans le cas où il s'agit d'un endomorphisme remarquable, qu'on sait être toujours diagonalisable (endomorphisme symétrique, projecteur, symétrie...)*. Sinon :

1. Il est défini explicitement par sa correspondance, mais sur un espace vectoriel abstrait : cas d'un endomorphisme défini sur un espace de polynômes, de fonctions, de matrices, etc.
2. Il est défini en fonction d'un *autre* endomorphisme dont nous savons qu'il est diagonalisable (ou autre condition relative à la réduction).
3. Il n'est pas défini explicitement, mais vérifie une identité du type $f^3 = \mathrm{Id}_E$, $f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E = 0$, etc.
4. Il appartient à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.
5. Il n'est pas défini explicitement, mais vérifie des conditions précises sur le rang, la trace, etc.

Ces différents cas de figure se recoupent très souvent. Ne pas faire une lecture cloisonnée des différents sous-cas détaillés ci-dessous.

**Endomorphisme défini explicitement.** À moins que sa matrice dans une certaine base ne soit facile à écrire (ce qui est rarement le cas dans $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n$ quelconque), il n'y a pas souvent le choix : on revient à la définition, en cherchant pour quelles valeurs $\lambda$ l'équation $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ admet au moins une solution $\vec{x}$ NON NULLE.

*Étudiez plus en détails les cas particuliers des sections 3 et 4.* → page 3

**Endomorphisme défini à l'aide d'un autre endomorphisme.** Le critère polynomial de diagonalisation sert aussi (surtout ?) lorsque la diagonalisation d'un endomorphisme $f$ dépend de celle d'un autre endomorphisme $g$ (de même si on remplace l'endomorphisme par une matrice). Si, pour tout polynôme $P$, il existe une relation simple entre $P(f)$ et $P(g)$, alors il est raisonnable d'espérer montrer que l'existence d'un polynôme annulateur scindé et à racines simples de $g$ donne un polynôme annulateur de $f$ également.

Pour trouver une telle relation, on commence par comparer $f^k$ et $g^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et on étend la relation à tout polynôme par linéarité (en cas de facteur $k$ devant $g^k$, penser à reconnaître une dérivée).

C'est notamment le cas lorsque :

— l'on étudie un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont la correspondance fait intervenir une matrice *fixée* de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (voir exemple ci-dessous) ;

— l'on réduit des matrices diagonales par blocs : voir la section 5.1. → page 6

**Exemple 1.** Si l'on étudie l'endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\varphi_M : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & AM \end{cases},$$

où $M$ est une matrice fixée, il est délicat d'espérer étudier la matrice de $\varphi_M$ relativement à la base canonique, ou de déterminer ses sous-espaces propres explicitement, vu qu'on ne connaît pas $M$ (encore que...). En revanche, si l'on remarque que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(\varphi_M) = \varphi_{P(M)}$, alors il devient facile de montrer que $M$ vérifie le critère polynomial de diagonalisation si et seulement si $\varphi_M$ le vérifie aussi (avec les mêmes polynômes annulateurs).

**Exercice 1.**

1. Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a bien : $P(\varphi_M)(A) = \varphi_{P(M)}(A)$.
2. En déduire que $\varphi_M$ est diagonalisable si et seulement si $M$ l'est.

**Endomorphisme vérifiant une identité polynomiale.** Dans ce cas, penser à interpréter l'identité en termes de polynôme annulateur. Par exemple, dire que $f^3 = \mathrm{Id}_E$ équivaut au fait que $X^3 - 1$ soit un polynôme annulateur de $f$. On doit dans ce cas avoir le critère polynomial de diagonalisation en tête.

L'autre propriété des polynômes annulateurs, relativement à la diagonalisation, est très utile pour déterminer le spectre : les valeurs propres d'un endomorphisme sont *parmi* les racines d'un polynôme annulateur.

**Appartenance à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.** Si ce groupe est FINI de cardinal $p$, alors : $f^p = \mathrm{Id}_E$, donc $X^p - 1$ est un polynôme annulateur de $f$. On connaît les racines de ce polynôme, qui sont les racines $p^{\text{es}}$ de l'unité.

Conséquence heureuse : **toute matrice d'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable**, et **ses valeurs propres sont des racines de l'unité** ! En effet, $X^p - 1$ est scindé et à racines simples sur $\mathbb{C}$.

**Conditions sur le rang, la trace, etc.** Le théorème du rang nous permet de déduire la dimension d'un sous-espace propre : si $\mathrm{rang}(f - \lambda\mathrm{Id}_E) = k$, alors $\dim(\ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - k$. Si cette dimension est suffisamment élevée, alors cela assure qu'il reste peu de valeurs propres (vu que les sous-espaces propres sont en somme directe, la somme de leurs dimensions ne peut pas excéder la dimension de l'espace ambiant). Il reste à voir en quoi les autres informations permettent d'en déduire les valeurs propres restantes, et si possible la dimension de leurs sous-espaces propres associés ; on n'oublie pas que la trace est la somme des valeurs propres, que les valeurs propres sont parmi les racines des polynômes annulateurs, etc.

**Étude de $f$ abstrait : quel critère de diagonalisation privilégier ?**

1. **Critère avec les sous-espaces propres.** Y songer lorsque $f$ :
   — est explicite (même s'il est défini sur un espace abstrait) ;
   — vérifie par hypothèse des conditions sur le rang ou le noyau ;
2. **Critère polynomial.** Y songer lorsque $f$ :
   — appartient à un sous-groupe fini $G$ de $\mathrm{GL}(E)$ (le théorème de Lagrange donne $X^{\mathrm{card}(G)} - 1$ pour polynôme annulateur) ;
   — dépend d'un *autre* endomorphisme $g$ qui est diagonalisable (exprimer les puissances de $f$ en fonction de celles de $g$, puis $P(f)$ en fonction de $P(g)$ par linéarité).

Il n'y a cependant pas de règle systématique et les deux approches peuvent être combinées.

# 1 Le cas particulier par excellence : endomorphisme n'ayant qu'une seule valeur propre

Un endomorphisme diagonalisable n'ayant qu'une seule valeur propre est une homothétie. Sachez le démontrer :
— en appliquant directement la définition d'endomorphisme (ou matrice) diagonalisable ;
— en utilisant le critère de diagonalisation ;
— en utilisant le critère polynomial de diagonalisation.

**Exercice 2.** Utiliser ce résultat pour démontrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X-1) \end{cases}$ n'est pas diagonalisable.

# 2 Cas particulier fréquent : endomorphismes de rang 1

Les endomorphismes de rang 1 sont diagonalisables si et seulement si leur trace est non nulle : c'est un exercice classique. Sachez le faire à l'aide des deux critères de diagonalisation. Dans le cas où l'on se sert du critère polynomial, il est nécessaire de savoir démontrer que si $A$ est une matrice de rang 1, alors $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$. Sachez le démontrer au choix :
— en écrivant explicitement les coefficients de $A$ (si son rang égale 1, on sait que toutes les colonnes sont proportionnelles, donc son écriture est simplifiée), et en calculant les coefficients de $A^2$ ;
— en montrant d'abord qu'il existe deux vecteurs colonnes $X$ et $Y$ tels que $A = XY^\top$, et en calculant $A^2$ avec cette expression ;
— en montrant que $A$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ (passer par l'endomorphisme canoniquement associé $f$, et écrire sa matrice dans une base adaptée à $\ker(f)$), et en vérifiant la relation voulue avec cette matrice.

Savoir faire cet exercice est très bien... Mais savoir y penser dans les cas explicites est encore mieux. Dès que vous voyez un endomorphisme explicite, **où il est manifeste que son image est toujours proportionnelle au même vecteur** (exemples :

$$f_A : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(M)A \end{cases} \quad (\text{où } A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})), \quad g_{\vec{a}} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \mapsto & \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle\, \vec{a} \end{cases} \quad (\text{où } \vec{a} \in \mathbb{R}^n)),$$

alors notez qu'il est de rang 1 (sauf s'il est proportionnel au vecteur nul...), et vous savez donc *a priori* comment partir pour déterminer à quelle condition il est diagonalisable.

Hélas, la trace n'est pas toujours calculable facilement, comme on le voit dans les deux exemples ci-dessus. Mais ce n'est pas grave : en calculant l'endomorphisme au carré (composé avec lui-même, donc), la théorie ci-dessus nous assure qu'on tombe nécessairement sur un multiple de lui-même. Cela nous donne un polynôme annulateur de degré 2, et donc les valeurs propres de l'endomorphisme, voire une réponse directe à la question de la diagonalisation (s'il est scindé et à racines simples).

**Déterminer si un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable**

1. Calculer $f(f(\vec{x}))$ pour tout $\vec{x} \in E$ ; vous en déduirez $f^2 = \bigstar \cdot f$.
2. On en déduit que $X^2 - \bigstar X = X(X - \bigstar)$ est un polynôme annulateur de $f$.
   (a) Si $\bigstar \neq 0$, alors il est scindé et à racines simples, donc $f$ est diagonalisable.
   (b) Si $\bigstar = 0$, alors 0 est l'unique valeur propre, donc $f$ n'est pas diagonalisable sauf si $f = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (argument classique).

**Exemple 2.** Reprenons l'endomorphisme $f_A$ ci-dessus. On a :

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_A(f_A(M)) = f_A(\mathrm{tr}(M)A) = \mathrm{tr}(M) f_A(A) = \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)A = \mathrm{tr}(A) f_A(M), \quad (1)$$

donc : $f_A^2 = \mathrm{tr}(A) f_A$, et on en déduit que $X^2 - \mathrm{tr}(A)X = X(X - \mathrm{tr}(A))$ est un polynôme annulateur de $f_A$ (2). Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors $f_A$ est annulé par un polynôme scindé et à racines simples, donc est diagonalisable (2.(a)). Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors $X^2 - \mathrm{tr}(A)X = X^2$ admet uniquement 0 comme racine, donc $f_A$ admet 0 comme unique valeur propre ; dans ce cas, si $f_A$ est diagonalisable, alors on doit avoir $f_A = 0_{\mathrm{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))}$ (pourquoi ?), ce qui n'est possible que pour $A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$ (2.(b)).

Dans un exercice avec un endomorphisme défini sur un espace abstrait, commencez par vérifier s'il est clairement de rang 1 ou non. Cela prend une poignée de secondes.

**Exercice 3.** Étudier la diagonalisation de l'endomorphisme $g_{\vec{a}}$ défini ci-dessus.

## 3 Cas particulier fréquent dans $K[X]$ et les espaces de fonctions : la dérivation

Lorsque l'espace vectoriel étudié est $K[X]$, $K_n[X]$ ou un espace de fonctions, on vous demande souvent de déterminer les éléments propres d'un polynôme en l'endomorphisme de dérivation. Par exemple :

$$f : \begin{cases} K[X] & \to & K[X] \\ P & \mapsto & P'' - XP \end{cases}, \quad g : \begin{cases} K[X] & \to & K[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{cases}, \text{etc.}$$

Dans ce cas, voici comment procéder en général :

1. On prend $\lambda \in K$, et on évalue l'équation $f(P) = \lambda P$ en tout réel $x$ : elle équivaut alors à une équation différentielle linéaire, dépendant de $\lambda$. Avec les exemples $f$ et $g$ ci-dessus, cela nous ramène aux équations différentielles :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - xy(x) = \lambda y(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},\ xy'(x) = \lambda y(x).$$

2. On résout ces équations différentielles linéaires. Si l'espace vectoriel d'étude est un espace de fonctions (dérivables, de classe $C^\infty$...), l'étude s'arrête ici : s'il existe $\lambda \in K$ tel que l'équation différentielle étudiée ait des solutions non nulles, alors $\lambda$ est une valeur propre, et le sous-espace propre associé est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle.
3. Si l'espace vectoriel d'étude est un espace de polynômes, alors il s'agit encore de déterminer pour quelles valeurs de $\lambda \in K$ les solutions trouvées ci-dessus sont *polynomiales*. Chaque $\lambda$ pour laquelle c'est le cas est une valeur propre, et l'espace vectoriel constitué des polynômes solutions est le sous-espace propre associé.

# 4 Cas particulier fréquent dans les espaces abstraits : les multiples de transvections

Je fais allusion aux endomorphismes de la forme :

$$f : \begin{cases} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \alpha\vec{x} + \varphi(\vec{x})\vec{a} \end{cases},$$

où $\vec{a}$ est un vecteur non nul de $E$ *fixé*, et $\varphi$ une forme linéaire sur $E$. Pour les reconnaître, il faut guetter la forme :

$f$ : un vecteur $\mapsto$ un multiple de ce vecteur + un multiple d'un autre vecteur *fixé*.

Ainsi, les applications suivantes rentrent dans ce cas de figure (on prend $n \geqslant 1$) :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P + \left(\int_0^1 P\right) \cdot 1 \end{cases}, \quad \psi : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & nM + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n \end{cases}, \quad \phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(0) \cdot X + P \end{cases}.$$

Pour étudier si elles sont diagonalisables, nous pourrions chercher à résoudre $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, en voyant à quelle condition sur $\lambda$ il existe des solutions non nulles. On observe que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ équivaut à $(\lambda - \alpha)\vec{x} = \varphi(\vec{x})\vec{a}$, ce qui conduit à deux distinctions de cas :

— Si $\lambda = \alpha$, alors l'équation est vérifiée à la condition que $\varphi(\vec{x}) = 0$, c'est-à-dire : $\vec{x} \in \ker(\varphi)$ ; ainsi $\alpha$ est valeur propre, et le sous-espace propre associé est $\ker(\varphi)$, de dimension $\dim(E) - 1$ ;

— si $\lambda \neq \alpha$, alors $\vec{x} = \frac{\varphi(\vec{x})}{\lambda - \alpha}\vec{a}$, donc $\vec{x}$ doit être proportionnel à $\vec{a}$ pour être vecteur propre ; réciproquement, poser $\vec{x} = \vec{a}$ montre que $\vec{a}$ est vecteur propre associé à $\alpha + \varphi(\vec{a})$.

À ce stade, on est en mesure de conclure : si ces deux valeurs propres sont distinctes (c'est-à-dire : $\varphi(\vec{a}) \neq 0$), alors la somme des dimensions égale $\dim(E)$ et le critère de diagonalisation est vérifié. Si les deux valeurs propres sont égales, alors $f$ n'a qu'une valeur propre et n'est diagonalisable qu'à la condition d'être une homothétie (voir section 1), ce qui impose $\vec{a} = \vec{0}$ (impossible) ou $\varphi = 0$ (faux en général). Le problème est résolu dans tous les cas. ← page 2

Ayez bien en tête ces deux étapes : **la distinction de cas**, et **chercher une solution sous forme d'un multiple de $\vec{a}$**.

Il y a toutefois plus direct, et cette méthode vous permettra d'aller beaucoup plus vite sans vous encombrer de calculs ! En effet, nous avons deux vecteurs propres « évidents » :

($*$) Tout vecteur $\vec{x}$ du noyau de $\varphi$, puisque dans ce cas : $f(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$ ; ainsi $\alpha$ est la valeur propre « évidente » associée, et le sous-espace propre associé est (ou contient) $\ker(\varphi)$ ;

(†) Le vecteur $\vec{a}$, puisque : $f(\vec{a}) = (\alpha + \varphi(\vec{a}))\,\vec{a}$ ; ainsi $\alpha + \varphi(\vec{a})$ est la valeur propre « évidente » associée, et pour des raisons de contrainte dimensionnelle imposée par le sous-espace propre associé à $\alpha$, le sous-espace propre associé est engendré par $\vec{a}$ (la somme des dimensions ne doit pas excéder $\dim(E)$, or $\ker(\varphi)$ est de dimension $\dim(E) - 1$).

On en déduit que si $\varphi(\vec{a}) \neq 0$, alors le critère de diagonalisation est vérifié avec ces deux sous-espaces propres « évidents », et donc $f$ est diagonalisable. Si $\varphi(\vec{a}) = 0$, il faut travailler un peu plus : voir plus haut.

**Exemple 3.** Reprenons l'exemple $\psi : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & nM + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n \end{cases}$ ci-dessus. On remarque que $\psi(\mathrm{I}_n) = (n + \mathrm{tr}(\mathrm{I}_n))\mathrm{I}_n = 2n\mathrm{I}_n$ $(\dagger)$, et $\mathrm{I}_n \neq 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $\mathrm{I}_n$ est un vecteur propre de $\psi$ associé à la valeur propre $2n$. On en déduit déjà :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\mathrm{I}_n\right) \subseteq \ker\left(\psi - 2n\mathrm{I}_n\right), \text{ donc : } \dim\left(\ker\left(\psi - 2n\mathrm{I}_n\right)\right) \geqslant 1.$$

De plus, pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle de trace nulle, on a $\psi(M) = nM$ $(*)$, donc $n$ est une valeur propre de $\psi$, et des vecteurs propres associés sont des matrices non nulles de trace nulle. Or on a : $\dim(\ker(\mathrm{tr})) = n^2 - 1$ (c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc un hyperplan), et on en déduit :

$$\ker(\mathrm{tr}) \subseteq \ker\left(\psi - n\mathrm{I}_n\right), \text{ donc : } \dim\left(\ker\left(\psi - n\mathrm{I}_n\right)\right) \geqslant n^2 - 1.$$

Ainsi on a l'encadrement :

$$n^2 \geqslant \dim\left(\ker\left(\psi - 2n\mathrm{I}_n\right)\right) + \dim\left(\ker\left(\psi - n\mathrm{I}_n\right)\right) \geqslant 1 + (n^2 - 1) = n^2,$$

ce qui n'est possible que si $\dim\left(\ker\left(\psi - 2n\mathrm{I}_n\right)\right) + \dim\left(\ker\left(\psi - n\mathrm{I}_n\right)\right) = n^2 = \dim(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$. On en déduit que $\psi$ est diagonalisable d'après le critère de diagonalisation.

Retenez l'approche que vous préférez. **Elle est efficace surtout pour un endomorphisme défini sur** $\mathrm{M}_n(K)$. Au contraire, elle est une perte de temps si la matrice de l'endomorphisme (dans une certaine base) est facile à obtenir, *et est triangulaire*. On peut en effet démontrer que dans une base adéquate, une matrice de transvection est triangulaire avec *un seul* coefficient non nul hors de la diagonale. Vous conviendrez que dans ce cas, l'étude matricielle est tout de même plus rapide.

**Exemple 4.** Reprenons l'exemple $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P + \left(\int_0^1 P\right) \cdot 1 \end{cases}$ ci-dessus. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\varphi\left(X^k\right) = X^k + \frac{1}{k+1}$. Sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(X^k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est donc :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement que $\varphi$ admet 1 comme valeur propre avec multiplicité $n$ (attention au fait qu'il y ait $n + 1$ lignes et colonnes), et 2 avec multiplicité 1. De plus, on obtient facilement que $M - \mathrm{I}_{n+1}$ est de rang 1, donc d'après le théorème du rang : $\dim(\ker(M - \mathrm{I}_{n+1})) = n$. De même, $\dim(\ker(M - 2\mathrm{I}_{n+1})) = 1$. Les dimensions et les ordres de multiplicité coïncident, donc $\varphi$ est diagonalisable d'après le critère de diagonalisation.

**Exercice 4.** Déterminer si l'endomorphisme $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(0) \cdot X + P \end{cases}$ est diagonalisable.

## 5 Réduction de matrices par blocs : trois méthodes

Nous donnons ici des **pistes** (il n'y a pas de méthode générale et on doit parfois vous guider) pour étudier la réduction de matrices par blocs, de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A \end{pmatrix}, \quad \text{ou } M = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \\ A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}, \quad \text{ou } M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}, \quad \text{etc.},$$

où les blocs (en particulier $A$ ici) peuvent aussi bien être explicites qu'abstraits (dans ce dernier cas, on vous demande rarement de montrer que la matrice $M$ est diagonalisable, mais plutôt de trouver une condition nécessaire et suffisante sur $A$ pour qu'elle le soit).

Dans ces cas-là, il y a essentiellement trois axes de réflexion pour étudier la réduction de $M$ :

— **méthode 1 :** on regarde si, pour tout $P \in K[X]$, on a une relation simple entre $P(A)$ et $P(M)$, de sorte que si $A$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples $P$, alors $M$ aussi, ou inversement (c'est dans la lignée de ce que nous disions dans la section , sur les endomorphismes dépendant d'un autre) ;
— **méthode 2 :** on regarde si $\chi_M$ s'exprime aisément à l'aide de $\chi_A$ (pour cela vous aurez besoin de l'identité donnée dans les « compléments sur la 2e méthode »), afin d'en déduire une expression des valeurs propres de $M$ en fonction de celles de $A$ ; si c'est insuffisant pour conclure, on essaie ensuite d'exprimer les vecteurs propres de $M$ en fonction de ceux de $A$, en regardant *au brouillon* ce que l'égalité $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ implique comme relations entre $A$, $X$ et $Y$ ; si l'on a réussi, on peut alors fabriquer une base de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $M$, à l'aide d'une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $A$ (si $A$ est diagonalisable) ;
— **méthode 3 :** on essaie *au brouillon* de résoudre l'exercice **en remplaçant les blocs par des réels ou complexes pertinents** (on remplace $\mathrm{I}_n$ par 1, et $A$ par $a \in \mathbb{C}$, etc., ce qui permet de se ramener à des matrices d'ordre 2 très simples à réduire), de sorte à obtenir une relation de la forme $M' = PDP^{-1}$, où $M'$ est la matrice d'ordre 2 obtenue en remplaçant les blocs par des scalaires, et $P$, $D$, $P^{-1}$ sont TOUTES LES TROIS EXPLICITES (notez que $P^{-1}$ aussi doit être explicitée) ; alors, on *conjecture* que la matrice $M$ vérifie la même relation, où l'on remplace les scalaires dans $P$ et $D$ par des blocs à nouveau (on remplace les 1 par des $\mathrm{I}_n$, les 0 par $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, etc.), et on vérifie la conjecture par un calcul concret.

Nous détaillons les méthodes 2 et 3 plus bas.

## 5.1 Comment déterminer si la 1re méthode est pertinente

Bien qu'il soit difficile de dire quelle méthode utiliser en toute généralité, notons qu'il y a un moyen de trancher si la première méthode ci-dessus est pertinente : regardez d'abord si $M^k$ s'exprime aisément à l'aide de $A^k$ (et d'autres blocs éventuellement) pour tout $k \in \mathbb{N}$ ; vous aurez souvent besoin de regarder ce qu'il se passe pour $k = 2$ ou $k = 3$, avant de conjecturer et généraliser une relation pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si c'est le cas, alors en écrivant $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$, vous en déduirez par linéarité une expression de $P(M)$ en fonction de $P(A)$ pour tout polynôme $P$, et donc en particulier pour des polynômes annulateurs bien choisis (si les hypothèses en assurent l'existence : par exemple si $A$ est diagonalisable, d'après le critère polynomial de diagonalisation).

**Exemple 5. (Cas où la 1re méthode est pertinente)** Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$.
Pour juger si la 1re méthode est ici pertinente, tentons d'abord d'exprimer $M^k$ en fonction de $A^k$ pour tout entier $k$. Une récurrence soignée permet de démontrer que pour tout entier $k$ NON NUL, on a : $M^k = \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$, tandis que si $k = 0$ on a évidemment $M^0 = \mathrm{I}_{2n}$ par définition. On en déduit que, si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, alors :

$$\begin{aligned} P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k = a_0 \mathrm{I}_{2n} + \sum_{k=1}^{p} a_k \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} &= a_0 \mathrm{I}_{2n} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_k A^k & \sum_{k=1}^{p} a_k A^k \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} \\ &= a_0 \mathrm{I}_{2n} + \begin{pmatrix} P(A) - a_0 \mathrm{I}_n & P(A) - a_0 \mathrm{I}_n \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} \\ &= a_0 \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & -\mathrm{I}_n \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

À ce stade, le doute est permis sur la pertinence de la 1re méthode, bien qu'on ait une relation simple entre $P(M)$ et $P(A)$, à cause de la matrice parasite $\begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & -\mathrm{I}_n \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Néanmoins on constate que si $P$ est choisi de sorte que $a_0 = 0$ (ce qui revient à dire que $P(0) = 0$), alors : $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$. La 1re méthode peut alors être pertinente *si de bonnes hypothèses* nous autorisent à choisir un polynôme $P$ tel que $P$ soit un polynôme annulateur de $A$ ou $M$ ET vérifiant $P(0) = 0$.

**Exercice 5.** On reprend l'exemple ci-dessus, et on suppose $A$ *non inversible*.

1. Vérifier soigneusement l'expression de $M^k$ donnée ci-dessus pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $M$ est diagonalisable si et seulement si $A$ l'est (*utiliser le critère polynomial de diagonalisation*). Où intervient l'hypothèse que $A$ n'est pas inversible ?

Le résultat de la deuxième question reste vrai si $A$ n'est pas inversible, mais il faut changer de méthode. Voir l'exemple 10.

**Exercice 6.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Posons : $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A^k \end{pmatrix}$ et en déduire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, une relation entre $P(M)$, $P(A)$ et $P'(A)$.
2. Montrer que $M$ est diagonalisable si et seulement si $A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ (l'implication directe est subtile, mais vous parviendrez tout de même à montrer, en suivant la méthode ci-dessus, l'implication moins forte suivante : si $M$ est diagonalisable alors $A$ doit l'être aussi).

**Exemple 6. (Cas où la 1re méthode n'est pas pertinente)** Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \\ A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$. Pour juger si la 1re méthode est ici pertinente, tentons d'abord d'exprimer $M^k$ en fonction de $A^k$ pour tout entier $k$. Une récurrence soignée permet de démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} A^{k/2} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A^{k/2} \end{pmatrix} & \text{si} \quad k \text{ est pair,} \\ \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A^{(k-1)/2} \\ A^{(k+1)/2} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} & \text{si} \quad k \text{ est impair.} \end{cases}$$

**Exercice 7.** Le démontrer.

Cette relation ne permet pas d'exprimer aisément $P(M)$ en fonction de $P(A)$. Si l'on pose $P = \sum_k a_k X^k = \sum_{k \text{ pair}} a_k X^k + \sum_{k \text{ impair}} a_k X^k = \sum_j a_{2j} X^{2j} + \sum_\ell a_{2\ell+1} X^{2\ell+1}$, on a en effet :

$$P(M) = \sum_j a_{2j} M^{2j} + \sum_\ell a_{2\ell+1} M^{2\ell+1} = \sum_j a_j \begin{pmatrix} A^j & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A^j \end{pmatrix} + \sum_\ell a_{2\ell+1} \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A^\ell \\ A^{\ell+1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}.$$

Il n'est pas possible de faire apparaître $P(A)$ (tout au plus peut-on exprimer $P(M)$ à l'aide de $P^+(A)$ et $P^-(A)$, où $P^+$ et $P^-$ sont respectivement les parties paire et impaire de $P$, mais ce n'est pas très utile ici). La 1re méthode est donc inopérante pour produire des polynômes annulateurs scindés à racines simples de $M$ à l'aide de ceux de $A$.

Puisque la 1re méthode ne suffit pas à traiter toutes les matrices par blocs, voyons plus en détails comment utiliser les deux autres méthodes, exemples à l'appui.

## 5.2 Compléments sur la 2e méthode

Pour d'abord trouver les valeurs propres de $M$ en fonction de celles de $A$, il est très utile de connaître le résultat suivant, même sans savoir le démontrer (mais dans ce cas on ne l'écrit pas dans une copie : on l'utilise pour la réflexion au brouillon) : si $A$, $B$, $C$ et $D$ sont des matrices carrées telles que $CD = DC$ (d'autres hypothèses de commutation sont possibles), alors :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

Nous aurons l'occasion de la voir en exercice. Pour l'instant, voyons en quoi elle peut nous être utile pour l'étude de la réduction de matrices par blocs : si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $C$ et $D$ vérifiant les hypothèses ci-dessus, alors :

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X\mathrm{I}_n - A & -B \\ -C & X\mathrm{I}_n - D \end{vmatrix} = \det\left((X\mathrm{I}_n - A)(X\mathrm{I}_n - D) - BC\right). \qquad (*)$$

L'exercice ci-dessous permet de démontrer l'identité dans ce cas particulier.

**Exercice 8.** Soient $A$, $B$, $C$, $D \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ telles que $C$ et $D$ commutent. On pose : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

1. Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $x\mathrm{I}_n - D$ soit inversible (pourquoi existe-t-il bien de tels $x$ ?). Compléter les matrices par blocs du membre de droite pour avoir l'égalité :
$$\begin{pmatrix} x\mathrm{I}_n - A & -B \\ -C & x\mathrm{I}_n - D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & x\mathrm{I}_n - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ * & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$
Pour comprendre ces choix de blocs : songer aux matrices de transvection.
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_D(x) \neq 0$, on a : $\chi_M(x) = \det\left((x\mathrm{I}_n - A)(x\mathrm{I}_n - D) - BC\right)$.
3. Montrer que les deux membres de l'égalité ci-dessus sont polynomiaux en $x$, et en déduire que l'égalité reste valable pour tout $x \in \mathbb{C}$.

En pratique, $M$ a une forme plus sympathique que celle générale ci-dessus (par exemple $M$ est triangulaire par blocs – mais dans ce cas le cours suffit à calculer son polynôme caractéristique –, ou « anti-diagonale par blocs »), ce qui permet de simplifier encore ce déterminant.

**Exemple 7.** Si $A = B = C = D$ (c'est-à-dire si $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$), alors en reprenant le calcul ci-dessus :

$$\begin{aligned} \chi_M = \det\left((X\mathrm{I}_n - A)^2 - A^2\right) &= \det\left(((X\mathrm{I}_n - A) + A)\left((X\mathrm{I}_n - A) - A\right)\right) \\ &= \det\left((X\mathrm{I}_n - A) + A\right)\det\left((X\mathrm{I}_n - A) - A\right) \\ &= \det\left(X\mathrm{I}_n\right)\det\left(X\mathrm{I}_n - 2A\right). \end{aligned}$$

On peut encore simplifier ces déterminants : voir l'exercice ci-dessous.

**Exercice 9.**

1. Finir le calcul pour en déduire : $\chi_M = 2^n X^n \chi_A\left(\frac{X}{2}\right)$.
2. En déduire que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $M$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\frac{\lambda}{2} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
3. En déduire : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\} \cup \{2\mu \mid \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$.

On a obtenu le spectre de $M$ en fonction de celui de $A$, si compliquée soit cette matrice !

Néanmoins j'insiste :

Si vous ne savez pas comment démontrer l'identité $(*)$, et si elle n'est pas donnée dans l'énoncé, alors :
VOUS NE DEVEZ PAS L'UTILISER,
et vous contenter de la manipuler au brouillon pour avoir des idées !

Pourtant j'affirme que même si vous ne pouvez pas l'utiliser librement dans votre résolution au propre, connaître cette identité peut vous être utile. En effet, en l'utilisant AU BROUILLON, cela vous permet de CONJECTURER le spectre de $M$. Ensuite, pour démontrer rigoureusement, au propre, que le spectre de $M$ est *vraiment* ce que vous avez conjecturé, il vous suffit de montrer que $M\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ admet bien des solutions non nulles pour tout $\lambda$ dans l'ensemble de valeurs propres que vous conjecturez. Vous le justifiez en montrant, *via* simplifications, que ce système équivaut à des relations entre $A$, $X$ et $Y$ de la forme $AZ=\mu Z$, où $\mu$ est une valeur propre de $A$. Vous savez que de telles relations ont bien des solutions (par définition même d'une valeur propre), et vous en déduisez que $M\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ aussi.

Remarquez que pour montrer que $\lambda$ est valeur propre, il ne nous intéresse pas spécialement de trouver *toutes* les solutions de $M\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ : il suffit d'en trouver *une seule* qui soit non nulle, ce qui permet souvent de conclure (quitte à tâtonner un peu, en prenant par exemple $X=Y$, ou $X=-Y$, etc.) lorsqu'on ne parvient pas à une résolution complète.

Nous illustrons l'approche dans les exemples 8 et 9 ci-dessous.

**Remarque.** Cette méthode n'est pas très efficace pour obtenir une information en sens contraire, à savoir conclure sur la réduction de $A$ à l'aide d'hypothèses sur $M$. Par conséquent, si l'on vous demande une condition nécessaire et suffisante pour que $M$ soit diagonalisable, cette méthode n'est pas prioritaire.

**Exemple 8.** On reprend l'exemple 7. Construisons effectivement des vecteurs propres de $M$ à l'aide de ceux de $A$.

Commençons par le cas où $\lambda=0$. Soit $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. On a : $M\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$ si et seulement si $\begin{pmatrix}A(X+Y)\\A(X+Y)\end{pmatrix}=0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, si et seulement si $A(X+Y)=0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. En particulier, en prenant pour $X$ *n'importe quel vecteur colonne non nul*, et $Y=-X$, on a $X+Y=0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et donc $A(X+Y)=0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ : cela montre que pour tout $X$ non nul, le vecteur $\begin{pmatrix}X\\-X\end{pmatrix}$ est non nul et vérifie $M\begin{pmatrix}X\\-X\end{pmatrix}=0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, et donc que 0 est effectivement une valeur propre de $M$ (si l'on n'avait pas pu utiliser l'identité $(*)$, on l'aurait démontré par ce raisonnement). De surcroît, $\begin{pmatrix}X\\-X\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M$ associé à 0 pour tout $X\in\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul.

Passons au cas où $\lambda=2\mu$ avec $\mu\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Le cas où $\mu=0$ est déjà traité ci-dessus, et on suppose donc $\mu\neq 0$ (la raison pour laquelle je fais cette supposition sera claire ci-après). Soit $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. On a : $M\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=2\mu\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix}A(X+Y)\\A(X+Y)\end{pmatrix}=2\mu\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$, si et seulement si $A(X+Y)=2\mu X$ et $A(X+Y)=2\mu Y$. En particulier, ces deux égalités impliquent : $2\mu X=2\mu Y$. Comme $\mu\neq 0$, la division par $2\mu$ donne : $X=Y$. Les égalités $A(X+Y)=2\mu X$ et $A(X+Y)=2\mu Y$ se réduisent donc à : $2AX=2\mu X$, si et seulement si $AX=\mu X$. On note en particulier que si $X$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\mu$, alors cette dernière égalité est vérifiée, et donc notre raisonnement montre que $M\begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}=2\mu\begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}\neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$ : on a démontré que pour tout vecteur propre $X$ de $A$ associé à $\mu$, le vecteur $\begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M$ associé à $2\mu$ (qui est donc bel et bien une valeur propre de $M$ : si l'on n'avait pas pu utiliser l'identité $(*)$, on l'aurait démontré par ce raisonnement).

**Exercice 10.**

1. On suppose que $A$ est diagonalisable et inversible. Déduire de cet exemple que si $(X_1,\dots,X_n)$ est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $A$, associés respectivement à des valeurs propres $\mu_1,\dots,\mu_n$ de $A$, et si $(E_1,\dots,E_n)$ est la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors

$\left(\begin{pmatrix} E_1 \\ -E_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E_n \\ -E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ X_n \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $M$ (et donc $M$ est diagonalisable).

2. On ne suppose plus $A$ inversible (mais toujours que $A$ est diagonalisable). Donner la dimension de $\ker(M)$ en fonction de celle de $\ker(A)$, et en déduire si $M$ est diagonalisable ou non (*utiliser le critère de diagonalisation*).

**Exemple 9.** Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$. La formule $(*)$ ci-dessus, dans ce cas particulier, nous permet de *conjecturer* que $\chi_M = (-3)^n \chi_A\left(\frac{X}{3}\right)\chi_A(-X)$, et donc que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $M$ si et seulement si $\chi_A\left(\frac{\lambda}{3}\right) = 0$ ou $\chi_A(-\lambda) = 0$, si et seulement s'il existe $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\lambda = 3\mu$ ou $\lambda = -\mu$. Vérifions à présent la conjecture, en montrant qu'effectivement, pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, il existe une solution *non nulle* $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ telle que $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 3\mu\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ (et de même en remplaçant $3\mu$ par $-\mu$).

Soient $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. On a $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 3\mu\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ si et seulement si $A(X+2Y) = 3\mu X$ et $A(2X+Y) = 3\mu Y$. En particulier, si l'on prend $X = Y$, on voit que les deux dernières égalités se ramènent à $3AX = 3\mu X$, ou encore à : $AX = \mu X$ ; cette égalité est vérifiée dès que $X$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\mu$. Donc, en remontant le raisonnement (ce qui précédait était à faire *au brouillon* ; ce qui suit est à faire *au propre*), on voit que si $X$ est un tel vecteur propre, alors $M\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = 3\mu\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} \neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, ce qui démontre effectivement que $3\mu$ est valeur propre de $M$ (si $\mu$ est valeur propre de $A$), et que pour tout vecteur propre $X$ de $A$ associé à $\mu$, le vecteur colonne $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M$ associé à $3\mu$.

On passe à présent aux valeurs propres conjecturées de la forme $-\mu$. On a $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -\mu\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ si et seulement si $A(X+2Y) = -\mu X$ et $A(2X+Y) = -\mu Y$. En particulier, si l'on prend $Y = -X$, on voit que les deux dernières égalités se ramènent à $-AX = -\mu X$, ou encore à : $AX = \mu X$ ; cette égalité est vérifiée dès que $X$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\mu$. Donc, en remontant le raisonnement (ce qui précédait était à faire *au brouillon* ; ce qui suit est à faire *au propre*), on voit que si $X$ est un tel vecteur propre, alors $M\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} = -\mu\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} \neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, ce qui démontre effectivement que $-\mu$ est valeur propre de $M$ (si $\mu$ est valeur propre de $A$), et que pour tout vecteur propre $X$ de $A$ associé à $\mu$, le vecteur colonne $\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M$ associé à $-\mu$.

On a bien démontré que si $\mu$ est une valeur propre de $A$, alors $-\mu$ et $3\mu$ sont des valeurs propres de $M$, et en prime on sait comment en fabriquer des vecteurs propres associés.

**Exercice 11.** On suppose que $A$ est diagonalisable. Montrer que si $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $A$, associés respectivement à des valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ de $A$, alors $\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ X_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_n \\ -X_n \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $M$ (et donc $M$ est diagonalisable).

## 5.3 Compléments sur la 3$^{\text{e}}$ méthode

Comme dit plus haut, cette méthode revient à d'abord traiter l'exercice où l'on remplace les blocs par des scalaires (on remplace $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ par $0$, $\mathrm{I}_n$ par $1$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par $a \in \mathbb{C}$, etc.), puis de reprendre le raisonnement en sens inverse, c'est-à-dire : en espérant que la relation $M' = PDP^{-1}$ (où $M'$ est la matrice obtenue en remplaçant les blocs par des scalaires, $P$ une matrice inversible et $D$ une matrice diagonale, qu'on trouve par les méthodes habituelles) reste vraie en remplaçant les scalaires intervenant dans $P$ et $D$

par les matrices correspondantes (on remplace 0 par la matrice nulle, 1 par la matrice identité, $a$ par $A$, etc.).

Cette généralisation ne fonctionne pas toujours : cela nécessite d'avoir une matrice de passage $P$ simple, et ne dépendant pas du ou des scalaires qu'on a substitués aux blocs (c'est-à-dire du $a \in \mathbb{C}$ qui remplace $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, avec les notations du paragraphe précédent). Mais plaçons-nous dans le cas favorable où la méthode fonctionne. Il y a alors trois étapes par lesquelles commencer obligatoirement :

1. Si $M' = PDP^{-1}$, où $M'$ est la matrice obtenue en remplaçant les blocs de $M$ par des scalaires (comme expliqué ci-dessus), de sorte que $P$ et $D$ soient aussi scalaires, alors on commence par calculer $P^{-1}$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauß.
2. On pose $P'$ la matrice obtenue à partir de $P$ en remplaçant les scalaires par les blocs correspondants, comme expliqué ci-dessus, et on pose de même $Q'$ (par exemple ; le nom est provisoire de toute façon) la matrice obtenue à partir de $P^{-1}$ en procédant de même ; on *vérifie* que $P'Q' = \mathrm{I}_{2n}$, pour en déduire que $Q' = P'^{-1}$ (ce qui semble naturel).
3. On note $D'$ la matrice diagonale par blocs obtenue à partir de $D$ en remplaçant les scalaires par des blocs (s'il apparaît des racines carrées de $a$ alors l'affaire est plus délicate : nous ignorons cette subtilité éventuelle), et on vérifie par un calcul bête et méchant que $P'D'P'^{-1} = M$. Notez bien que $P'^{-1}$ fut calculé à l'étape précédente. Ainsi $M$ est semblable à la matrice diagonale par blocs $D'$.

Ce n'est pas terminé à ce stade. Notez en effet que $D'$ n'est pas forcément une matrice diagonale « tout court » : si $a \in \mathbb{C}$ apparaît sur la diagonale de $D$, alors $D'$ aura des $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sur la diagonale. Comme $A$ n'est *a priori pas diagonale*, $D'$ non plus. Il en faut donc un peu plus pour déterminer si $M$ est diagonalisable. Pour cela, on suppose en général que $A$ est diagonalisable : on peut l'écrire sous la forme $A = QDQ^{-1}$ (la lettre $P$ est déjà prise) avec $Q$ inversible et $D$ diagonale. En écrivant des égalités du type :

$$\begin{pmatrix} QDQ^{-1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \ddots \end{pmatrix},$$

on parvient alors à montrer que $M$ est de la forme $M = P''D''P''^{-1}$ où $P''$ est inversible et $D''$ diagonale « tout court ».

**Exemple 10.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On reprend l'exemple de $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$, déjà abordé dans l'exemple 5 avec la 1re méthode (qui ne permettait pas de conclure si $A$ est inversible). Conformément au plan d'étude suggéré pour la 3e méthode, j'étudie d'abord la réduction de $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{C}$. Elle est très facile ; vous trouverez sans effort que : $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, où : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Un calcul basique permet de montrer : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P$ (pur hasard de calcul : cela ne se produit pas nécessairement dans ces exercices).

Pour revenir au cas de notre matrice par blocs, ce qu'on CONJECTURE est alors :

— si l'on pose $P' = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ (*remplacement des* 1 *par des* $\mathrm{I}_n$ *dans la matrice de passage du cas simple*), alors $P'$ est inversible et : $P'^{-1} = P'$ (de même qu'on avait $P^{-1} = P$ plus haut) ;

— $M = P' \begin{pmatrix} A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} P'^{-1}$.

On vérifie ces deux conjectures par un calcul bête et méchant, le premier en calculant $P' \times P'$ et en constatant qu'on obtient ainsi la matrice identité (ce qui veut bien dire que $P'^{-1} = P'$). Pour vérifier la seconde conjecture, partez préférablement du membre de droite.

Voyons comment en déduire que si $A$ est diagonalisable, alors $M$ aussi : si $A$ est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D$ telles que : $A = QDQ^{-1}$. Alors :

$$M = P' \begin{pmatrix} QDQ^{-1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} P'^{-1} = P' \begin{pmatrix} Q & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} P'^{-1}.$$

Si l'on pose : $P'' = P' \begin{pmatrix} Q & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$, alors $P''$ est inversible en tant que produit de deux matrices inversibles, et on a : $M = P''D'P''^{-1}$. Ainsi $M$ est semblable à la matrice $D'$, qui est manifestement diagonale (pas seulement par blocs, mais « tout court ») ; on en déduit que $M$ est diagonalisable.

**Mise en garde 1.** Épargnez-moi les abominations : on n'a CLAIREMENT PAS l'égalité suivante : $\begin{pmatrix} QDQ^{-1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} Q^{-1}$. LES TAILLES DES MATRICES NE SONT MÊME PAS COMPATIBLES ! (produit d'une matrice d'ordre $2n$ par les matrices $Q$ et $Q^{-1}$ qui sont d'ordre $n$).

**Exercice 12.** Reprendre ce qui ne fut pas détaillé dans l'exemple ci-dessus :

1. Montrer qu'on a bien : $\forall a \in \mathbb{C}, \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.
2. Vérifier que si $P' = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$, alors : $P'^{-1} = P'$.
3. Vérifier qu'on a effectivement $P' \begin{pmatrix} A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} P'^{-1} = M$.

**Exercice 13.** Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible et diagonalisable, et $M = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \\ A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$. Montrer que $M$ est diagonalisable. À vous de trouver quelle méthode est la plus pertinente.

# Table des matières