Méthodes (MP) – Réduction des endomorphismes

✓ **Applications de la réduction**

1 La diagonalisation

1.1 Dans l'étude de suites récurrentes linéaires

C'est l'application la plus banale de la réduction. Voir la section sur les matrices compagnons pour plus de détails. La stratégie se généralise aux suites vérifiant une relation de récurrence couplée du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + v_n + 2w_n, \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n + w_n, \\ w_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n, \end{cases} \quad \text{et plus généralement :} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ u_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} u_{j,n},$$

à ceci près que le vecteur colonne est plutôt, dans ces deux exemples : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, ou : $X_n = \begin{pmatrix} u_{1,n} \\ \vdots \\ u_{p,n} \end{pmatrix}$, et la matrice en présence n'est plus une matrice compagnon : on évitera donc de généraliser à tort les résultats de réduction mentionnés dans la section susdite.

1.2 Dans l'étude de chaînes de Markov

Voir le cours du chapitre de probabilités, et son livret *Méthodes*.

1.3 Dans l'étude d'équations différentielles linéaires

Voir le cours du chapitre sur les équations différentielles, et son livret *Méthodes*. Vous trouverez aussi quelques pistes dans la section 1.3 sur les matrices compagnons.

← page 4

1.4 Dans la résolution d'équations matricielles

Le terme est vague. Par « équation matricielle », j'entends la résolution d'équations de la forme $A = P(M)$, où $A \in \mathrm{M}_n(K)$ est une matrice fixée, $P \in K[X]$ un polynôme donné (souvent avec peu de coefficients non nuls) et $M \in \mathrm{M}_n(K)$ l'inconnue de cette équation, mais d'autres configurations sont possibles. Par exemple, l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une telle équation.

Leur résolution est compliquée par le fait qu'il n'existe pas de fonction « racine n^{e} matricielle » (du moins pas clairement, et de toute façon pas au programme) pour inverser les relations.

Même pour une relation aussi simple que : $M^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$, la résolution n'est pas aussi intuitive qu'on ne le voudrait. On penserait naïvement à prendre les racines carrées des coefficients : $M = \begin{pmatrix} \pm\alpha & 0 \\ 0 & \pm\beta \end{pmatrix}$ convient, certes, mais il peut y avoir d'autres solutions ; par exemple, l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a également pour solution $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (vérifiez-le). De plus, penser que les équations matricielles se résolvent comme les équations réelles ou complexes entraîne de graves erreurs : l'équation $x^4 = -1$ n'a pas de solution x réelle, alors que l'équation $M^4 = -\mathrm{I}_2$ a des solutions $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, par exemple : $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient, vérifiez-le (cet exemple ne vient pas de nulle part, comment y ai-je pensé ? Que représentent géométriquement $-\mathrm{I}_2$ et la matrice solution proposée ?).

Toutefois, si l'on cherche à résoudre $M^k = D$ où D est une matrice diagonale *dont les coefficients diagonaux sont tous distincts*, alors les seules solutions sont bien obtenues « comme on pense », en extrayant les racines k^{e} des coefficients diagonaux de D.

Exercice 1. Démontrer cette affirmation.

La situation est déjà délicate pour la résolution d'une équation aussi simple que $M^k = D$ où D est diagonale, alors que dire si l'on remplace D par une matrice A arbitraire ? Quelles sont les solutions de l'équation matricielle $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, par exemple ?

Il va de soi que poser $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, puis calculer M^2, pour en déduire neuf équations (non linéaires) vérifiées par a, b, c, etc., dans l'espoir de les résoudre, **est voué à l'échec**. Vous n'y parviendrez JAMAIS ainsi, et ce même si M est d'ordre 2.

C'est alors que la réduction vient à la rescousse. L'idée est que si l'on veut résoudre $A = P(M)$, *où A est diagonalisable*, alors A et M commutent (en effet : $AM = MP(M) = P(M)M = MA$), donc les endomorphismes canoniquement associés à A et M, qu'on note f_A et f_M, commutent également. En particulier, **les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M**, donc on peut étudier l'endomorphisme induit par f_M sur chaque sous-espace propre ; comme f_A est une homothétie sur chaque sous-espace propre, l'étude s'en voit simplifiée, et comme la somme des sous-espaces donne l'espace ambiant entier (puisque A est diagonalisable), déterminer la restriction de f_M à chaque sous-espace propre permet d'en déduire f_M.

Plus précisément :

1. On diagonalise A : si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres (adaptée à la décomposition en somme de sous-espaces propres), alors en notant Q la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$, on a $A = QDQ^{-1}$ où D est diagonale.
2. On montre que A et M commutent en écrivant : $AM = MP(M) = P(M)M = MA$.
3. On introduit leurs endomorphismes canoniquement associés f_A et f_M, et on utilise la commutation pour en déduire que les sous-espaces propres de f_A (qui sont ceux de A) sont stables par f_M.
4. Comme la somme des sous-espaces propres égale l'espace entier, et qu'ils sont tous stables par f_M, on en déduit que la matrice de f_M dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, disons de la forme : $M' = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_k \end{pmatrix}$, où A_i est carrée et d'ordre égal à la dimension du i^{e} sous-espace propre.

   Notons que si chaque sous-espace propre est une droite, alors les A_i sont des blocs d'ordre 1 et donc M' est une matrice diagonale ! Situation royale et privilégiée en exercice.

   Si on a davantage d'informations sur M et A, certains blocs sont éventuellement simplifiables : voir exemple ci-dessous.
5. D'après la formule du changement de base, appliquée à f_M avec la base canonique et $\mathcal{B}$, on a : $M = QM'Q^{-1}$.
6. On injecte les expressions $A = QDQ^{-1}$ et $M = QM'Q^{-1}$ dans l'équation $A = P(M)$, et on en déduit : $D = P(M')$ (multiplier à gauche par Q^{-1} et à droite par Q).
7. Cette égalité équivaut à des équations vérifiées par les coefficients de M'. On les résout, et on en déduit M', puis M.

Exemple 1. Résolvons l'équation matricielle $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Notons A la matrice du membre de droite.

1. On sait montrer que A est diagonalisable : si $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A = QDQ^{-1}$.
2. On a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent.

3. Notons f_A et f_M leurs endomorphismes canoniquement associés. Ils commutent, donc les sous-espaces propres de f_A, c'est-à-dire $\ker(f_A - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\ker(f_A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, sont stables par f_M.
4. Soit $\mathcal{B}$ la base obtenue par concaténation des familles génératrices des sous-espaces propres ci-dessus (ou encore : ce sont les colonnes de Q). Grâce à la stabilité de $\ker(f_A - \mathrm{Id})$ et $\ker(f_A)$ (qui sont des droites), on sait que dans cette base, la matrice de f_M est de la forme : $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}$.
5. D'après la formule du changement de base : $M = Q\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}Q^{-1}$.
6. On a $A = M^2$, c'est-à-dire, d'après les points 1. et 5. ci-dessus : $QDQ^{-1} = Q\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\0 & \beta^2\end{pmatrix}Q^{-1}$. Après multiplication à gauche par Q^{-1} et à droite par Q, cela donne : $D = \begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\0 & \beta^2\end{pmatrix}$.
7. On identifie les coefficients de $D = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\0 & \beta^2\end{pmatrix}$, et cela donne : $\alpha^2 = 2$, $\beta = 0$, et donc : $\alpha = \pm\sqrt{2}$, $\beta = 0$. On en déduit les égalités :
$$M = Q\begin{pmatrix}\pm\sqrt{2} & 0\\0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pm\sqrt{2} & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\cdot\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}.$$
Réciproquement, ces deux matrices conviennent.

Exercice 2. Imiter cette démarche pour résoudre l'équation $M^2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Si A n'est pas diagonalisable, mais malgré tout de forme assez simple, alors vous pourrez toujours y parvenir en suivant cette méthode.

Exercice 3. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^2 = A$, où : $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$.
1. Montrer : $MA = AM$.
2. En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\\beta & \gamma\end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\alpha^2 = \gamma^2 = 1$. Que vérifie β ? En déduire les deux matrices M qui conviennent.

Les polynômes interpolateurs de Lagrange permettent aussi d'étudier les solutions de telles équations, et notamment de montrer (dans certains cas particuliers) que les solutions de $P(M) = A$, d'inconnue M, sont des polynômes en A ! Voir la section *Application des polynômes de Lagrange en algèbre linéaire.*

1.5 Dans les produits scalaires impliquant des endomorphismes autoadjoints

Voir le cours du chapitre sur les espaces préhilbertiens et euclidiens, et son livret *Méthodes*.

2 La trigonalisation

Toutes les applications de la diagonalisation valent également pour la trigonalisation, bien que l'affaire devienne plus délicate (elle doit être indiquée dans ce cas).

Outre cela, l'intérêt de la trigonalisation est que :
— au contraire de la diagonalisation, elle est valable pour toute matrice réelle (quitte à la voir dans $\mathbb{C}$) ;

— elle « dévoile » le spectre : ce sont les coefficients diagonaux (alors que pour une matrice quelconque, les valeurs propres ne sont en général pas visibles à l'œil nu).

Comme la diagonale d'une matrice triangulaire se comporte bien vis-à-vis de la multiplication et exponentiation, cela permet notamment d'étudier les variations du spectre de A **quand on étudie ses puissances**, qu'on la multiplie par une autre matrice, etc.

Dans le même ordre d'idée, on utilise la trigonalisation d'une matrice A en vue d'étudier le comportement asymptotique de $(A^n)_{n\geqslant 0}$ ou les propriétés de la fonction $t \mapsto \exp(tA)$, et plus précisément pour relier ce comportement et ces propriétés au spectre de A. Dans ce cas, il est préférable de privilégier la trigonalisation avec des blocs diagonaux de la forme $\lambda\mathrm{I}+N$ avec N triangulaire stricte (et donc nilpotente), et de tirer profit de la formule du binôme de Newton :

$$\forall k \gg 1, \quad (\lambda\mathrm{I}+N)^k = \lambda^k\mathrm{I} + \sum_{i=1}^{p} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i,$$

où p est l'indice de nilpotence de N (il est essentiel de remarquer que cette somme est à support fini). Si l'on contrôle les puissances de N (relativement indolores puisque N est nilpotente) et les suites géométriques $(\lambda^n)_{n\geqslant 0}$ pour toute valeur propre λ, alors on contrôle le comportement des puissances des blocs diagonaux $\lambda\mathrm{I}+N$ puis celui des puissances de A. À cet effet, il est utile de noter que $\binom{k}{i}$ est polynomial en k et que par croissances comparées, le facteur λ^{k-i} l'emporte.

Cependant l'intérêt de la trigonalisation est surtout théorique : c'est lorsqu'on veut montrer des propriétés du spectre qu'il peut être plus commode de travailler sur une triangulation (dans $\mathbb{C}$). Par exemple, si A est une matrice complexe d'ordre n dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes (comptées avec multiplicités) :

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^k) = \left\{\lambda^k \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\right\}$, c'est-à-dire : **les valeurs propres complexes de A^k sont celles de A élevées à la puissance k** (notez qu'on peut montrer directement une inclusion – laquelle ? – partant de la définition de valeur propre ; mais l'égalité est fausse si on ne considère que les valeurs propres réelles : considérer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de A^2 pour s'en convaincre) ;

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$;

— pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a : $\det(P(A)) = \prod_{i=1}^{n} P(\lambda_i)$.

Essayez de démontrer ces propositions, très utilisées en exercice.

Table des matières