Méthodes (MP) – Réduction des endomorphismes

1 ✓ Diagonalisation d'une matrice explicite A

Voici la démarche générique pour la diagonalisation d'une matrice explicite A, si possible d'ordre raisonnable.

1. On détermine ses valeurs propres (l'ensemble des valeurs propres de A est noté $\mathrm{Sp}(A)$).
2. On détermine ses sous-espaces propres (qui sont, par définition, $\ker(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ où $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$).
3. On concatène les bases de ces sous-espaces propres, et si le cardinal est suffisant alors cela donne une base de vecteurs propres qui permet de diagonaliser la matrice.

Détaillons les deux premières étapes dans les sections suivantes.

1.1 Détermination des valeurs propres

Un moyen privilégié de détermination des valeurs propres d'une matrice A *est le calcul du polynôme caractéristique* χ_A. Mais cela doit être fait intelligemment, sinon ce n'est pas profitable.

Notons que χ_A est nécessairement unitaire et de degré égal à l'ordre de la matrice : *c'est un moyen éventuel de détecter des erreurs de calcul.*

1.1.1 Comment calculer efficacement χ_A

Rappelons que ce qui nous intéresse n'est pas tant que cela l'expression explicite de χ_A sous la forme : $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots$, mais **ses racines**, puisqu'elles sont les valeurs propres de A que l'on cherche à déterminer. Or, si un polynôme P s'écrit sous forme factorisée ainsi : $P = (X - a)Q$, où $a \in K$ et Q est un polynôme, alors il se voit immédiatement que a est une racine de P.

Un calcul *efficace* de χ_A est donc un calcul écrivant χ_A sous la forme factorisée :

$$\chi_A = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots ,$$

avec autant de facteurs de degré 1 que possible. Pour y parvenir :

1. **Lors du calcul de** $\det(X\mathrm{I}_n - A)$**, on effectue des opérations sur les colonnes ou lignes (les deux éventuellement) de sorte à avoir autant de** 0 **que possible dans une colonne ou ligne, et on développe par rapport à la colonne ou ligne en question.**
2. Après CHAQUE opération ou développement, **on regarde s'il est possible de trouver un facteur commun dans chaque coefficient d'une colonne, ou d'une ligne** ; si oui, on le met en facteur du déterminant, en vertu de sa multilinéarité ;
3. On revient au point 1, jusqu'au terme du calcul.

Avec du flair, on peut obtenir des factorisations autrement qu'en suivant la recommandation de l'étape 1. Il faut prendre quelques instants pour observer si des opérations simples sur les lignes ou colonnes ne permettraient pas de factoriser chaque coefficient d'une ligne ou colonne par $X - \alpha$ pour un certain α.

Lorsque la matrice est d'ordre 3, trouver un seul facteur de χ_A suffit moralement à déterminer toutes les racines, puisque parmi les deux facteurs, l'un est de degré 2 et l'autre de degré 1. Dans les deux cas, on sait trouver les racines.

Quand nous n'avons pas d'idée d'opérations efficaces pour obtenir tous ces zéros, **on utilise la méthode du pivot de Gauß**. En faisant attention toutefois à ne pas utiliser pour pivot un coefficient qui dépendrait de λ. On peut commencer par permuter L_1 et L_i pour simplifier l'emploi de la méthode du pivot.

Une exception à cette exigence de factorisation : lorsqu'on conjecture que le polynôme caractéristique est $X^n \pm a$. En ce cas, il est immédiat que les racines de χ_A sont des racines n^{es} ou $2n^{\text{es}}$ de a ou a^2, et il n'est pas nécessaire de factoriser χ_A pour trouver ses racines (on peut même au contraire se compliquer la tâche ainsi). Cela affirme en particulier quand vous reconnaissez la matrice compagnon de $X^n \pm a$.

Cas particulier fréquent. Un cas particulier assez fréquent est celui où la somme des coefficients de chaque ligne ou colonne égale le même nombre réel S. Dans ce cas, dans le calcul de $\det(X\mathrm{I}_n - A)$:

Quand la somme des coefficients de chaque colonne égale S.

1. **Faire l'opération** $L_1 \leftarrow L_1 + \cdots + L_n$: il apparaît alors $\lambda - S$ dans chaque coefficient de la 1re ligne.
2. **Faire les opérations** $C_i \leftarrow C_i - C_1$, qui éliminent les $\lambda - S$ dans la 1re ligne.
3. **Développer par rapport à la 1re ligne** : $X - S$ est alors un facteur de χ_A.

Si la propriété porte sur la somme des coefficients de chaque colonne : inverser les rôles des lignes et des colonnes ci-dessus.

Cette situation se produit TOUJOURS avec les matrices stochastiques.

Il est bon de faire cette vérification avant toute chose. **Cette situation se produit toujours avec les matrices stochastiques** (voir *Méthodes* du chapitre de probabilités). La somme des coefficients de chaque colonne égale 1, donc la factorisation ci-dessus est possible.

1.1.2 Techniques pour se dispenser du calcul de χ_A

Il n'est pas toujours nécessaire de calculer χ_A pour obtenir les valeurs propres : certaines se voient à l'œil nu. Les principaux recours sont :

1. Une observation attentive des colonnes ou lignes avec beaucoup de zéros.
2. Une observation attentive de la somme des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne.
3. Le théorème du rang appliqué à $A - \lambda \mathrm{I}_n$ pour de bons choix de λ.
4. La trace.

Détaillons.

Observation des colonnes ou lignes avec beaucoup de zéros. Les valeurs propres les plus faciles à repérer s'obtiennent lorsque tous les coefficients de la i^{e} colonne sont nuls *sauf éventuellement* $a_{i,i}$ (le coefficient diagonal). Dans ce cas, le coefficient $a_{i,i}$ est une valeur propre de A et E_i (le i^{e} vecteur colonne de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(K)$) est un vecteur propre associé (pourquoi ?).

Lorsque c'est la i^{e} LIGNE qui vérifie cette propriété, il reste vrai que $a_{i,i}$ est une valeur propre de A (on applique le raisonnement ci-dessus à $A^\top$ et on se souvient qu'une matrice et sa transposée ont mêmes valeurs propres), mais il devient en revanche faux que E_i est un vecteur propre. Attention !

Observation de la somme des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne. On en a déjà parlé ci-dessus pour le calcul du polynôme caractéristique, mais cette observation est profitable même quand on ne le calcule pas : si la somme des coefficients de chaque LIGNE est égale au même scalaire S, alors on vérifie par un calcul matriciel direct que S est une valeur propre de A, dont un vecteur propre associé est $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Si la propriété porte sur les COLONNES, il reste vrai que S est une valeur propre de A (on applique le raisonnement ci-dessus à $A^\top$ et on se souvient qu'une matrice et sa transposée ont mêmes valeurs propres), mais il devient en revanche faux que U est un vecteur propre. Attention !

Par le théorème du rang. Cela nécessite plus de nez : soustraire un bon multiple de l'identité permet parfois d'obtenir facilement une matrice non inversible. D'après le théorème du rang :

$$\text{si : } \operatorname{rang}(A - \lambda \mathrm{I}_n) < n, \text{ alors : } \dim(\ker(A - \lambda \mathrm{I}_n)) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda \mathrm{I}_n) > 0,$$

donc $\ker(A - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(K)}\}$ et λ est valeur propre de A. Cette approche a même l'avantage de donner la dimension du sous-espace propre associé ! (mais insuffisant si on a besoin de calculer explicitement la matrice de passage ensuite)

Pour savoir quels choix de λ tenter, cherchez les choix qui donneraient une colonne (ou ligne) **nulle**, ou qui donneraient des colonnes (ou lignes) **égales** (ou **opposées**). C'est le plus simple à examiner à l'œil nu. Avec l'expérience, vous arriverez à voir à l'œil nu des dépendances plus élaborés.

N'oubliez pas que la dimension du sous-espace propre associé à λ est un minorant de son ordre de multiplicité. Cette méthode fait donc davantage que de vous donner une valeur propre : plus la dimension du sous-espace propre associé à λ est élevée, et moins il reste de valeurs propres restantes à déterminer !

Par la trace. Elle permet, *si on connaît toutes les valeurs propres avec multiplicités sauf une*, d'en déduire la dernière. Après, en général, nous avons tout ce qu'il faut pour en déduire la diagonalisation de la matrice, sans avoir calculé le polynôme caractéristique.

Pour que la trace soit la somme des valeurs propres, encore faut-il que le polynôme caractéristique soit scindé. Pour cela :

— il suffit de se placer sur $\mathbb{C}$, au pire, quitte à parler des valeurs propres complexes ;

— si l'on a déjà déterminé $n-1$ valeurs propres de A, multiplicités comprises, alors χ_A est scindé.

Pensez à toutes ces observations avant de vous lancer dans un calcul !

Exemple 1. Déterminons les valeurs propres de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$. On note que la somme des coefficients de chaque colonne égale 2, donc 2 est valeur propre de A. De plus elle est manifestement de rang $3 < 4$, puisque $L_1 = L_3$, donc par le théorème du rang : $\dim(\ker(A)) = 1$. On en déduit que 0 est valeur propre de A. Le fait que la deuxième ligne soit égale à $E_2^\top$, où E_2 est le deuxième vecteur de la base canonique de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, donne une troisième valeur propre, à savoir 1 (on pouvait aussi trouver cette valeur propre en inspectant le rang de $A - \mathrm{I}_4$).

Il ne reste plus qu'une valeur propre à dénicher. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ la dernière valeur propre de A (avec répétition éventuelle). On a : $\mathrm{tr}(A) = 9$, mais la trace est aussi la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités, donc : $\mathrm{tr}(A) = 2 + 0 + 1 + \lambda = 3 + \lambda$. En comparant ces deux expressions, on trouve : $\lambda = 6$. En conclusion :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2,0,1,6\}.$$

1.2 Détermination des sous-espaces propres

Il n'y a pas grand'chose à raconter de ce côté : il s'agit de résoudre des systèmes linéaires à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. C'est-à-dire : pour déterminer les vecteurs propres de λ, on résout : $AX = \lambda X$, d'inconnue X, et on écrit cette égalité sous forme d'un système linéaire équivalent.

Vous savez *a priori* qu'il existe des solutions non nulles à cette équation si λ est une valeur propre : c'est la définition d'une valeur propre ! Trouver pour unique solution $X = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(K)}$ signifie que vous avez fait une erreur de calcul (soit dans la résolution du système linéaire, soit dans le calcul de χ_A), soyez-en conscients !

Pour vérifier vos calculs : vous pouvez regarder si les vecteurs que vous trouvez sont effectivement solutions de $AX = \lambda X$, en calculant AX.

Déterminer les sous-espaces propres sans résoudre $AX = \lambda X$. Notons que les commentaires ci-dessus (sommes des coefficients de chaque ligne égales, coefficients diagonaux...) permettent de trouver quelques vecteurs propres sans passer par la résolution de $AX = \lambda X$. Si, de plus, on connaît *a priori* la **dimension** des sous-espaces propres, soit :

— grâce au théorème du rang ;

— grâce aux ordres de multiplicité des valeurs propres, qui majorent ces dimensions ;

alors ces vecteurs propres connus peuvent suffire à engendrer les sous-espaces propres qui les contiennent, sans qu'il ne soit nécessaire de passer par la résolution de $AX = \lambda X$.

Exemple 2. La matrice : $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ a pour rang 1, donc son noyau (qui est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0) est de dimension 2. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe dans $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (qui est de dimension 3), on en déduit qu'il reste au plus un sous-espace propre, et que le cas échéant sa dimension égale 1.

Or la somme des coefficients de chaque ligne égale 3, donc 3 est une valeur propre de U et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé. D'après ce qui précède, le sous-espace propre associé à 3 est de dimension 1, donc le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ suffit à l'engendrer. Ainsi : $\ker(U-3\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Nous n'avons pas eu besoin de résoudre $UX=3X$ (et, d'ailleurs, on a la certitude d'avoir trouvé toutes les valeurs propres, pour des raisons dimensionnelles, et U est diagonalisable).

1.3 Un exemple standard : les matrices compagnons

Les matrices compagnons sont les matrices de la forme :

$$C_P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{p-1}\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_p(K).$$

On dit dans ce cas qu'il s'agit de la matrice compagnon du polynôme $P=X^p+\sum\limits_{k=0}^{p-1}a_iX^i\in K[X]$.

1.3.1 Réduction des matrices compagnons

Vous devez savoir démontrer que :

— la matrice compagnon de P a pour **polynôme caractéristique**... le polynôme P, justement ! Il est possible de le démontrer très rapidement en développant le déterminant de $X\mathrm{I}_p-C_P$ par rapport à la première ligne et en raisonnant par récurrence (nous avons là une exception très notable au fait de chercher à factoriser un déterminant dans le procédé de calcul) ;

— le **polynôme minimal** de C_P est également... le polynôme P !

— les **valeurs propres** de la matrice compagnon de P sont les **racines** de P ;

— les **sous-espaces propres** d'une matrice compagnon sont tous de **dimension** 1 ; celui associé à $\lambda\in K$ est engendré par :

$$X_\lambda=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\vdots\\\lambda^{n-1}\end{pmatrix},$$

ce qu'on démontre assez facilement en utilisant la méthode du pivot « à l'envers », c'est-à-dire en commençant par la dernière variable, et en remontant ;

— la matrice compagnon de P est diagonalisable si et seulement si P est **scindé et à racines simples** (c'est une conséquence de ce qui précède : pourquoi ?), et le cas échéant une matrice de passage possible est la matrice de Vandermonde associée aux racines de P.

La trigonalisation est plus délicate. Nous vous laissons vérifier en exercice :

Exercice 1. On suppose P scindé. Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(C_P)$ une valeur propre d'ordre de multiplicité $h\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note $X_\lambda^{(k)}$ le vecteur obtenu à partir de X_λ en dérivant k fois chaque composante (si l'on voit abusivement λ comme une variable). Montrer que la famille $\left(\frac{1}{k!}X_\lambda^{(k)}\right)_{0\leqslant k\leqslant h-1}$ est une base de $\ker\left((C_P-\lambda\mathrm{I}_n)^h\right)$, et en déduire une matrice triangulaire diagonale par blocs qui soit semblable à C_P.

1.3.2 Matrices compagnons et suites, équations différentielles

Les matrices compagnons apparaissent naturellement dans l'étude des suites récurrentes linéaires et équations différentielles, et c'est pourquoi vous gagnerez à les connaître.

Étude des suites récurrentes. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si l'on a une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} + a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n = 0,$$

alors en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{p,1}(K)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = C_P X_n.$$

(Le vérifier pour s'en convaincre, et ne pas compter sur un bête effort de mémoire pour obtenir la bonne matrice !)

Cette égalité diminue l'ordre de la relation de récurrence, au prix d'un accroissement dimensionnel.

Pour en déduire l'expression de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a deux approches dont nous comparerons les mérites. Dans les deux cas, on commence par réduire la matrice C_P, en trouvant $Q \in \mathrm{GL}_p(K)$ inversible et $D \in \mathrm{M}_p(K)$ diagonale ou triangulaire telles que : $C_P = QDQ^{-1}$. Pour plus de détails sur la réduction des matrices compagnons : voir la section 1.3.1. Ensuite :

1. **Première approche.** On change de vecteur inconnu en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = Q^{-1}X_n$, et on remarque que la relation vérifiée par X_n équivaut, après multiplication à gauche de chaque membre de l'égalité par Q^{-1}, à : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = DY_n$. En regardant ligne à ligne cette égalité, on note que les composantes de la suite $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ sont des suites **géométriques** si D est diagonale : on sait les expliciter, et donc Y_n est explicite pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit X_n grâce à la relation : $X_n = QY_n$.

   Si D n'est pas diagonale, alors on obtient un « second membre » dans les relations vérifiées par les composantes de $(Y_n)_{n \geqslant 0}$, mais dont la gestion n'est pas si pénible *via* un télescopage adéquat : voir l'exemple 4 ci-dessous. → page 6

   On remarque que le calcul de Q^{-1} est totalement inutile suivant cette approche. NE LE FAITES PAS.
2. **Deuxième approche.** La relation ci-dessus implique par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = (C_P)^n X_0$. Ainsi calculer X_n revient à calculer $(C_P)^n$, ce qu'on sait faire : si D est diagonale, alors le calcul de D^n est immédiat et on en déduit $(C_P)^n$ *via* la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ (C_P)^n = PD^nP^{-1}$. Cela nécessite cependant de calculer P^{-1}.

   Noter que la section 4.1 donne des méthodes de calcul des puissances ne nécessitant pas de réduire C_P (mais tout de même de connaître les valeurs propres). Cela peut notamment être intéressant si C_P n'est pas diagonalisable et que vous ne savez pas la trianguler (ou ne le voulez pas). → page 27

On obtient alors u_n en retenant le premier coefficient de X_n. On peut très légèrement diminuer la taille des matrices manipulées en notant que u_n est le produit scalaire de E_1 (premier vecteur de la base canonique) par X_n, c'est-à-dire : $u_n = (1\ 0\ 0)X_n$. En remplaçant X_n par PDP^{-1} et en commençant par effectuer le produit $(1\ 0\ 0)P$, vous avez une matrice carrée de moins (sachant que le produit matriciel par D n'est guère effrayant).

Mérites comparés. La première approche a l'avantage d'être beaucoup moins calculatoire (pas de calcul impliquant trois matrices carrées, pas de calcul de P^{-1}), mais la seconde a l'avantage d'expliciter la dépendance en les premiers termes (encodés par X_0). Y songer si vous cherchez une suite avec des conditions initiales prescrites. Cependant, ne pas savoir comment une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ dépend de ses premiers termes n'est pas gênant si l'on veut seulement avoir une base de l'ensemble des suites qui conviennent (à nuancer tout de même, comme vous pouvez en juger dans l'exemple suivant, lorsqu'à la fin on veut déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les suites trouvées soient réelles).

Exemple 3. Déterminons les suites *réelles* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}-u_{n+2}+u_{n+1}-u_n=0$. Posons : $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, et : $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$. L'égalité précédente équivaut alors à : $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1}=CX_n$. Le calcul du polynôme caractéristique, en tirant profit de la somme des coefficients de chaque ligne qui vaut 1, mène à : $\chi_C=(X-1)(X^2+1)=(X-1)(X+i)(X-i)$. D'après ce qu'on a raconté dans la section 1.3.1, la matrice C est diagonalisable et on a : $C=PDP^{-1}$, avec : ← page 4

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&i&-i\\1&-1&-1\end{pmatrix},\quad\text{et :}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix}.$$

La suite du raisonnement dépend selon l'approche suivie.

Première approche. Posons : $\forall n\in\mathbb{N},\ Y_n=P^{-1}X_n$. Après multiplication à gauche de chaque membre de l'égalité : $X_{n+1}=CX_n$, par P^{-1}, on obtient : $\forall n\in\mathbb{N},\ Y_{n+1}=P^{-1}CX_n=DP^{-1}X_n=DY_n$. Si l'on note a_n, b_n et c_n les coordonnées de Y_n pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'égalité $Y_{n+1}=DY_n$ donne, coordonnée par coordonnée :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=a_n,\quad b_{n+1}=ib_n,\quad c_{n+1}=-ic_n.$$

On en déduit : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=a_0,\ b_n=i^nb_0,\ c_n=(-i)^nc_0$. L'égalité : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(1\ 0\ 0)X_n=(1\ 0\ 0)PY_n$, permet alors d'en déduire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=a_n+b_n+c_n=a_0+i^nb_0+(-i)^nc_0.$$

Cependant cela ne définit pas nécessairement une suite *réelle*. Pour cela, on note que l'on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\mathbb{R}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ \overline{u}_n=u_n\iff\forall n\in\mathbb{N},\ \overline{a_0}+(-i)^n\overline{b_0}+i^n\overline{c_0}=a_0+i^nb_0+(-i)^nc_0.$$

Pour identifier, nous avons besoin de la liberté de la famille $\left((1)_{n\geqslant 0},(i^n)_{n\geqslant 0},((-i)^n)_{n\geqslant 0}\right)$. Deux arguments possibles : 1° lorsqu'on écrit une relation de dépendance linéaire entre ces trois suites, et qu'on la regarde pour $n\in\{0,1,2\}$, on voit qu'on obtient un système dont l'inversibilité équivaut à l'inversibilité de la matrice de Vandermonde associée à 1, i et $-i$: on sait qu'elle est vérifiée, 2° c'est une famille de vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par $(u_n)_{n\geqslant 0}\mapsto(u_{n+1})_{n\geqslant 0}$, associés à des valeurs propres différentes. Ceci étant dit, l'identification donne : $a_0=\overline{a_0}$ (donc a_0 est réel), et : $b_0=\overline{c_0}$. Ceci permet d'écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=a_0+2\mathrm{Re}\,(i^nb_0)=a_0+2\mathrm{Re}(b_0)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-2\mathrm{Im}(b_0)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Ceci montre que toute suite réelle vérifiant la relation de récurrence de départ est combinaison linéaire de $(1)_{n\geqslant 0}$, $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\geqslant 0}$. La réciproque est facile à vérifier.

Deuxième approche. Par récurrence, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=C^nX_0=PD^nP^{-1}X_0$. On calcule P^{-1} et on en déduit pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}u_n&=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}PD^nP^{-1}X_0=\frac14\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i^n&0\\0&0&(-i)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&2\\1+i&-2i&-1+i\\1-i&2i&-1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\\u_2\end{pmatrix}\\&=\frac12\left(1+\frac{(1+i)i^n+(1-i)(-i)^n}{2}\right)u_0-\frac{i^{n+1}+(-i)^{n+1}}{2}u_1+\frac12\left(1-\frac{(1-i)i^n+(1+i)(-i)^n}{2}\right)u_2\\&=\frac12\left(1+\mathrm{Re}((1+i)i^n)\right)u_0-\mathrm{Re}(i^{n+1})u_1+\frac12\left(1-\mathrm{Re}((1-i)i^n)\right)u_2\\&=\frac12\left(1+\sqrt2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)\right)u_0-\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)u_1+\frac12\left(1-\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)\right)u_2.\end{aligned}$$

On observe qu'ici, on n'a pas besoin de faire d'effort approfondi pour obtenir la forme des suites *réelles*.

Exemple 4. Déterminons les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}+u_{n+2}-u_{n+1}-u_n=0$. Posons : $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$, et : $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$. L'égalité précédente équivaut alors à : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$X_{n+1} = CX_n$. Le calcul du polynôme caractéristique, en tirant profit de la somme des coefficients de chaque ligne qui vaut 1, mène à : $\chi_C = (X+1)^2(X-1)$. D'après ce qu'on a raconté dans la section 1.3.1, on ← page 4 sait que la matrice C n'est pas diagonalisable. Cependant, en suivant les indications de la section 3 sur la → page 20 triangulation (ou celles de l'exercice de la section précédente), on montre que l'on a $C = PTP^{-1}$, avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et :} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voyons comment poursuivre selon l'approche choisie.

Première approche. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$. Après multiplication à gauche de chaque membre de l'égalité : $X_{n+1} = CX_n$, par P^{-1}, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = P^{-1}CX_n = TP^{-1}X_n = TY_n$. Si l'on note a_n, b_n et c_n les coordonnées de Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $Y_{n+1} = TY_n$ donne, coordonnée par coordonnée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -a_n + b_n, \quad b_{n+1} = -b_n, \quad c_{n+1} = c_n.$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-1)^n b_0$, $c_n = c_0$, $a_{n+1} = -a_n + (-1)^n b_0$. La relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas usuelle, mais on la détermine *via* la méthode du télescopage dont je parle dans *Méthodes*, *Relations de récurrence dépendant de n*. On multiplie l'égalité précédente par $(-1)^{n+1}$ et on somme. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n-1}((-1)^{k+1}a_{k+1} - (-1)^k a_k) = -\sum_{k=0}^{n-1} b_0 = -nb_0, \quad \text{d'où :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = (-1)^n (a_0 - nb_0).$$

L'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1\ 0\ 0)X_n = (1\ 0\ 0)PY_n$, permet alors d'en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a_n + c_n = (-1)^n (a_0 - nb_0) + c_0.$$

Deuxième approche. En calculant T^n *via* la formule du binôme de Newton (voir la section 4.2), on → page 28 trouve : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus : $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} PT^nP^{-1}X_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3u_0 - 2u_1 - u_2 \\ 2u_0 - 2u_2 \\ u_0 + 2u_1 + u_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\left(3(-1)^n + 2n(-1)^{n-1} + 1\right) u_0 + \frac{1 - (-1)^n}{2} u_1 + \frac{1}{4}\left(-(-1)^n - 2n(-1)^{n-1} + 1\right) u_2. \end{aligned}$$

À réarrangement près, on retrouve bien la même chose qu'avec la première approche. On pourra aussi s'entraîner à obtenir C^n sans trianguler C (cf. la section 4.1).

Exercice 2. Retrouver les résultats du cours de 1re année concernant les relations de récurrence linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

On observe que pour quiconque maîtrise la réduction des matrices compagnons, l'étude des suites récurrentes n'a plus de mystère ! (Le lemme des noyaux est cependant plus intéressant.)

Étude des équations différentielles linéaires. Si l'on nous demande d'étudier les solutions y de :

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_0 y = 0,$$

notons qu'en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$, on a : $Y' = C_P Y$. Nous expliquons dans le document *Méthodes* du chapitre XI comment, à partir de cette relation, obtenir les solutions de cette équation différentielle.

C'est essentiellement la même approche que pour les suites : réduire C_P ainsi : $C_P = PDP^{-1}$, et poser : $Z = P^{-1}Y$, permet de se ramener à un système différentiel $Z' = DZ$ avec D diagonale ou triangulaire. Identifier ligne par ligne donne trois équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre. On sait résoudre et en déduire Z, puis Y *via* la relation $Y = PZ$, puis y en retenant sa première composante.

1.3.3 Matrices compagnons et racines de polynômes

Si C_P est la matrice compagnon de P, alors : $P = \chi_{C_P} = \pi_{C_P}$. Cela veut dire en particulier que les racines de P sont les valeurs propres de χ_{C_P} et que, pour tout polynôme P, on peut ramener l'étude de ses racines à l'étude des valeurs propres d'une certaine matrice (la matrice compagnon). L'intérêt de l'approche est qu'on peut utiliser des techniques d'algèbre linéaire pour étudier des valeurs propres (chose qui est *a priori* impossible pour les racines d'un polynôme). On pensera donc à passer par la matrice compagnon de P dans les situations suivantes :

— lorsqu'on ne s'intéresse non pas aux racines de P, mais à ses puissances : la triangulation donne en effet un lien très simple entre les valeurs propres complexes de C_P et celles de $(C_P)^k$;

— lorsqu'on cherche une relation entre les racines de P et les coefficients de P, en dehors des relations coefficients-racines déjà connues.

Pour ce dernier point : les matrices vérifient de nombreuses identités reliant leurs valeurs propres et leurs coefficients :

— si λ est une valeur propre de C_P, alors c'est aussi une valeur propre de $C_P^\top$ et on a, pour tout vecteur propre X associé : $C_P^\top X = \lambda X$, ce qui donne une relation non triviale entre λ et les coefficients de $C_P^\top$, et donc entre λ et les coefficients de P (pourquoi parler de $C_P^\top$ plutôt que de C_P ? parce que la relation $C_P X = \lambda X$ équivaut exactement à $P(\lambda) = 0$ et n'apporte pas de plus-value) ;

— plus généralement : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(C_P^\top)^k X = \lambda^k X$, ce qui fournit un lien entre les puissances de λ et les coefficients de $C_P^\top$, puis de P ;

— la trace et le déterminant de C_P et de ses puissances (après triangulation : voir section 4) s'expriment en fonction des valeurs propres de C_P (et donc des racines de P). → page 27

Exemple 5. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire, dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines complexes avec répétitions. On veut montrer : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \in \mathbb{Z}$. Pour cela, on note que si C_P est la matrice compagnon de P, alors : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \operatorname{tr}\left((C_P)^2\right)$ (cela nécessite de trianguler C_P). Or C_P est à coefficients entiers puisque P l'est, donc C_P^2 l'est aussi et sa trace également : d'où le résultat.

Exercice 3. Démontrer ce même résultat sans recourir aux matrices compagnons, mais par un bon usage des fonctions symétriques élémentaires.

Exercice 4. Vérifier l'affirmation ci-dessus selon laquelle la relation $C_P X = \lambda X$, pour X vecteur propre de C_P, équivaut exactement à $P(\lambda) = 0$.

2 ✓ Diagonalisation d'un endomorphisme abstrait

Cela peut être plus compliqué, *sauf dans le cas où il s'agit d'un endomorphisme remarquable, qu'on sait être toujours diagonalisable (endomorphisme symétrique, projecteur, symétrie...)*. Sinon :

1. Il est défini explicitement par sa correspondance, mais sur un espace vectoriel abstrait : cas d'un endomorphisme défini sur un espace de polynômes, de fonctions, de matrices, etc.
2. Il est défini en fonction d'un *autre* endomorphisme dont nous savons qu'il est diagonalisable (ou autre condition relative à la réduction).
3. Il n'est pas défini explicitement, mais vérifie une identité du type $f^3 = \mathrm{Id}_E$, $f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E = 0$, etc.
4. Il appartient à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.
5. Il n'est pas défini explicitement, mais vérifie des conditions précises sur le rang, la trace, etc.

Ces différents cas de figure se recoupent très souvent. Ne pas faire une lecture cloisonnée des différents sous-cas détaillés ci-dessous.

Endomorphisme défini explicitement. À moins que sa matrice dans une certaine base ne soit facile à écrire (ce qui est rarement le cas dans $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ avec n quelconque), il n'y a pas souvent le choix : on revient à la définition, en cherchant pour quelles valeurs λ l'équation $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ admet au moins une solution $\vec{x}$ NON NULLE.

Étudiez plus en détails les cas particuliers des sections 2.1 à 2.5. → page 10

Endomorphisme défini à l'aide d'un autre endomorphisme. Le critère polynomial de diagonalisation sert aussi (surtout ?) lorsque la diagonalisation d'un endomorphisme f dépend de celle d'un autre endomorphisme g (de même si on remplace l'endomorphisme par une matrice). Si, pour tout polynôme P, il existe une relation simple entre $P(f)$ et $P(g)$, alors il est raisonnable d'espérer montrer que l'existence d'un polynôme annulateur scindé et à racines simples de g donne un polynôme annulateur de f également.

Pour trouver une telle relation, on commence par comparer f^k et g^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, et on étend la relation à tout polynôme par linéarité (en cas de facteur k devant g^k, penser à reconnaître une dérivée).

C'est notamment le cas lorsque :

— l'on étudie un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont la correspondance fait intervenir une matrice *fixée* de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (voir exemple ci-dessous) ;

— l'on réduit des matrices diagonales par blocs : voir la section 2.5.1. → page 14

Exemple 6. Si l'on étudie l'endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\varphi_M : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & AM \end{cases},$$

où M est une matrice fixée, il est délicat d'espérer étudier la matrice de φ_M relativement à la base canonique, ou de déterminer ses sous-espaces propres explicitement, vu qu'on ne connaît pas M (encore que...). En revanche, si l'on remarque que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(\varphi_M) = \varphi_{P(M)}$, alors il devient facile de montrer que M vérifie le critère polynomial de diagonalisation si et seulement si φ_M le vérifie aussi (avec les mêmes polynômes annulateurs).

Exercice 5.

1. Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a bien : $P(\varphi_M)(A) = \varphi_{P(M)}(A)$.
2. En déduire que φ_M est diagonalisable si et seulement si M l'est.

Endomorphisme vérifiant une identité polynomiale. Dans ce cas, penser à interpréter l'identité en termes de polynôme annulateur. Par exemple, dire que $f^3 = \mathrm{Id}_E$ équivaut au fait que $X^3 - 1$ soit un polynôme annulateur de f. On doit dans ce cas avoir le critère polynomial de diagonalisation en tête.

L'autre propriété des polynômes annulateurs, relativement à la diagonalisation, est très utile pour déterminer le spectre : les valeurs propres d'un endomorphisme sont *parmi* les racines d'un polynôme annulateur.

Appartenance à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Si ce groupe est FINI de cardinal p, alors : $f^p = \mathrm{Id}_E$, donc $X^p - 1$ est un polynôme annulateur de f. On connaît les racines de ce polynôme, qui sont les racines p^{es} de l'unité.

Conséquence heureuse : **toute matrice d'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable**, et **ses valeurs propres sont des racines de l'unité** ! En effet, $X^p - 1$ est scindé et à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Conditions sur le rang, la trace, etc. Le théorème du rang nous permet de déduire la dimension d'un sous-espace propre : si $\mathrm{rang}(f - \lambda\mathrm{Id}_E) = k$, alors $\dim(\ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - k$. Si cette dimension est suffisamment élevée, alors cela assure qu'il reste peu de valeurs propres (vu que les sous-espaces propres sont en somme directe, la somme de leurs dimensions ne peut pas excéder la dimension de l'espace ambiant). Il reste à voir en quoi les autres informations permettent d'en déduire les valeurs propres restantes, et si possible la dimension de leurs sous-espaces propres associés ; on n'oublie pas que la trace est la somme des valeurs propres, que les valeurs propres sont parmi les racines des polynômes annulateurs, etc.

Étude de f abstrait : quel critère de diagonalisation privilégier ?

1. **Critère avec les sous-espaces propres.** Y songer lorsque f :
   — est explicite (même s'il est défini sur un espace abstrait) ;
   — vérifie par hypothèse des conditions sur le rang ou le noyau ;
2. **Critère polynomial.** Y songer lorsque f :
   — appartient à un sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}(E)$ (le théorème de Lagrange donne $X^{\mathrm{card}(G)}-1$ pour polynôme annulateur) ;
   — dépend d'un *autre* endomorphisme g qui est diagonalisable (exprimer les puissances de f en fonction de celles de g, puis $P(f)$ en fonction de $P(g)$ par linéarité).

Il n'y a cependant pas de règle systématique et les deux approches peuvent être combinées.

2.1 Le cas particulier par excellence : endomorphisme n'ayant qu'une seule valeur propre

Un endomorphisme diagonalisable n'ayant qu'une seule valeur propre est une homothétie. Sachez le démontrer :

— en appliquant directement la définition d'endomorphisme (ou matrice) diagonalisable ;
— en utilisant le critère de diagonalisation ;
— en utilisant le critère polynomial de diagonalisation.

Exercice 6. Utiliser ce résultat pour démontrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X-1) \end{cases}$ n'est pas diagonalisable.

2.2 Cas particulier fréquent : endomorphismes de rang 1

Les endomorphismes de rang 1 sont diagonalisables si et seulement si leur trace est non nulle : c'est un exercice classique. Sachez le faire à l'aide des deux critères de diagonalisation. Dans le cas où l'on se sert du critère polynomial, il est nécessaire de savoir démontrer que si A est une matrice de rang 1, alors $A^2 = \mathrm{tr}(A)\cdot A$. Sachez le démontrer au choix :

— en écrivant explicitement les coefficients de A (si son rang égale 1, on sait que toutes les colonnes sont proportionnelles, donc son écriture est simplifiée), et en calculant les coefficients de A^2 ;
— en montrant d'abord qu'il existe deux vecteurs colonnes X et Y tels que $A = XY^\top$, et en calculant A^2 avec cette expression ;
— en montrant que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ (passer par l'endomorphisme canoniquement associé f, et écrire sa matrice dans une base adaptée à $\ker(f)$), et en vérifiant la relation voulue avec cette matrice.

Savoir faire cet exercice est très bien... Mais savoir y penser dans les cas explicites est encore mieux. Dès que vous voyez un endomorphisme explicite, **où il est manifeste que son image est toujours proportionnelle au même vecteur** (exemples :

$$f_A : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(M)A \end{cases} \quad (\text{où } A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})), \qquad g_{\vec{a}} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \mapsto & \langle \vec{x}, \vec{a}\rangle\, \vec{a} \end{cases} \quad (\text{où } \vec{a} \in \mathbb{R}^n)),$$

alors notez qu'il est de rang 1 (sauf s'il est proportionnel au vecteur nul...), et vous savez donc *a priori* comment partir pour déterminer à quelle condition il est diagonalisable.

Hélas, la trace n'est pas toujours calculable facilement, comme on le voit dans les deux exemples ci-dessus. Mais ce n'est pas grave : en calculant l'endomorphisme au carré (composé avec lui-même, donc), la théorie ci-dessus nous assure qu'on tombe nécessairement sur un multiple de lui-même. Cela nous donne un polynôme annulateur de degré 2, et donc les valeurs propres de l'endomorphisme, voire une réponse directe à la question de la diagonalisation (s'il est scindé et à racines simples).

Déterminer si un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable

1. Calculer $f(f(\vec{x}))$ pour tout $\vec{x} \in E$; vous en déduirez $f^2 = \bigstar \cdot f$.
2. On en déduit que $X^2 - \bigstar X = X(X - \bigstar)$ est un polynôme annulateur de f.
   (a) Si $\bigstar \neq 0$, alors il est scindé et à racines simples, donc f est diagonalisable.
   (b) Si $\bigstar = 0$, alors 0 est l'unique valeur propre, donc f n'est pas diagonalisable sauf si $f = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (argument classique).

Exemple 7. Reprenons l'endomorphisme f_A ci-dessus. On a :

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_A(f_A(M)) = f_A(\mathrm{tr}(M)A) = \mathrm{tr}(M)f_A(A) = \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)A = \mathrm{tr}(A)f_A(M), \quad (1)$$

donc : $f_A^2 = \mathrm{tr}(A)f_A$, et on en déduit que $X^2 - \mathrm{tr}(A)X = X(X - \mathrm{tr}(A))$ est un polynôme annulateur de f_A (2). Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors f_A est annulé par un polynôme scindé et à racines simples, donc est diagonalisable (2.(a)). Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors $X^2 - \mathrm{tr}(A)X = X^2$ admet uniquement 0 comme racine, donc f_A admet 0 comme unique valeur propre ; dans ce cas, si f_A est diagonalisable, alors on doit avoir $f_A = 0_{\mathrm{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))}$ (pourquoi ?), ce qui n'est possible que pour $A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$ (2.(b)).

Dans un exercice avec un endomorphisme défini sur un espace abstrait, commencez par vérifier s'il est clairement de rang 1 ou non. Cela prend une poignée de secondes.

Exercice 7. Étudier la diagonalisation de l'endomorphisme $g_{\vec{a}}$ défini ci-dessus.

2.3 Cas particulier fréquent dans $K[X]$ et les espaces de fonctions : la dérivation

Lorsque l'espace vectoriel étudié est $K[X]$, $K_n[X]$ ou un espace de fonctions, on vous demande souvent de déterminer les éléments propres d'un polynôme en l'endomorphisme de dérivation. Par exemple :

$$f : \begin{cases} K[X] & \to & K[X] \\ P & \mapsto & P'' - XP \end{cases}, \quad g : \begin{cases} K[X] & \to & K[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{cases}, \text{etc.}$$

Dans ce cas, voici comment procéder en général :

1. On prend $\lambda \in K$, et on évalue l'équation $f(P) = \lambda P$ en tout réel x : elle équivaut alors à une équation différentielle linéaire, dépendant de λ. Avec les exemples f et g ci-dessus, cela nous ramène aux équations différentielles :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - xy(x) = \lambda y(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},\ xy'(x) = \lambda y(x).$$
2. On résout ces équations différentielles linéaires. Si l'espace vectoriel d'étude est un espace de fonctions (dérivables, de classe C^∞...), l'étude s'arrête ici : s'il existe $\lambda \in K$ tel que l'équation différentielle étudiée ait des solutions non nulles, alors λ est une valeur propre, et le sous-espace propre associé est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle.
3. Si l'espace vectoriel d'étude est un espace de polynômes, alors il s'agit encore de déterminer pour quelles valeurs de $\lambda \in K$ les solutions trouvées ci-dessus sont *polynomiales*. Chaque λ pour laquelle c'est le cas est une valeur propre, et l'espace vectoriel constitué des polynômes solutions est le sous-espace propre associé.

2.4 Cas particulier fréquent dans les espaces abstraits : les multiples de transvections

Je fais allusion aux endomorphismes de la forme :

$$f : \begin{cases} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \alpha\vec{x} + \varphi(\vec{x})\vec{a} \end{cases},$$

où $\vec{a}$ est un vecteur non nul de E *fixé*, et φ une forme linéaire sur E. Pour les reconnaître, il faut guetter la forme :

$$f : \text{un vecteur} \mapsto \text{un multiple de ce vecteur} + \text{un multiple d'un autre vecteur } \textit{fixé}.$$

Ainsi, les applications suivantes rentrent dans ce cas de figure (on prend $n \geqslant 1$) :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P + \left(\int_0^1 P\right) \cdot 1 \end{cases}, \quad \psi : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & nM + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n \end{cases}, \quad \phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(0) \cdot X + P \end{cases}.$$

Pour étudier si elles sont diagonalisables, nous pourrions chercher à résoudre $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, en voyant à quelle condition sur λ il existe des solutions non nulles. On observe que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ équivaut à $(\lambda - \alpha)\vec{x} = \varphi(\vec{x})\vec{a}$, ce qui conduit à deux distinctions de cas :

— Si $\lambda = \alpha$, alors l'équation est vérifiée à la condition que $\varphi(\vec{x}) = 0$, c'est-à-dire : $\vec{x} \in \ker(\varphi)$; ainsi α est valeur propre, et le sous-espace propre associé est $\ker(\varphi)$, de dimension $\dim(E) - 1$;

— si $\lambda \neq \alpha$, alors $\vec{x} = \frac{\varphi(\vec{x})}{\lambda - \alpha}\vec{a}$, donc $\vec{x}$ doit être proportionnel à $\vec{a}$ pour être vecteur propre ; réciproquement, poser $\vec{x} = \vec{a}$ montre que $\vec{a}$ est vecteur propre associé à $\alpha + \varphi(\vec{a})$.

À ce stade, on est en mesure de conclure : si ces deux valeurs propres sont distinctes (c'est-à-dire : $\varphi(\vec{a}) \neq 0$), alors la somme des dimensions égale $\dim(E)$ et le critère de diagonalisation est vérifié. Si les deux valeurs propres sont égales, alors f n'a qu'une valeur propre et n'est diagonalisable qu'à la condition d'être une homothétie (voir section 2.1), ce qui impose $\vec{a} = \vec{0}$ (impossible) ou $\varphi = 0$ (faux en général). Le ← page 10
problème est résolu dans tous les cas.

Ayez bien en tête ces deux étapes : **la distinction de cas**, et **chercher une solution sous forme d'un multiple de $\vec{a}$**.

Il y a toutefois plus direct, et cette méthode vous permettra d'aller beaucoup plus vite sans vous encombrer de calculs ! En effet, nous avons deux vecteurs propres « évidents » :

(∗) Tout vecteur $\vec{x}$ du noyau de φ, puisque dans ce cas : $f(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$; ainsi α est la valeur propre « évidente » associée, et le sous-espace propre associé est (ou contient) $\ker(\varphi)$;

(†) Le vecteur $\vec{a}$, puisque : $f(\vec{a}) = (\alpha + \varphi(\vec{a}))\,\vec{a}$; ainsi $\alpha + \varphi(\vec{a})$ est la valeur propre « évidente » associée, et pour des raisons de contrainte dimensionnelle imposée par le sous-espace propre associé à α, le sous-espace propre associé est engendré par $\vec{a}$ (la somme des dimensions ne doit pas excéder $\dim(E)$, or $\ker(\varphi)$ est de dimension $\dim(E) - 1$).

On en déduit que si $\varphi(\vec{a}) \neq 0$, alors le critère de diagonalisation est vérifié avec ces deux sous-espaces propres « évidents », et donc f est diagonalisable. Si $\varphi(\vec{a}) = 0$, il faut travailler un peu plus : voir plus haut.

Exemple 8. Reprenons l'exemple $\psi : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & nM + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n \end{cases}$ ci-dessus. On remarque que $\psi(\mathrm{I}_n) = (n + \mathrm{tr}(\mathrm{I}_n))\mathrm{I}_n = 2n\mathrm{I}_n$ (†), et $\mathrm{I}_n \neq 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$ donc I_n est un vecteur propre de ψ associé à la valeur propre $2n$. On en déduit déjà :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathrm{I}_n) \subseteq \ker(\psi - 2n\mathrm{I}_n), \text{ donc : } \dim(\ker(\psi - 2n\mathrm{I}_n)) \geqslant 1.$$

De plus, pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle de trace nulle, on a $\psi(M) = nM$ (∗), donc n est une valeur propre de ψ, et des vecteurs propres associés sont des matrices non nulles de trace nulle. Or on a : $\dim(\ker(\mathrm{tr})) = n^2 - 1$ (c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc un hyperplan), et on en déduit :

$$\ker(\mathrm{tr}) \subseteq \ker(\psi - n\mathrm{I}_n), \text{ donc : } \dim(\ker(\psi - n\mathrm{I}_n)) \geqslant n^2 - 1.$$

Ainsi on a l'encadrement :

$$n^2 \geqslant \dim(\ker(\psi - 2n\mathrm{I}_n)) + \dim(\ker(\psi - n\mathrm{I}_n)) \geqslant 1 + (n^2 - 1) = n^2,$$

ce qui n'est possible que si $\dim(\ker(\psi - 2n\mathrm{I}_n)) + \dim(\ker(\psi - n\mathrm{I}_n)) = n^2 = \dim(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$. On en déduit que ψ est diagonalisable d'après le critère de diagonalisation.

Retenez l'approche que vous préférez. **Elle est efficace surtout pour un endomorphisme défini sur** $\mathrm{M}_n(K)$. Au contraire, elle est une perte de temps si la matrice de l'endomorphisme (dans une certaine base) est facile à obtenir, *et est triangulaire*. On peut en effet démontrer que dans une base adéquate, une matrice de transvection est triangulaire avec *un seul* coefficient non nul hors de la diagonale. Vous conviendrez que dans ce cas, l'étude matricielle est tout de même plus rapide.

Exemple 9. Reprenons l'exemple $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P + \left(\int_0^1 P\right) \cdot 1 \end{cases}$ ci-dessus. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\varphi\left(X^k\right) = X^k + \frac{1}{k+1}$. Sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(X^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est donc :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement que φ admet 1 comme valeur propre avec multiplicité n (attention au fait qu'il y ait $n+1$ lignes et colonnes), et 2 avec multiplicité 1. De plus, on obtient facilement que $M - \mathrm{I}_{n+1}$ est de rang 1, donc d'après le théorème du rang : $\dim(\ker(M - \mathrm{I}_{n+1})) = n$. De même, $\dim(\ker(M - 2\mathrm{I}_{n+1})) = 1$. Les dimensions et les ordres de multiplicité coïncident, donc φ est diagonalisable d'après le critère de diagonalisation.

Exercice 8. Déterminer si l'endomorphisme $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(0) \cdot X + P \end{cases}$ est diagonalisable.

2.5 Réduction de matrices par blocs : trois méthodes

Nous donnons ici des **pistes** (il n'y a pas de méthode générale et on doit parfois vous guider) pour étudier la réduction de matrices par blocs, de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A \end{pmatrix}, \quad \text{ou } M = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \\ A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}, \quad \text{ou } M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}, \quad \text{etc.},$$

où les blocs (en particulier A ici) peuvent aussi bien être explicites qu'abstraits (dans ce dernier cas, on vous demande rarement de montrer que la matrice M est diagonalisable, mais plutôt de trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'elle le soit).

Dans ces cas-là, il y a essentiellement trois axes de réflexion pour étudier la réduction de M :

— **méthode 1 :** on regarde si, pour tout $P \in K[X]$, on a une relation simple entre $P(A)$ et $P(M)$, de sorte que si A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples P, alors M aussi, ou inversement (c'est dans la lignée de ce que nous disions dans la section 2, sur les endomorphismes dépendant d'un autre) ;

— **méthode 2 :** on regarde si χ_M s'exprime aisément à l'aide de χ_A (pour cela vous aurez besoin de l'identité donnée dans les « compléments sur la 2e méthode »), afin d'en déduire une expression des valeurs propres de M en fonction de celles de A ; si c'est insuffisant pour conclure, on essaie ensuite d'exprimer les vecteurs propres de M en fonction de ceux de A, en regardant *au brouillon* ce que l'égalité $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ implique comme relations entre A, X et Y ; si l'on a réussi, on peut alors fabriquer une base de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de M, à l'aide d'une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A (si A est diagonalisable) ;

— **méthode 3 :** on essaie *au brouillon* de résoudre l'exercice **en remplaçant les blocs par des réels ou complexes pertinents** (on remplace I_n par 1, et A par $a \in \mathbb{C}$, etc., ce qui permet de se ramener à des matrices d'ordre 2 très simples à réduire), de sorte à obtenir une relation de la forme $M' = PDP^{-1}$, où M' est la matrice d'ordre 2 obtenue en remplaçant les blocs par des scalaires, et

P, D, P^{-1} sont TOUTES LES TROIS EXPLICITES (notez que P^{-1} aussi doit être explicitée) ; alors, on *conjecture* que la matrice M vérifie la même relation, où l'on remplace les scalaires dans P et D par des blocs à nouveau (on remplace les 1 par des I_n, les 0 par $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, etc.), et on vérifie la conjecture par un calcul concret.

Nous détaillons les méthodes 2 et 3 plus bas.

2.5.1 Comment déterminer si la 1re méthode est pertinente

Bien qu'il soit difficile de dire quelle méthode utiliser en toute généralité, notons qu'il y a un moyen de trancher si la première méthode ci-dessus est pertinente : regardez d'abord si M^k s'exprime aisément à l'aide de A^k (et d'autres blocs éventuellement) pour tout $k \in \mathbb{N}$; vous aurez souvent besoin de regarder ce qu'il se passe pour $k = 2$ ou $k = 3$, avant de conjecturer et généraliser une relation pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si c'est le cas, alors en écrivant $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$, vous en déduirez par linéarité une expression de $P(M)$ en fonction de $P(A)$ pour tout polynôme P, et donc en particulier pour des polynômes annulateurs bien choisis (si les hypothèses en assurent l'existence : par exemple si A est diagonalisable, d'après le critère polynomial de diagonalisation).

Exemple 10. (Cas où la 1re méthode est pertinente) Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$. Pour juger si la 1re méthode est ici pertinente, tentons d'abord d'exprimer M^k en fonction de A^k pour tout entier k. Une récurrence soignée permet de démontrer que pour tout entier k NON NUL, on a : $M^k = \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$, tandis que si $k = 0$ on a évidemment $M^0 = \mathrm{I}_{2n}$ par définition. On en déduit que, si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, alors :

$$\begin{aligned} P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k = a_0 \mathrm{I}_{2n} + \sum_{k=1}^{p} a_k \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} &= a_0 \mathrm{I}_{2n} + \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p} a_k A^k & \sum\limits_{k=1}^{p} a_k A^k \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} \\ &= a_0 \mathrm{I}_{2n} + \begin{pmatrix} P(A) - a_0 \mathrm{I}_n & P(A) - a_0 \mathrm{I}_n \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} \\ &= a_0 \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & -\mathrm{I}_n \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

À ce stade, le doute est permis sur la pertinence de la 1re méthode, bien qu'on ait une relation simple entre $P(M)$ et $P(A)$, à cause de la matrice parasite $\begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & -\mathrm{I}_n \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Néanmoins on constate que si P est choisi de sorte que $a_0 = 0$ (ce qui revient à dire que $P(0) = 0$), alors : $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$. La 1re méthode peut alors être pertinente *si de bonnes hypothèses* nous autorisent à choisir un polynôme P tel que P soit un polynôme annulateur de A ou M ET vérifiant $P(0) = 0$.

Exercice 9. On reprend l'exemple ci-dessus, et on suppose A *non inversible*.

1. Vérifier soigneusement l'expression de M^k donnée ci-dessus pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que M est diagonalisable si et seulement si A l'est (*utiliser le critère polynomial de diagonalisation*). Où intervient l'hypothèse que A n'est pas inversible ?

Le résultat de la deuxième question reste vrai si A n'est pas inversible, mais il faut changer de méthode. Voir l'exemple 15.

Exercice 10. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Posons : $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A^k \end{pmatrix}$ et en déduire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, une relation entre $P(M)$, $P(A)$ et $P'(A)$.

2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ (l'implication directe est subtile, mais vous parviendrez tout de même à montrer, en suivant la méthode ci-dessus, l'implication moins forte suivante : si M est diagonalisable alors A doit l'être aussi).

Exemple 11. (Cas où la 1re méthode n'est pas pertinente) Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \\ A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$. Pour juger si la 1re méthode est ici pertinente, tentons d'abord d'exprimer M^k en fonction de A^k pour tout entier k. Une récurrence soignée permet de démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} A^{k/2} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A^{k/2} \end{pmatrix} & \text{si} \quad k \text{ est pair}, \\ \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A^{(k-1)/2} \\ A^{(k+1)/2} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} & \text{si} \quad k \text{ est impair}. \end{cases}$$

Exercice 11. Le démontrer.

Cette relation ne permet pas d'exprimer aisément $P(M)$ en fonction de $P(A)$. Si l'on pose $P = \sum_k a_k X^k = \sum_{k \text{ pair}} a_k X^k + \sum_{k \text{ impair}} a_k X^k = \sum_j a_{2j} X^{2j} + \sum_\ell a_{2\ell+1} X^{2\ell+1}$, on a en effet :

$$P(M) = \sum_j a_{2j} M^{2j} + \sum_\ell a_{2\ell+1} M^{2\ell+1} = \sum_j a_j \begin{pmatrix} A^j & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A^j \end{pmatrix} + \sum_\ell a_{2\ell+1} \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A^\ell \\ A^{\ell+1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}.$$

Il n'est pas possible de faire apparaître $P(A)$ (tout au plus peut-on exprimer $P(M)$ à l'aide de $P^+(A)$ et $P^-(A)$, où P^+ et P^- sont respectivement les parties paire et impaire de P, mais ce n'est pas très utile ici). La 1re méthode est donc inopérante pour produire des polynômes annulateurs scindés à racines simples de M à l'aide de ceux de A.

Puisque la 1re méthode ne suffit pas à traiter toutes les matrices par blocs, voyons plus en détails comment utiliser les deux autres méthodes, exemples à l'appui.

2.5.2 Compléments sur la 2e méthode

Pour d'abord trouver les valeurs propres de M en fonction de celles de A, il est très utile de connaître le résultat suivant, même sans savoir le démontrer (mais dans ce cas on ne l'écrit pas dans une copie : on l'utilise pour la réflexion au brouillon) : si A, B, C et D sont des matrices carrées telles que $CD = DC$ (d'autres hypothèses de commutation sont possibles), alors :

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).}$$

Nous aurons l'occasion de la voir en exercice. Pour l'instant, voyons en quoi elle peut nous être utile pour l'étude de la réduction de matrices par blocs : si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec C et D vérifiant les hypothèses ci-dessus, alors :

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X\mathrm{I}_n - A & -B \\ -C & X\mathrm{I}_n - D \end{vmatrix} = \det\left((X\mathrm{I}_n - A)(X\mathrm{I}_n - D) - BC\right). \qquad (*)$$

L'exercice ci-dessous permet de démontrer l'identité dans ce cas particulier.

Exercice 12. Soient A, B, C, $D \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent. On pose : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

1. Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $x\mathrm{I}_n - D$ soit inversible (pourquoi existe-t-il bien de tels x ?). Compléter les matrices par blocs du membre de droite pour avoir l'égalité :

$$\begin{pmatrix} x\mathrm{I}_n - A & -B \\ -C & x\mathrm{I}_n - D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & x\mathrm{I}_n - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ * & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Pour comprendre ces choix de blocs : songer aux matrices de transvection.

2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_D(x) \neq 0$, on a : $\chi_M(x) = \det\left((x\mathrm{I}_n - A)(x\mathrm{I}_n - D) - BC\right)$.
3. Montrer que les deux membres de l'égalité ci-dessus sont polynomiaux en x, et en déduire que l'égalité reste valable pour tout $x \in \mathbb{C}$.

En pratique, M a une forme plus sympathique que celle générale ci-dessus (par exemple M est triangulaire par blocs – mais dans ce cas le cours suffit à calculer son polynôme caractéristique –, ou « anti-diagonale par blocs »), ce qui permet de simplifier encore ce déterminant.

Exemple 12. Si $A = B = C = D$ (c'est-à-dire si $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$), alors en reprenant le calcul ci-dessus :

$$\begin{aligned} \chi_M = \det\left((X\mathrm{I}_n - A)^2 - A^2\right) &= \det\left(((X\mathrm{I}_n - A) + A)\left((X\mathrm{I}_n - A) - A\right)\right) \\ &= \det\left((X\mathrm{I}_n - A) + A\right)\det\left((X\mathrm{I}_n - A) - A\right) \\ &= \det\left(X\mathrm{I}_n\right)\det\left(X\mathrm{I}_n - 2A\right). \end{aligned}$$

On peut encore simplifier ces déterminants : voir l'exercice ci-dessous.

Exercice 13.

1. Finir le calcul pour en déduire : $\chi_M = 2^n X^n \chi_A\left(\frac{X}{2}\right)$.
2. En déduire que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\frac{\lambda}{2} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
3. En déduire : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\} \cup \{2\mu \mid \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$.

On a obtenu le spectre de M en fonction de celui de A, si compliquée soit cette matrice !

Néanmoins j'insiste :

Si vous ne savez pas comment démontrer l'identité $(*)$, et si elle n'est pas donnée dans l'énoncé, alors :
VOUS NE DEVEZ PAS L'UTILISER,
et vous contenter de la manipuler au brouillon pour avoir des idées !

Pourtant j'affirme que même si vous ne pouvez pas l'utiliser librement dans votre résolution au propre, connaître cette identité peut vous être utile. En effet, en l'utilisant AU BROUILLON, cela vous permet de CONJECTURER le spectre de M. Ensuite, pour démontrer rigoureusement, au propre, que le spectre de M est *vraiment* ce que vous avez conjecturé, il vous suffit de montrer que $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ admet bien des solutions non nulles pour tout λ dans l'ensemble de valeurs propres que vous conjecturez. Vous le justifiez en montrant, *via* simplifications, que ce système équivaut à des relations entre A, X et Y de la forme $AZ = \mu Z$, où μ est une valeur propre de A. Vous savez que de telles relations ont bien des solutions (par définition même d'une valeur propre), et vous en déduisez que $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ aussi.

Remarquez que pour montrer que λ est valeur propre, il ne nous intéresse pas spécialement de trouver *toutes* les solutions de $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$: il suffit d'en trouver *une seule* qui soit non nulle, ce qui permet souvent de conclure (quitte à tâtonner un peu, en prenant par exemple $X = Y$, ou $X = -Y$, etc.) lorsqu'on ne parvient pas à une résolution complète.

Nous illustrons l'approche dans les exemples 13 et 14 ci-dessous.

Remarque. Cette méthode n'est pas très efficace pour obtenir une information en sens contraire, à savoir conclure sur la réduction de A à l'aide d'hypothèses sur M. Par conséquent, si l'on vous demande une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable, cette méthode n'est pas prioritaire.

Exemple 13. On reprend l'exemple 12. Construisons effectivement des vecteurs propres de M à l'aide de ceux de A.

Commençons par le cas où $\lambda = 0$. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. On a : $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} A(X+Y) \\ A(X+Y) \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, si et seulement si $A(X+Y) = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. En particulier, en prenant pour X *n'importe quel vecteur colonne non nul*, et $Y = -X$, on a $X + Y = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et donc $A(X+Y) = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$: cela montre que pour tout X non nul, le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ est non nul et vérifie $M \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, et donc que 0 est effectivement une valeur propre de M (si l'on n'avait pas pu utiliser l'identité $(*)$, on l'aurait démontré par ce raisonnement). De surcroît, $\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à 0 pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul.

Passons au cas où $\lambda = 2\mu$ avec $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Le cas où $\mu = 0$ est déjà traité ci-dessus, et on suppose donc $\mu \neq 0$ (la raison pour laquelle je fais cette supposition sera claire ci-après). Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. On a : $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} A(X+Y) \\ A(X+Y) \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, si et seulement si $A(X+Y) = 2\mu X$ et $A(X+Y) = 2\mu Y$. En particulier, ces deux égalités impliquent : $2\mu X = 2\mu Y$. Comme $\mu \neq 0$, la division par 2μ donne : $X = Y$. Les égalités $A(X+Y) = 2\mu X$ et $A(X+Y) = 2\mu Y$ se réduisent donc à : $2AX = 2\mu X$, si et seulement si $AX = \mu X$. On note en particulier que si X est un vecteur propre de A associé à μ, alors cette dernière égalité est vérifiée, et donc notre raisonnement montre que $M \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} \neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$: on a démontré que pour tout vecteur propre X de A associé à μ, le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à 2μ (qui est donc bel et bien une valeur propre de M : si l'on n'avait pas pu utiliser l'identité $(*)$, on l'aurait démontré par ce raisonnement).

Exercice 14.

1. On suppose que A est diagonalisable et inversible. Déduire de cet exemple que si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A, associés respectivement à des valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de A, et si $(E_1, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors $\left(\begin{pmatrix} E_1 \\ -E_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} E_n \\ -E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ X_n \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de M (et donc M est diagonalisable).
2. On ne suppose plus A inversible (mais toujours que A est diagonalisable). Donner la dimension de $\ker(M)$ en fonction de celle de $\ker(A)$, et en déduire si M est diagonalisable ou non (*utiliser le critère de diagonalisation*).

Exemple 14. Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$. La formule $(*)$ ci-dessus, dans ce cas particulier, nous permet de *conjecturer* que $\chi_M = (-3)^n \chi_A\left(\frac{X}{3}\right) \chi_A(-X)$, et donc que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M si et seulement si $\chi_A\left(\frac{\lambda}{3}\right) = 0$ ou $\chi_A(-\lambda) = 0$, si et seulement s'il existe $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\lambda = 3\mu$ ou $\lambda = -\mu$. Vérifions à présent la conjecture, en montrant qu'effectivement, pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, il existe une solution *non nulle* $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ telle que $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 3\mu \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ (et de même en remplaçant 3μ par $-\mu$).

Soient $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. On a $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 3\mu \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ si et seulement si $A(X+2Y) = 3\mu X$ et $A(2X+Y) = 3\mu Y$. En particulier, si l'on prend $X = Y$, on voit que les deux dernières égalités se ramènent à $3AX = 3\mu X$, ou encore à : $AX = \mu X$; cette égalité est vérifiée dès que X est un vecteur propre de A associé à μ. Donc, en remontant le raisonnement (ce qui précédait était à faire *au brouillon* ; ce qui suit est à faire *au propre*), on voit que si X est un tel vecteur propre, alors $M \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = 3\mu \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ avec

$\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} \neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, ce qui démontre effectivement que 3μ est valeur propre de M (si μ est valeur propre de A), et que pour tout vecteur propre X de A associé à μ, le vecteur colonne $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à 3μ.

On passe à présent aux valeurs propres conjecturées de la forme $-\mu$. On a $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -\mu\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ si et seulement si $A(X+2Y) = -\mu X$ et $A(2X+Y) = -\mu Y$. En particulier, si l'on prend $Y = -X$, on voit que les deux dernières égalités se ramènent à $-AX = -\mu X$, ou encore à : $AX = \mu X$; cette égalité est vérifiée dès que X est un vecteur propre de A associé à μ. Donc, en remontant le raisonnement (ce qui précédait était à faire *au brouillon* ; ce qui suit est à faire *au propre*), on voit que si X est un tel vecteur propre, alors $M\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} = -\mu\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} \neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, ce qui démontre effectivement que $-\mu$ est valeur propre de M (si μ est valeur propre de A), et que pour tout vecteur propre X de A associé à μ, le vecteur colonne $\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à $-\mu$.

On a bien démontré que si μ est une valeur propre de A, alors $-\mu$ et 3μ sont des valeurs propres de M, et en prime on sait comment en fabriquer des vecteurs propres associés.

Exercice 15. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A, associés respectivement à des valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de A, alors $\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ X_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_n \\ -X_n \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de M (et donc M est diagonalisable).

2.5.3 Compléments sur la 3e méthode

Comme dit plus haut, cette méthode revient à d'abord traiter l'exercice où l'on remplace les blocs par des scalaires (on remplace $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ par 0, I_n par 1, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par $a \in \mathbb{C}$, etc.), puis de reprendre le raisonnement en sens inverse, c'est-à-dire : en espérant que la relation $M' = PDP^{-1}$ (où M' est la matrice obtenue en remplaçant les blocs par des scalaires, P une matrice inversible et D une matrice diagonale, qu'on trouve par les méthodes habituelles) reste vraie en remplaçant les scalaires intervenant dans P et D par les matrices correspondantes (on remplace 0 par la matrice nulle, 1 par la matrice identité, a par A, etc.).

Cette généralisation ne fonctionne pas toujours : cela nécessite d'avoir une matrice de passage P simple, et ne dépendant pas du ou des scalaires qu'on a substitués aux blocs (c'est-à-dire du $a \in \mathbb{C}$ qui remplace $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, avec les notations du paragraphe précédent). Mais plaçons-nous dans le cas favorable où la méthode fonctionne. Il y a alors trois étapes par lesquelles commencer obligatoirement :

1. Si $M' = PDP^{-1}$, où M' est la matrice obtenue en remplaçant les blocs de M par des scalaires (comme expliqué ci-dessus), de sorte que P et D soient aussi scalaires, alors on commence par calculer P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauß.

2. On pose P' la matrice obtenue à partir de P en remplaçant les scalaires par les blocs correspondants, comme expliqué ci-dessus, et on pose de même Q' (par exemple ; le nom est provisoire de toute façon) la matrice obtenue à partir de P^{-1} en procédant de même ; on *vérifie* que $P'Q' = \mathrm{I}_{2n}$, pour en déduire que $Q' = P'^{-1}$ (ce qui semble naturel).

3. On note D' la matrice diagonale par blocs obtenue à partir de D en remplaçant les scalaires par des blocs (s'il apparaît des racines carrées de a alors l'affaire est plus délicate : nous ignorons cette subtilité éventuelle), et on vérifie par un calcul bête et méchant que $P'D'P'^{-1} = M$. Notez bien que P'^{-1} fut calculé à l'étape précédente. Ainsi M est semblable à la matrice diagonale par blocs D'.

Ce n'est pas terminé à ce stade. Notez en effet que D' n'est pas forcément une matrice diagonale « tout court » : si $a \in \mathbb{C}$ apparaît sur la diagonale de D, alors D' aura des $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sur la diagonale. Comme A n'est *a priori pas diagonale*, D' non plus. Il en faut donc un peu plus pour déterminer si M est diagonalisable. Pour cela, on suppose en général que A est diagonalisable : on peut l'écrire sous la forme $A = QDQ^{-1}$ (la lettre P est déjà prise) avec Q inversible et D diagonale. En écrivant des égalités du type :

$$\begin{pmatrix} QDQ^{-1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \ddots \end{pmatrix},$$

on parvient alors à montrer que M est de la forme $M = P''D''P''^{-1}$ où P'' est inversible et D'' diagonale « tout court ».

Exemple 15. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On reprend l'exemple de $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$, déjà abordé dans l'exemple 10 avec la 1re méthode (qui ne permettait pas de conclure si A est inversible). Conformément au plan d'étude suggéré pour la 3e méthode, j'étudie d'abord la réduction de $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{C}$. Elle est très facile ; vous trouverez sans effort que : $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, où : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Un calcul basique permet de montrer : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P$ (pur hasard de calcul : cela ne se produit pas nécessairement dans ces exercices).

Pour revenir au cas de notre matrice par blocs, ce qu'on CONJECTURE est alors :

— si l'on pose $P' = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ (*remplacement des* 1 *par des* I_n *dans la matrice de passage du cas simple*), alors P' est inversible et : $P'^{-1} = P'$ (de même qu'on avait $P^{-1} = P$ plus haut) ;

— $M = P' \begin{pmatrix} A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} P'^{-1}$.

On vérifie ces deux conjectures par un calcul bête et méchant, le premier en calculant $P' \times P'$ et en constatant qu'on obtient ainsi la matrice identité (ce qui veut bien dire que $P'^{-1} = P'$). Pour vérifier la seconde conjecture, partez préférablement du membre de droite.

Voyons comment en déduire que si A est diagonalisable, alors M aussi : si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D telles que : $A = QDQ^{-1}$. Alors :

$$M = P' \begin{pmatrix} QDQ^{-1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} P'^{-1} = P' \begin{pmatrix} Q & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} P'^{-1}.$$

Si l'on pose : $P'' = P' \begin{pmatrix} Q & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$, alors P'' est inversible en tant que produit de deux matrices inversibles, et on a : $M = P''D'P''^{-1}$. Ainsi M est semblable à la matrice D', qui est manifestement diagonale (pas seulement par blocs, mais « tout court ») ; on en déduit que M est diagonalisable.

Mise en garde 1. Épargnez-moi les abominations : on n'a CLAIREMENT PAS l'égalité suivante : $\begin{pmatrix} QDQ^{-1} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} Q^{-1}$. LES TAILLES DES MATRICES NE SONT MÊME PAS COMPATIBLES ! (produit d'une matrice d'ordre $2n$ par les matrices Q et Q^{-1} qui sont d'ordre n).

Exercice 16. Reprendre ce qui ne fut pas détaillé dans l'exemple ci-dessus :

1. Montrer qu'on a bien : $\forall a \in \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.
2. Vérifier que si $P' = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$, alors : $P'^{-1} = P'$.
3. Vérifier qu'on a effectivement $P' \begin{pmatrix} A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix} P'^{-1} = M$.

Exercice 17. Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible et diagonalisable, et $M = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \\ A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable. À vous de trouver quelle méthode est la plus pertinente.

3 Trigonalisation ou décomposition de Dunford d'une matrice explicite

Vous n'avez pas de méthode systématique à connaître : la trigonalisation d'une matrice, toujours en dimension 2 ou 3, est en général guidée. Néanmoins, cette section n'est pas sans intérêt : nous allons voir que les exercices de triangulation ont presque toujours la même structure.

3.1 Cas d'une matrice d'ordre 2

Parlons rapidement de la trigonalisation en dimension 2 : c'est élémentaire. Notons que si A est une matrice d'ordre 2 triangulable mais non diagonalisable, alors elle admet une unique valeur propre, d'ordre de multiplicité 2 (pourquoi ?). Pour la trianguler, il suffit d'en déterminer un vecteur propre, et de prendre n'importe quel vecteur qui ne lui est pas proportionnel pour qu'ils forment une base de triangulation.

En effet, notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique, $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ la base de triangulation (X_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre double λ, et X_2 est n'importe quel vecteur qui ne lui est pas proportionnel), et f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. Par définition d'un vecteur propre, on a $f_A(X_1) = \lambda X_1$; alors, peu importe ce que vaut $f_A(X_2)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$: elle est bien triangulaire supérieure.

Exemple 16. Triangulons $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a immédiatement : $\chi_B = (X-1)^2$; donc 1 est l'unique valeur propre de B. Le polynôme caractéristique est scindé, donc B est triangulable (mais n'est pas diagonalisable : pourquoi ? vous DEVEZ savoir le justifier, même hors d'un contexte de triangulation !). Pour la trianguler, suivons la démarche ci-dessus :

1. La résolution de $BX = X$ montre que $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B associé à 1.
2. On prend un vecteur X_2 qui lui est indépendant, par exemple $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ est une base de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
3. Soit f_B l'endomorphisme canoniquement associé à B. Puisque X_1 est un vecteur propre de B associé à 1, on a $f_B(X_1) = X_1$ (INUTILE de calculer BX_1, vous savez que ce vecteur égale X_1 puisque X_1 est solution de $BX = X$! réfléchissez à ce que vous faites !). De plus : $f_B(X_2) = BX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1 + X_2$.

   On a donc : $T = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique. D'après la formule du changement de base :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(f_B) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_B) \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0),$$

   donc : $B = PTP^{-1}$, où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a triangulé B.

3.2 Cas d'une matrice d'ordre 3

Passons à la dimension 3, celle avec laquelle on vous embêtera en pratique. Si A n'est pas diagonalisable mais triangulable, alors il y a deux possibilités :

— elle admet une valeur propre simple et une valeur propre double ;

— elle admet une unique valeur propre triple.

Pourquoi n'y a-t-il pas d'autre cas ? Nous donnons ci-dessous la structure des exercices de triangulation dans le premier cas. Le second cas y ressemble beaucoup.

3.2.1 Matrice d'ordre 3 : cas d'une valeur propre double

Dans ce cas, si A n'est pas diagonalisable mais triangulable, alors le sous-espace propre associé à sa valeur propre double est de dimension 1 (pourquoi ?). En vérité, dans ce cas particulier, on pourrait trianguler A aussi facilement que dans le cas d'une matrice d'ordre 2 (les deux sous-espaces propres fournissent déjà deux vecteurs linéairement indépendants ; n'importe quelle façon d'adjoindre un vecteur linéairement indépendant donne alors une base de triangulation), mais on a souvent besoin d'une matrice triangulaire *jolie* (comprendre : diagonale par blocs) pour faciliter les calculs. D'où des indications pour « bien » compléter une famille de vecteurs propres en une base de *jolie* triangulation.

Exercice type 1. Soit $A \in \mathrm{M}_3(K)$. On note λ sa valeur propre simple et μ sa valeur propre double.

1. Déterminer un vecteur propre X_λ associé à λ, et un vecteur propre X_μ associé à μ.
2. Résoudre l'équation $AX - \mu X = X_\mu$ d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(K)$. On note X_3 **une** solution.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (X_\lambda, X_\mu, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(K)$.
4. On note P la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$. Montrer qu'il existe $T \in \mathrm{M}_3(K)$ triangulaire supérieure telle que : $A = PTP^{-1}$.

Nous indiquons en remarque, plus bas, une variante des étapes 2 et 3, qui donne plus de hauteur de vue à cette triangulation.

Notez que dans la deuxième question, vous choisissez pour X_3 une solution, n'importe laquelle, bien que l'équation $AX - \mu X = X_\mu$ ait une infinité de solutions, dépendant d'une variable auxiliaire. Tant qu'à faire, choisissez une solution simple, avec plusieurs zéros en coordonnées, afin de simplifier l'inversion de la matrice de passage (si nécessaire) !

Exemple 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Nous vous laissons vérifier que $\chi_A = (X-1)(X+1)^2$, de sorte que 1 soit valeur propre simple et -1 valeur propre double.

1. On vérifie que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre $\ker(A - \mathrm{I}_3)$ et que $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre $\ker(A + \mathrm{I}_3)$.
2. On résout l'équation $AX + X = X_2$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Un tel vecteur colonne est solution si et seulement si : $\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ b+c & = & -1 \end{array} \right.$, si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
$$X = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \\ -1-\alpha \end{pmatrix}.$$
Prenons $\alpha = 0$ (et donc $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$).
3. La famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$
4. Soit f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. Écrivons sa matrice dans la base $\mathcal{B}$: on a $f_A(X_1) = X_1$ (parce que X_1 est un vecteur propre de A associé à 1), $f_A(X_2) = -X_2$ (raison analogue) et $f_A(X_3) = AX_3 = X_2 - X_3$ (d'après la question précédente, X_3 étant solution de $AX + X = X_2$).
Par conséquent, la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique. D'après la formule du changement de base :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0).$$

C'est-à-dire : $A = PTP^{-1}$, où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a triangulé A.

Mise en garde 2. Pour obtenir la matrice de f_A dans la nouvelle base, notez que je n'ai fait AUCUN calcul explicite. En particulier, je n'ai pas du tout besoin de savoir à quoi égale $f_A(X_3)$. Après tout, pour obtenir la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$, il m'est seulement nécessaire de savoir exprimer $f_A(X_1)$, $f_A(X_2)$ et $f_A(X_3)$ en fonction de X_1, X_2 et X_3 ; or le fait que X_1 et X_2 soient vecteurs propres, et que X_3 soit solution de l'équation $AX + X = X_2$, donne DÉJÀ les expressions désirées.

NE FAITES PAS DE CALCULS INUTILES ! UTILISEZ CE QUE VOUS SAVEZ DU VECTEUR X_3 : QU'IL EST SOLUTION D'UNE ÉQUATION !

Exercice 18. Comprendre pourquoi cette méthode marche (pourquoi l'équation $AX - \mu X = X_\mu$ a toujours une solution ? pourquoi obtient-on toujours une base par cette méthode ?).

Autre point de vue. Pour produire X_μ et X_3 (avec les notations de l'exercice type plus haut), on peut aussi expliciter un vecteur X de $\ker\left((A - \mu \mathrm{I}_3)^2\right) \setminus \ker(A - \mu\mathrm{I}_3)$ et poser $Y = (A - \mu\mathrm{I}_3)X$. C'est un vecteur de $\ker(A - \mu\mathrm{I}_3)$, cette observation étant utile plus tard pour la triangulation.

On note alors que (Y, X) est une base de $\ker\left((A - \mu\mathrm{I}_3)^2\right)$ (ce noyau est de dimension 2, comme l'ordre de multiplicité de μ, et on vous laisse vérifier que c'est une famille libre : vous devriez avoir un air de déjà-vu). Comme le lemme des noyaux assure : $\mathrm{M}_{3,1}(K) = \ker\left((A - \mu\mathrm{I}_3)^2\right) \oplus \ker(A - \lambda\mathrm{I}_3)$ concaténer (Y, X) et la base (X_λ) du sous-espace propre associé à λ donne une base de $\mathrm{M}_{3,1}(K)$, et la matrice relativement à cette base de l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(K)$ canoniquement associé à A est : $\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (pourquoi ? s'en convaincre). La formule du changement de base permet de conclure.

Dans l'exemple ci-dessus, on trouve : $\ker\left((A + \mathrm{I}_3)^2\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. En posant : $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et : $Y = (A + \mathrm{I}_3)X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on retrouve la triangulation ci-dessus.

3.2.2 Matrice d'ordre 3 : cas d'une valeur propre triple

Selon que le sous-espace propre associé à cette valeur propre triple λ soit de dimension 1 ou 2, l'exercice varie très légèrement. Mais en tous les cas, on complète une famille libre de vecteurs propres associés à λ *via* la résolution d'équations de la forme $AX - \lambda X = X_i$, autant de fois qu'il le faut pour avoir une base de $\mathrm{M}_{3,1}(K)$.

Nous développons plus bas une variante ne nécessitant pas de résoudre deux fois une équation affine, et qui permet de comprendre ce qu'il se passe conceptuellement dans cette triangulation.

Exemple 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Nous vous laissons vérifier que $\chi_A = (X - 1)^3$, et que le sous-espace propre de A associé à 1 est de dimension 1, engendré par $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. On résout l'équation $AX - X = X_1$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Un tel vecteur colonne est solution si et seulement si : $\begin{cases} -a-b-c &= -1 \\ a+c &= 0 \end{cases}$, si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$. Prenons $\alpha = 0$ (et donc : $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).
2. On résout l'équation $AX - X = X_2$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On trouve : $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. La famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car : $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.
4. Soit f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. Écrivons sa matrice dans la base $\mathcal{B}$: on a $f_A(X_1) = X_1$ (parce que X_1 est un vecteur propre de A associé à 1), $f_A(X_2) = AX_2 = X_1 + X_2$ (X_2 étant solution de $AX - X = X_1$) et $f_A(X_3) = AX_3 = X_2 + X_3$ (X_3 étant solution de $AX - X = X_2$).
   Par conséquent, la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique. D'après la formule du changement de base :
   $$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(f_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0).$$
   C'est-à-dire : $A = PTP^{-1}$, où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a triangulé A.

Mise en garde 3. Cet exemple le montre encore : inutile de calculer $f_A(X_1)$, $f_A(X_2)$ et $f_A(X_3)$ explicitement : les questions préliminaires permettent de les exprimer entièrement en fonction de X_1, X_2 et X_3, sans jamais utiliser leurs coordonnées dans la base canonique. Au risque de me répéter :

Les relations vérifiées par X_1, X_2 et X_3 sont plus intéressantes que leurs expressions brutes : dispensez-vous de calculs inutiles !

Exercice 19.

1. Comprendre pourquoi cette méthode marche (pourquoi les deux équations résolues ci-dessus ont une solution ? pourquoi obtient-on toujours une base par cette méthode ?).
2. Retrouver la triangulation ci-dessus en s'inspirant de la remarque ci-dessous.

Autre point de vue. Notons que $\ker\left((A - \lambda \mathrm{I}_3)^3\right)$ est ici de dimension 3, tandis que $\ker(A - \lambda \mathrm{I}_3)$ est de dimension 1 ou 2 si A n'est pas diagonalisable. Puisqu'on sait (exercices de travaux dirigés) que la suite des noyaux itérés croît de moins en moins vite puis stationne, on voit que ces contraintes dimensionnelles impliquent que :

— si $\dim(\ker(A - \lambda \mathrm{I}_3)) = 1$, alors : $\dim\left(\ker\left((A - \lambda \mathrm{I}_3)^2\right)\right) = 2$, et en particulier $A - \lambda \mathrm{I}_3$ est d'indice de nilpotence 3 ;

— si $\dim(\ker(A - \lambda \mathrm{I}_3)) = 2$, alors : $\dim\left(\ker\left((A - \lambda \mathrm{I}_3)^2\right)\right) = 3$, et en particulier $A - \lambda \mathrm{I}_3$ est d'indice de nilpotence 2.

Dans le premier cas, $A - \lambda \mathrm{I}_3$ est d'indice de nilpotence maximal, et on sait alors que pour tout $X \in \mathrm{M}_{3,1}(K) \setminus \ker\left((A - \lambda \mathrm{I}_3)^2\right)$ la famille $((A - \lambda \mathrm{I}_3)^2 X, (A - \lambda \mathrm{I}_3)X, X)$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(K)$ (on vous laisse vérifier que c'est une famille libre : vous devriez avoir un air de déjà-vu). La matrice relativement à cette base de l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(K)$ canoniquement associé à A est : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (pourquoi ? s'en convaincre). La formule du changement de base permet de conclure.

Dans le second cas, pour tout $X \in \ker\left((A-\lambda\mathrm{I}_3)^2\right) \setminus \ker(A-\lambda\mathrm{I}_3)$ la famille $((A-\lambda\mathrm{I}_3)X, X)$ est libre à défaut d'être une base : on la complète avec un vecteur Y de $\ker(A-\lambda\mathrm{I}_3)$ qui n'est pas proportionnel à $(A-\lambda\mathrm{I}_3)X$: il en existe, vu que c'est un espace vectoriel de dimension 2. La matrice relativement à la base $((A-\lambda\mathrm{I}_3)X, X, Y)$ de l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(K)$ canoniquement associé à A est : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (pourquoi ? s'en convaincre). La formule du changement de base permet de conclure.

3.3 Triangulation d'une matrice d'ordre plus élevé

L'objectif n'est pas de vous donner un algorithme sophistiqué et permettant toute triangulation (la description serait pénible), mais de vous donner quelques pistes pour bien aborder un problème de triangulation explicite.

Si vous n'êtes pas dans le cas des sections précédentes (situation rare en pratique), vous pouvez malgré tout vous inspirer des « autres points de vue » exposés en fin de sections 3.2.1 et 3.2.2. À savoir :

— comme : $\mathrm{M}_{n,1}(K) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(A)} \ker\left((A-\lambda\mathrm{I}_3)^{\alpha_\lambda}\right)$ (lemme des noyaux), pour construire une base de $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ il suffit de produire des bases des sous-espaces caractéristiques $\ker\left((A-\lambda\mathrm{I}_3)^{\alpha_\lambda}\right)$ et de les concaténer (on aura alors nécessairement une matrice diagonale par blocs, ce qui est déjà une bonne raison de procéder ainsi mais pas seulement) ;

— produisez des familles **cycliques** et libres de cardinal aussi élevé que possible (cela dépend de l'**indice de nilpotence** de la restriction de $X \mapsto (A-\lambda\mathrm{I}_3)X$ à $\ker\left((A-\lambda\mathrm{I}_3)^{\alpha_\lambda}\right)$, qui est au plus égal à α_λ), que vous complétez ensuite du mieux possible : soit avec des vecteurs propres linéairement indépendants des vecteurs précédents, soit avec d'autres familles cycliques. Rappelez-vous que la dimension de $\ker\left((A-\lambda\mathrm{I}_3)^{\alpha_\lambda}\right)$ est connue et égale à α_λ, donc vous savez combien de vecteurs linéairement indépendants il vous faut pour obtenir une base.

Si vous n'y parvenez pas : il vous reste la possibilité de trianguler par récurrence comme dans la démonstration du critère de triangulation : on trouve une famille de vecteurs propres $\mathcal{B}$ de A et on considère un supplémentaire G de $F = \mathrm{Vect}_K(\mathcal{B})$ sur lequel on cherche un vecteur propre X_0 de $X \mapsto PAX$ (où P est la matrice du projecteur sur G parallèlement à F), et ainsi de suite (récurrence). C'est cependant une approche fastidieuse qui ne donne pas de matrice triangulaire aussi jolie qu'avec des familles cycliques.

Exemple 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$. On veut réduire cette matrice. On trouve après calculs (d'abord développer par rapport à la dernière ligne, puis la première) : $\chi_A = (X-1)^4$. La matrice A n'est pas diagonalisable puisque $\pi_A \neq X-1$ (le cas échéant on aurait : $A = \mathrm{I}_4$), mais elle est triangulable car χ_A est scindé. Triangulons-la. On trouve :

$$A - \mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et :} \quad \ker(A-\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

puis : $(A-\mathrm{I}_4)^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Voyons comment en déduire une triangulation de A. Le fait que $A-\mathrm{I}_4$ soit d'indice de nilpotence 2 (donc non maximal) assure qu'on ne pourra pas faire mieux qu'une famille cyclique libre de cardinal 2. Pas grave : faisons quand même. Essayons de produire deux familles cycliques de cardinal 2 dont la concaténation donne une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Soient E_2 et E_4 le deuxième et le dernier vecteur de la base canonique (ils ne sont pas dans le noyau de $A-\mathrm{I}_4$, et leurs images par cette matrice sont linéairement indépendantes au vu de ses colonnes) et posons :

$$X_2 = (A - \mathrm{I}_4)E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = (A - \mathrm{I}_4)E_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la famille (X_2, E_2, X_4, E_4) est de déterminant -1 relativement à la base canonique, donc c'est une base de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. La matrice de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ relativement à cette base est, par construction de X_2 et X_4 :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la formule du changement de base : $A = PTP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 20.

1. Vérifier les étapes omises (détermination d'une base de $\ker(A - \mathrm{I}_4)$, calcul du déterminant de (X_2, E_2, X_4, E_4), matrice de $X \mapsto AX$ relativement à cette base).
2. Obtenir une triangulation de A autrement, en adaptant à ce cas particulier la démonstration du critère de trigonalisation.

3.4 Expliciter la décomposition de Dunford

Pour les applications théoriques de la décomposition de Dunford, qui correspondent davantage aux attendus des classes préparatoires : voir la section 7. → page 37

Soit $A \in \mathrm{M}_n(K)$ une matrice carrée explicite, de polynôme caractéristique : $\chi_A = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, où les λ_i sont tous distincts. Si l'on cherche à expliciter les matrices D et N de sa décomposition de Dunford, la démonstration du cours donne une première piste : on sait en effet que si $P_1, \ldots, P_k$ sont les matrices des projecteurs associés à la décomposition : $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker\left((A - \lambda_i \mathrm{I}_n)^{\alpha_i}\right)$, alors : $D = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$, et : $N = A - D$. Le nerf de la guerre est donc d'expliciter les P_i.

Pour cela, rappelons que le lemme de décomposition des noyaux nous dit que ces projecteurs sont des polynômes en A, et observer sa démonstration nous en dit davantage : on obtient ces projecteurs en écrivant une relation de Bézout entre les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$. Plus précisément, une fois obtenue une relation de la forme :

$$U(X - \lambda_i)^{\alpha_i} + V \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j} = 1,$$

on sait que $P = V(A) \prod_{j \neq i} (A - \lambda_j \mathrm{I}_n)^{\alpha_j}$ est la matrice du projecteur sur $\ker\left((A - \lambda_i \mathrm{I}_n)^{\alpha_i}\right)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \ker\left((A - \lambda_j \mathrm{I}_n)^{\alpha_j}\right)$.

On sait qu'on peut obtenir des coefficients de Bézout avec l'algorithme d'Euclide étendu, mais ce peut cependant être assez fastidieux lorsqu'il y a trois facteurs ou plus dans la décomposition de χ_A. Fort heureusement on peut s'en passer ! (D'ailleurs, vous remarquez que je m'en suis passé dans le cours, lorsque j'ai explicité les projecteurs sur les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable.)

Pour cela, il suffit de décomposer χ_A en éléments simples :

$$\frac{1}{\chi_A} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_j} \frac{c_{i,j}}{(X - \lambda_i)^j}.$$

Cette relation implique :

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_j} \frac{c_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j} \chi_A = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_j} c_{i,j} (X-\lambda_i)^{\alpha_i - j} \prod_{\ell \neq i}^{k} (X-\lambda_\ell)^{\alpha_\ell}.$$

Par conséquent, en posant : $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $P_i = \sum\limits_{j=1}^{\alpha_j} c_{i,j}(X-\lambda_i)^{\alpha_i-j} \prod\limits_{\ell \neq i}^{k} (X-\lambda_\ell)^{\alpha_\ell}$, on a : $1 = \sum\limits_{i=1}^{k} P_i$, et on vérifie aisément que $P_i(A)$ est la matrice du projecteur sur $\ker\left((A-\lambda_i \mathrm{I}_n)^{\alpha_i}\right)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{j \neq i} \ker\left((A-\lambda_j \mathrm{I}_n)^{\alpha_j}\right)$.

Exercice 21. Le vérifier.

On retiendra que le projecteur sur $\ker\left((A-\lambda_i \mathrm{I}_n)^{\alpha_i}\right)$ correspond à la somme de tous les polynômes divisibles par $\prod\limits_{\ell \neq i}^{k} (X-\lambda_\ell)^{\alpha_\ell}$ (c'est-à-dire : seule la puissance de $X-\lambda_i$ diffère de la puissance présente dans la factorisation de χ_A). C'est ainsi qu'on le « reconnaît » rapidement dans la décomposition en éléments simples, sans s'attarder sur le formalisme.

Ceci fournit un algorithme de calcul des P_i puis de D et N. Notons que χ_A peut être remplacé par n'importe quel polynôme annulateur non nul, disons le polynôme minimal. Cela peut alléger les calculs si vous le connaissez.

Si vous avez besoin de conseils méthodologiques sur la décomposition en éléments simples, je vous renvoie au document *Méthodes* associé (disponible en ligne).

Exemple 20. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 9 & 9 & 5 & 0 \\ 17 & 17 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice dont on cherche la décomposition de Dunford. On trouve après calculs : $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^2$. La décomposition en éléments simples de χ_A est donc de la forme :

$$\frac{1}{\chi_A} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{(X-2)^2}.$$

Un équivalent en 1 puis en 2 donne : $b = d = 1$. Pour déterminer a, on doit préalablement simplifier $\frac{1}{\chi_A} - \frac{1}{X-1}$ (de sorte à avoir $(X-1)^1$ au dénominateur) puis reprendre un équivalent en 1. De même pour c. On trouve alors : $a = 2$, $c = -2$. La relation ci-dessus donne alors, après multiplication par χ_A :

$$1 = (2(X-1)+1)(X-2)^2 + (-2(X-2)+1)(X-1)^2.$$

D'après ce qui précède, $P_1 = (2(A-\mathrm{I}_4)+\mathrm{I}_4)(A-2\mathrm{I}_4)^2$ est le projecteur sur $\ker\left((A-\mathrm{I}_4)^2\right)$ parallèlement à $\ker\left((A-2\mathrm{I}_4)^2\right)$, tandis que $P_2 = (-2(A-2\mathrm{I}_4)+\mathrm{I}_4)(A-\mathrm{I}_4)^2$ est l'autre projecteur cherché. Après calculs :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que : $P_1 + P_2 = \mathrm{I}_4$. Il est important de faire cette vérification si l'on veut s'assurer qu'on n'a pas fait d'erreur de calcul (en effet, des projecteurs associés à une décomposition en somme directe doivent toujours vérifier cette identité). On pourrait aussi vérifier : $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$, mais c'est une vérification plus coûteuse en calculs. On a alors :

$$D = P_1 + 2P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = A - D = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 9 & 9 & 3 & 0 \\ 12 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est la décomposition de Dunford de A. Vous pouvez vérifier pour vous en convaincre que D est diagonalisable (avec les mêmes valeurs propres que A), N nilpotente (on a : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$), et que $DN = ND$.

Exercice 22. Vérifier les détails omis :

1. Montrer : $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^2$.
2. Vérifier la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\chi_A}$ proposée.
3. Vérifier le calcul de P_1, P_2 et D.
4. Pouvait-on prédire que l'indice de nilpotence de N est 2 avant même de calculer cette matrice ?

Exercice 23. Expliciter la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4 ✓ Calcul des puissances d'une matrice

Soit $A \in \mathrm{M}_p(K)$. On veut calculer A^n. Il y a essentiellement deux approches : avec la division euclidienne par un polynôme annulateur, ou en passant par la réduction (diagonalisation ou triangulation). Évidemment, si la matrice n'est pas diagonalisable, et si aucun indice ne vous permet de la trianguler, alors il n'y a pas d'hésitation à avoir : on utilise la méthode de division euclidienne.

Si A est semblable à une matrice triangulaire, les calculs restent assez lourds (sauf réduction *jolie* en matrice diagonale par blocs : voir la section 3 pour voir comment obtenir une réduction *jolie*, et la section 4.2 pour voir comment elle permet de calculer les puissances), donc la méthode de division euclidienne peut être préférable. → page 28

Si A est semblable à une matrice diagonale, en revanche, le calcul des puissances d'une matrice diagonale est assez rapide, et l'inversion d'une matrice d'ordre raisonnable aussi. Il est donc facile de calculer les puissances de A en la diagonalisant (et du point de vue théorique c'est éventuellement plus intéressant, si on veut étudier des propriétés asymptotiques de la suite $(A^n)_{n\geqslant 0}$).

Par contre, **même si A est diagonalisable, il reste un cas où la méthode de division euclidienne est préférable** : lorsqu'il y a très peu de valeurs propres, par rapport à l'ordre de la matrice.

En effet, d'après le critère polynomial de diagonalisation, si A est diagonalisable alors $\prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}_K(A)}(X-\lambda)$ est un polynôme annulateur de A. C'est un polynôme de degré égal au nombre de valeurs propres distinctes de A : si A n'en a que deux, par exemple, cela nous fournit un polynôme annulateur de degré 2 : c'est très pratique ! En effet, vous verrez dans la section suivante que le degré du polynôme annulateur conditionne le degré maximal des puissances de A qu'on doit calculer, en vue d'en déduire toutes les puissances de A supérieures.

4.1 Avec une division euclidienne par un polynôme annulateur

1. On trouve un polynôme $P \in K[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathrm{M}_p(K)}$. Notons $d = \deg(P)$.
   Si l'on ne connaît pas de polynôme annulateur simple, utiliser le polynôme caractéristique : il est annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Soit $n \geqslant 1$. D'après le *théorème de division euclidienne*, il existe $(Q,R) \in K[X]^2$ (unique) tel que :
   $$X^n = PQ + R, \text{ et } \deg(R) < \deg(P). \qquad (*)$$
   On peut écrire R sous la forme : $R = \sum\limits_{i=0}^{d-1} a_i X^i$.
3. En évaluant $(*)$ en A, comme $P(A) = 0_{\mathrm{M}_p(K)}$, on obtient : $A^n = R(A) = \sum\limits_{i=0}^{d-1} a_i A^i$. Il reste donc à déterminer les a_i et à calculer les A^i pour tout $i \in [\![0, d-1]\!]$.
4. Détermination des a_i. En évaluant $(*)$ en des nombres convenables, on peut obtenir autant d'équations que d'inconnues, et les résoudre comme n'importe quel système linéaire. Pour cela :
   (a) On cherche les racines de P. Il s'écrit alors : $P = \prod\limits_{i=1}^{k}(X-x_i)^{d_i}$, où les x_i sont les racines de P et d_i leurs multiplicités. Notons qu'on a $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i = \deg(P) = d$.

(b) Il a été vu en première année que x_i est une racine d'ordre *au moins* d_i si et seulement si : $P(x_i) = P'(x_i) = \cdots = P^{(d_i-1)}(x_i) = 0$. Alors, si on dérive $d_i - 1$ fois $(*)$, et qu'on l'évalue en la racine x_i à chaque étape, on obtient d_i équations vérifiées par les a_i, de la forme :

$$n(n-1)\cdots(n-j+1)x_i^{n-j} = R^{(j)}(x_i) = \sum_{i=j}^{d-1} a_i(i-j)\cdots(i-j+1)x_i^{i-j}, \quad j \in [\![0, d_i - 1]\!].$$

(c) Si on fait ce procédé pour chaque racine de P, on obtient en tout $\sum_{i=1}^{k} d_i = d$ équations vérifiées par les a_i, qui sont au nombre de d inconnues. Il y en a donc suffisamment pour résoudre le système linéaire obtenu (qui est toujours inversible, on peut le démontrer). On en déduit les a_i.

5. Après calcul des A^i, pour $i \in [\![0, d-1]\!]$, toutes les données sont connues dans le membre de droite de l'égalité $A^n = R(A) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i A^i$. On en déduit A^n.

C'est pour diminuer le nombre de puissances A^i pour $i < d$ à calculer, qu'on a intérêt à prendre un polynôme annulateur de degré d aussi petit que possible.

Calculer A^n avec une division euclidienne

1. On trouve un polynôme annulateur de A (noté P ici), et ses racines x_i.
2. On écrit l'existence de $(Q, R) \in K[X]^2$ tel que : $X^n = PQ + R$ $(*)$, avec $\deg(R) < \deg(P)$.
3. On évalue $(*)$ en A pour avoir $A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A)$. Il reste à déterminer les coefficients a_i de R.
4. On évalue $(*)$ en les x_i pour avoir $x_i^n = P(x_i)Q(x_i) + R(x_i) = R(x_i)$: système linéaire vérifié par les a_i, qu'on résout. S'il y a des racines multiples : dériver $(*)$ et réévaluer en ces racines.
5. Une fois les a_i déterminés, on peut calculer $R(A) = A^n$.

Deux choix possibles de polynôme annulateur : χ_A, ou $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(A)} (X - \lambda)$ (si A diagonalisable).

4.2 Avec une réduction matricielle

1. On diagonalise A si possible, en déterminant $P \in \mathrm{GL}_p(K)$ et des λ_i tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_p \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Alors, connaissant P, on calcule P^{-1}, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_p^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

2. Si A n'est pas diagonalisable, on peut tout de même la trigonaliser (quitte à être dans $\mathbb{C}$).

(a) Si la trigonalisation de A est de la forme diagonale par blocs suivante :

$$A = P \begin{pmatrix} T_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & T_k \end{pmatrix} P^{-1},$$

où, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, T_i est de la forme $T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_i \end{pmatrix}$ (coefficients diagonaux tous égaux), alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P \begin{pmatrix} T_1^n & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & T_k^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

et on calcule les T_i^n en les mettant sous la forme : $T_i = \lambda_i \mathrm{I} + N_i$ où N_i est nilpotente et commute (forcément) avec $\lambda_i \mathrm{I}$. On peut en effet, dans ce cas, utiliser la formule du binôme de Newton pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_i^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} N_i^j.$$

On en déduit les puissances de T_i, et par suite les puissances de A.

Les exemples de la section 3 montrent comment obtenir une telle trigonalisation diagonale par blocs, dans le cas des matrices carrées d'ordre 2 ou 3.

(b) Si on ne connaît pas A sous une telle forme par blocs, nous n'avons pas le choix : il faut procéder par division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur, comme ce fut traité précédemment.

4.3 Avec des polynômes interpolateurs de Lagrange

Voir la section 8.1. L'intérêt des polynômes interpolateurs, dans ce contexte, est d'une part de nous dispenser du calcul d'une matrice de passage, d'autre part de se généraliser aux puissances négatives d'une matrice (et même non entières). → page 40

5 Réduction à l'aide d'un polynôme annulateur : cas subtils

Nous parlons ici de l'étude des endomorphismes qui vérifient une relation polynomiale de la forme :

$$f^3 = -f, \quad f^3 + 2f^2 = 0_{\mathrm{L}(E)}, \quad f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E,$$

c'est-à-dire qui admettent un polynôme annulateur explicite, **mais dans le cas particulier où ce polynôme annulateur n'est pas scindé, ou bien est scindé mais pas à racines simples** (de sorte qu'on ne peut pas conclure qu'ils sont diagonalisables avec le critère polynomial de diagonalisation). Dans les exemples ci-dessus, les polynômes annulateurs sont respectivement $X^3 + X = X(X^2+1)$, $X^3 + 2X^2 = X^2(X+2)$ et $X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2+1)(X+1)$, qui ne sont pas scindés à racines simples.

Mais on peut malgré tout les réduire (il y a derrière cela une stratégie générale, mais qui n'est pas du tout au programme). Il y a généralement les étapes suivantes :

1. Montrer une décomposition en somme directe de sous-espaces stables, de la forme :
$$E = \ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f)), \text{ où } P \text{ et } Q \text{ sont des polynômes, ou : } E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f).$$
2. Expliciter des bases simples de chaque composante de la somme directe. En général, elles sont de la forme $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots)$ (si les polynômes de la somme directe sont irréductibles).
3. En déduire la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition. Elle est diagonale par blocs puisque c'est dans une base adaptée à des sous-espaces stables, et si les choses sont bien faites alors les blocs sont de « petites » matrices compagnons. ← page 4

Nous expliquons comment procéder à chaque étape, dans les sections ci-dessous.

5.1 Décomposer en somme directe de sous-espaces stables

Il suffit d'appliquer le lemme des noyaux. En effet, si f est annulé par P, alors : $E = \ker(P(f))$. La décomposition demandée revient alors à décomposer P en éléments irréductibles.

Si P est scindé, alors nul besoin de refaire la démonstration en détails : vous invoquez le cours. On sait en effet que dans ce cas-là, l'espace vectoriel ambiant est somme directe des sous-espaces caractéristiques.

5.1.1 Cas particulier fréquent : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$

Ce cas particulier ne se produit que si f est annulé par un polynôme ayant 0 pour racine (c'est-à-dire : multiple de X). Plus concrètement, cela signifie que f vérifie une relation de la forme :

$$a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f = 0_{\mathrm{L}(E)}, \qquad (*)$$

avec $a_1 \neq 0$ pour simplifier la discussion. Notez bien l'absence de l'endomorphisme identité.

Pour montrer la décomposition en somme directe $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, notons que cette fois nous avons une donnée sur les dimensions grâce au théorème du rang : nous savons que nous avons toujours $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, indépendamment des hypothèses sur f. Il suffit donc de démontrer que la somme est directe (ce que je dis est faux si l'on est en dimension non supposée finie, auquel cas on ne peut pas utiliser le théorème du rang et on n'a pas d'autre choix que de suivre la démarche ci-dessous). Vous pouvez le faire en suivant l'indication de l'exercice ci-dessous :

Exercice 24. Soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. Notons $\vec{x} \in E$ un antécédent de $\vec{y}$ par f.

1. Appliquer $(*)$ à $\vec{x}$, et en déduire une expression de la forme $\vec{y} = -\sum_i a_i f^i(\vec{y})$, où les valeurs prises par l'indice de sommation i sont à préciser.
2. En déduire que $\vec{y} = \vec{0}$, et conclure.

Si l'on n'est pas en dimension finie, et que nous devons explicitement construire, pour tout $\vec{x} \in E$, des vecteurs $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, alors on peut procéder par analyse et synthèse, mais il s'avère qu'on peut directement expliciter $\vec{y}$ et $\vec{z}$ à l'aide de la relation $(*)$, un peu modifiée :

$$\Big(a_n f^{n-1} + a_{n-1} f^{n-2} + \cdots + a_2 f + a_1 \mathrm{Id}_E\Big) \circ f = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

Si l'on appelle : $Q = \sum_{k=2}^{n-1} a_k f^{k-2}$, alors cette relation s'écrit plus succinctement :

$$(Q(f) \circ f + a_1 \mathrm{Id}_E) \circ f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (\dagger)$$

Comme nous avons là des polynômes en f, on pourrait bien sûr écrire toutes les compositions dans l'ordre inverse (par commutation). Voyons comment en déduire l'explicitation voulue :

Exercice 25. On rappelle qu'on suppose $a_1 \neq 0$. Soit $\vec{x} \in E$. On pose $U = Q \cdot X + a_1$.

1. Montrer que $U(f)(\vec{x})$ appartient à $\ker(f)$, et que $f(\vec{x})$ appartient à $\ker(U(f))$.
2. Écrire $\vec{x}$ en fonction de $U(f)(\vec{x})$ et $f(\vec{x})$, et en déduire le résultat voulu.

Enfin, nous laissons en agrément un exercice montrant qu'en fait, la somme directe $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$ n'est qu'une réécriture de la somme directe obtenue par le lemme des noyaux.

Exercice 26. Soit P un polynôme annulateur non nul de f. On suppose qu'il existe $U \in K[X]$ tel que : $P = XU$, avec : $U(0) \neq 0$. Montrer : $\mathrm{im}(f) = \ker(U(f))$.

5.2 ☢ Trouver une base adaptée pour réduire f

Supposons pour simplifier que f est annulé par un polynôme de la forme $P = (X - \alpha) \cdot Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. D'après le lemme des noyaux, on a : $E = \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(Q(f))$. Il s'agit à présent d'utiliser cette décomposition pour en déduire la matrice de f dans une base adaptée : on produit une base de E en concaténant une base de $\ker(Q(f))$ et une base de $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$.

Notez que c'est un sous-espace propre si $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$: généralement, une hypothèse sur f est faite pour se retrouver dans ce cas de figure ; soit une hypothèse d'inversibilité, soit une hypothèse du type $f \neq \alpha \mathrm{Id}_E$. Nous y reviendrons.

Enfin, notez que si Q est scindé, alors le lemme des noyaux permet en vérité de faire apparaître des sous-espaces caractéristiques : nous vous renvoyons alors à la section 3 sur la triangulation pour savoir ← page 20

comment réagir. Je suppose ci-dessous que Q n'est pas scindé.

Pour que les indications suivantes aient une chance d'aboutir, il vaut mieux être dans ces configurations favorables :

— **la dimension de E est raisonnable**, ainsi que le degré de Q ;

— le polynôme Q est **irréductible**, ou sa décomposition en facteurs irréductibles ne fait pas intervenir de puissances strictement supérieures à 1 (ce qui nous ramène au cas irréductible grâce au lemme des noyaux).

Autrement : soit vous avez besoin d'indications, soit vous devez faire une analyse approfondie des hypothèses (et en particulier de la matrice qu'on doit supposément obtenir) pour savoir comment fabriquer une base.

Les étapes sont alors, peu ou prou, les suivantes :

(1) On montre que $\ker(f-\alpha\mathrm{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$ (c'est-à-dire : α est valeur propre de f).

(2) On utilise les hypothèses de l'énoncé pour montrer : $\ker(f-\alpha\mathrm{Id}_E) \neq E$, et on en déduit grâce à la somme directe : $\ker(Q(f)) \neq \{\vec{0}\}$.

(3) On explicite une famille libre de $\ker(Q(f))$, de la forme $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{\ell}(\vec{x}))$ avec $\vec{x} \in \ker(Q(f))$. **Cette étape peut être différente si Q n'est pas irréductible, mais nous n'en parlerons pas.** Cela donne une minoration de la dimension de $\ker(Q(f))$ (puisque la dimension majore le cardinal de toute famille libre). Combiner toutes les inégalités dimensionnelles permet d'en déduire la dimension exacte de $\ker(Q(f))$ et que $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{\ell}(\vec{x}))$ est en vérité une **base** de $\ker(Q(f))$.

(4) Il reste à concaténer une base de $\ker(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$ (qui est une famille de vecteurs propres de f associés à α) avec la base $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{\ell}(\vec{x}))$ de $\ker(Q(f))$, pour avoir une base de E. Puis on écrit la matrice de f dans cette base adaptée pour conclure.

Le nombre de vecteurs de la famille $(f^k(\vec{x}))_k = (\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots)$ dépend du degré de Q et de son irréductibilité.

La troisième étape ne nécessite pas d'explications excessives. L'exemple ci-dessous suffira pour comprendre comment obtenir la dimension exacte de $\ker(Q(f))$. Pour les autres étapes :

(1) Pour montrer que α est une valeur propre de f, vous aurez souvent besoin :

  (∗) de montrer que c'est l'unique valeur propre *possible* ; là, on a besoin d'utiliser le fait que les valeurs propres de f soient parmi les racines de ses polynômes annulateurs : comme le polynôme annulateur P est rarement fourni par l'énoncé sous une forme factorisée, vous aurez probablement besoin de calculer $P(\alpha)$ pour vérifier que c'est une racine, puis de faire la division euclidienne par $X-\alpha$ pour trouver le facteur Q (et montrer que Q n'a pas d'autre racine réelle) ;

  (†) de montrer que α en est effectivement une ; pour y parvenir, cela dépend des hypothèses de l'énoncé : soit on raisonne par l'absurde en supposant que $f-\alpha\mathrm{Id}_E$ est inversible (ou hypothèse analogue, qui contredit le fait que α soit valeur propre), et multiplier $P(f) = 0_{\mathrm{L}(E)}$ par $(f-\alpha\mathrm{Id}_E)^{-1}$ contredit une autre hypothèse (pour cette étape, il vaut mieux factoriser P pour reconnaître $P(f) = (f-\alpha\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)$) ; soit vous utilisez la dimension de E pour en déduire que le degré de χ_f est impair, et donc montrer l'existence d'une racine réelle de χ_f grâce à ses limites en $\pm\infty$ et au théorème des valeurs intermédiaires ; par unicité de la valeur propre démontrée en (∗), on en déduit que ce doit être α ; il peut y avoir d'autres pistes.

(3) Pour montrer que la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{\ell}(\vec{x}))$ est libre, vous écrivez une relation de dépendance linéaire :

$$a_0\vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + \cdots + a_\ell f^{\ell}(\vec{x}) = \vec{0},$$

et vous appliquez f à cette égalité autant de fois qu'il y a d'inconnues a_i (voir les conseils de la section 1 de *Méthodes*, chapitre d'algèbre linéaire), en vous souvenant de l'hypothèse $Q(f)(\vec{x}) = \vec{0}$ (vraie car $\vec{x} \in \ker(Q(f))$) pour simplifier les puissances de f qui excéderaient f^{ℓ}. Vous aurez alors un système linéaire avec autant d'équations que d'inconnues, et que vous pourrez résoudre avec la méthode du pivot de Gauß.

Cas particulier plus simple : $\ell = 1$ et Q irréductible. Si $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille de $\ker(Q(f))$ avec Q irréductible, elle est automatiquement libre ! En effet, dans le cas contraire $\vec{x}$ serait un vecteur propre de f, et l'égalité $Q(f)(\vec{x}) = \vec{0}$ impliquerait que la valeur propre associée serait une racine de Q : impossible si le polynôme est irréductible.

(4) Lorsqu'on écrit la matrice de f dans cette base, on note que la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$ est $\alpha \mathrm{I}$ (vu qu'il s'agit d'un sous-espace propre), tandis que la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\ker(Q(f))$ débute par une « sous-diagonale » de 1. Cela provient du fait que sa matrice s'obtient en calculant l'image par f des vecteurs de $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \ldots, f^{\ell}(\vec{x}))$, sachant que $f\left(f^k(\vec{x})\right) = f^{k+1}(\vec{x})$ (le vecteur suivant de la famille). Pour exprimer la dernière image (à savoir $f^{\ell+1}(\vec{x})$) en fonction des autres vecteurs $f^k(\vec{x})$, vous aurez éventuellement besoin d'isoler $f^{\ell+1}(\vec{x})$ dans l'égalité $Q(f)(\vec{x}) = \vec{0}$ (vraie car $\vec{x} \in \ker(Q(f))$).

Réduire f grâce à la décomposition $E = \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(Q(f))$.

(1) Montrer l'existence et unicité de la valeur propre α.
(2) Montrer : $E \neq \ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$, et en déduire $\ker(Q(f)) \neq \{\vec{0}\}$ grâce à la somme directe.
(3) Produire une base cyclique de $\ker(Q(f))$ à l'aide d'un vecteur non nul.
(4) Écrire la matrice dans une base adaptée à la somme directe. On obtient des blocs compagnons.

Pour l'existence de la valeur propre α : théorème des valeurs intermédiaires ou raisonnement par l'absurde. Pour l'unicité : regarder les racines du polynôme annulateur P.

Exemple 21. Soit f un endomorphisme de E tel que : $f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$. Par le lemme des noyaux : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$. En trouvant une *jolie* base adaptée à cette décomposition, nous pourrons réduire f. Pour cela nous supposons de plus, ici, que E **est un espace vectoriel réel de dimension** 3, et que $f \neq 2\mathrm{Id}_E$.

Tout d'abord, notons que 2 est valeur propre de f (autrement dit : $f - 2\mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible). Raisonnons par l'absurde en supposant que ce n'est pas le cas. La relation supposée vérifiée par f peut se réécrire : $(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f^2 + \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathrm{L}(E)}$. Si 2 n'est pas valable propre, alors $f - 2\mathrm{Id}_E$ est inversible et composer l'égalité précédente par son inverse à gauche donne : $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ (†). Mais c'est impossible : cette égalité impliquerait $\det(f^2) = \det(-\mathrm{Id}_E) = (-1)^3 = -1$ (ici intervient l'hypothèse $\dim(E) = 3$), alors que $\det(f^2) = \det(f)^2 \geqslant 0$ car $\det(f) \in \mathbb{R}$ (ici intervient l'hypothèse que E est un espace vectoriel *réel*). Contradiction. Par l'absurde, on a démontré que 2 est valeur propre de f (et $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$) (1).

On en déduit en particulier : $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (3). Mais du fait que $f \neq 2\mathrm{Id}_E$ par hypothèse, on a aussi : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \neq E$, et donc : $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \neq \{\vec{0}\}$, sinon la somme directe : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$ donnerait une contradiction. Ainsi il existe des vecteurs non nuls dans $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$ (2) : soit $\vec{x}$ l'un d'entre eux.

Montrons que $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$ (3). Tout d'abord, comme f laisse stable ce noyau, la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, dont nous allons à présent justifier la liberté : dans le cas contraire, $\vec{x}$ serait un vecteur propre de f, associé à 2 puisque c'est l'unique racine réelle du polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + X - 2 = (X - 2)(X^2 + 1)$. Mais dans ce cas on aurait : $\vec{x} \in \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \cap \ker\left(f - 2\mathrm{Id}_E\right) = \{\vec{0}\}$: c'est absurde puisque $\vec{x} \neq \vec{0}$. D'où la liberté de la famille (3).

On peut en déduire la dimension de $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$, puis que $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est en fait une **base** de ce noyau. D'après ce qui précède, $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$ de cardinal 2, et comme la dimension excède le cardinal des familles libres on en déduit : $\dim\left(\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \geqslant 2$. En combinant tout ce que l'on sait :

$$3 = 1 + 2 \leqslant \dim(\ker(f)) + \dim\left(\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) = \dim(E) = 3,$$

ce qui n'est possible que si l'on a les égalités :

$$\dim(\ker(f)) = 1, \text{ et : } \dim\left(\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) = 2. \quad (3)$$

En particulier, $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$ de cardinal égal à la dimension de l'espace, donc c'en est une **base** (3).

Soit $\vec{y}$ un vecteur qui engendre $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ (il en existe un vu que $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1). Du fait que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$, concaténer une base de ces deux noyaux donne une base de E. Par conséquent, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{y}, \vec{x}, f(\vec{x}))$ est une base de E (4). Écrivons la matrice de f dans cette base : on a $f(\vec{e}_1) = f(\vec{y}) = 2\vec{y}$ car $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $f(\vec{e}_2) = f(\vec{x}) = \vec{e}_3$, et enfin $f(\vec{e}_3) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

On a réduit f.

Exercice 27. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. On suppose : $f^3 + 2f^2 = 0_{\mathrm{L}(E)}$, et : $f^2 \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Par le lemme des noyaux on a : $E = \ker\left(f + 2\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f^2\right)$.

1. Montrer que -2 est valeur propre de f.
2. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2) \setminus \ker(f)$, alors $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker\left(f^2\right)$.
3. On suppose de plus que $\ker(f) \neq \ker(f^2)$. Montrer que la matrice de f dans une base convenable est de la forme :
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 28. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. On suppose : $f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E$. Par le lemme des noyaux on a : $E = \ker\left(f + \mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$.

1. Montrer que -1 est valeur propre de f (*s'inspirer de l'exemple ci-dessus peut fonctionner*).
2. Montrer que si $\vec{x} \in \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \setminus \{\vec{0}\}$, alors $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille libre de $\ker\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$.
3. On suppose de plus que $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Montrer que la matrice de f dans une base convenable est de la forme :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 29. Se demander pourquoi $\ker(Q(f))$ est toujours un espace cyclique dans les cas particuliers de cette section. Peut-on généraliser ?

6 ✓ Applications de la réduction

6.1 La diagonalisation

6.1.1 Dans l'étude de suites récurrentes linéaires

C'est l'application la plus banale de la réduction. Voir la section 1.3 sur les matrices compagnons pour ← page 4
plus de détails. La stratégie se généralise aux suites vérifiant une relation de récurrence couplée du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + v_n + 2w_n, \\ v_{n+1} & = & u_n + 2v_n + w_n, \\ w_{n+1} & = & 2u_n + v_n + w_n, \end{array} \right. \quad \text{et plus généralement :} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ u_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} u_{j,n},$$

à ceci près que le vecteur colonne est plutôt, dans ces deux exemples : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, ou : $X_n = \begin{pmatrix} u_{1,n} \\ \vdots \\ u_{p,n} \end{pmatrix}$, et la matrice en présence n'est plus une matrice compagnon : on évitera donc de généraliser à tort les résultats de réduction mentionnés dans la section susdite.

6.1.2 Dans l'étude de chaînes de Markov

Voir le cours du chapitre de probabilités, et son livret *Méthodes*.

6.1.3 Dans l'étude d'équations différentielles linéaires

Voir le cours du chapitre sur les équations différentielles, et son livret *Méthodes*. Vous trouverez aussi quelques pistes dans la section 1.3 sur les matrices compagnons.

← page 4

6.1.4 Dans la résolution d'équations matricielles

Le terme est vague. Par « équation matricielle », j'entends la résolution d'équations de la forme $A = P(M)$, où $A \in \mathrm{M}_n(K)$ est une matrice fixée, $P \in K[X]$ un polynôme donné (souvent avec peu de coefficients non nuls) et $M \in \mathrm{M}_n(K)$ l'inconnue de cette équation, mais d'autres configurations sont possibles. Par exemple, l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une telle équation.

Leur résolution est compliquée par le fait qu'il n'existe pas de fonction « racine n^{e} matricielle » (du moins pas clairement, et de toute façon pas au programme) pour inverser les relations.

Même pour une relation aussi simple que : $M^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$, la résolution n'est pas aussi intuitive qu'on ne le voudrait. On penserait naïvement à prendre les racines carrées des coefficients : $M = \begin{pmatrix} \pm\alpha & 0 \\ 0 & \pm\beta \end{pmatrix}$ convient, certes, mais il peut y avoir d'autres solutions ; par exemple, l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a également pour solution $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (vérifiez-le). De plus, penser que les équations matricielles se résolvent comme les équations réelles ou complexes entraîne de graves erreurs : l'équation $x^4 = -1$ n'a pas de solution x réelle, alors que l'équation $M^4 = -\mathrm{I}_2$ a des solutions $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, par exemple : $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient, vérifiez-le (cet exemple ne vient pas de nulle part, comment y ai-je pensé ? Que représentent géométriquement $-\mathrm{I}_2$ et la matrice solution proposée ?).

Toutefois, si l'on cherche à résoudre $M^k = D$ où D est une matrice diagonale *dont les coefficients diagonaux sont tous distincts*, alors les seules solutions sont bien obtenues « comme on pense », en extrayant les racines k^{e} des coefficients diagonaux de D.

Exercice 30. Démontrer cette affirmation.

La situation est déjà délicate pour la résolution d'une équation aussi simple que $M^k = D$ où D est diagonale, alors que dire si l'on remplace D par une matrice A arbitraire ? Quelles sont les solutions de l'équation matricielle $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, par exemple ?

Il va de soi que poser $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, puis calculer M^2, pour en déduire neuf équations (non linéaires) vérifiées par a, b, c, etc., dans l'espoir de les résoudre, **est voué à l'échec**. Vous n'y parviendrez JAMAIS ainsi, et ce même si M est d'ordre 2.

C'est alors que la réduction vient à la rescousse. L'idée est que si l'on veut résoudre $A = P(M)$, *où A est diagonalisable*, alors A et M commutent (en effet : $AM = MP(M) = P(M)M = MA$), donc les endomorphismes canoniquement associés à A et M, qu'on note f_A et f_M, commutent également. En particulier, **les sous-espaces propres de f_A sont stables par** f_M, donc on peut étudier l'endomorphisme induit par f_M sur chaque sous-espace propre ; comme f_A est une homothétie sur chaque sous-espace propre, l'étude s'en voit simplifiée, et comme la somme des sous-espaces donne l'espace ambiant entier (puisque

A est diagonalisable), déterminer la restriction de f_M à chaque sous-espace propre permet d'en déduire f_M.

Plus précisément :

1. On diagonalise A : si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres (adaptée à la décomposition en somme de sous-espaces propres), alors en notant Q la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$, on a $A = QDQ^{-1}$ où D est diagonale.
2. On montre que A et M commutent en écrivant : $AM = MP(M) = P(M)M = MA$.
3. On introduit leurs endomorphismes canoniquement associés f_A et f_M, et on utilise la commutation pour en déduire que les sous-espaces propres de f_A (qui sont ceux de A) sont stables par f_M.
4. Comme la somme des sous-espaces propres égale l'espace entier, et qu'ils sont tous stables par f_M, on en déduit que la matrice de f_M dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, disons de la forme : $M' = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_k \end{pmatrix}$, où A_i est carrée et d'ordre égal à la dimension du i^{e} sous-espace propre.
   Notons que si chaque sous-espace propre est une droite, alors les A_i sont des blocs d'ordre 1 et donc M' est une matrice diagonale ! Situation royale et privilégiée en exercice.
   Si on a davantage d'informations sur M et A, certains blocs sont éventuellement simplifiables : voir exemple ci-dessous.
5. D'après la formule du changement de base, appliquée à f_M avec la base canonique et $\mathcal{B}$, on a : $M = QM'Q^{-1}$.
6. On injecte les expressions $A = QDQ^{-1}$ et $M = QM'Q^{-1}$ dans l'équation $A = P(M)$, et on en déduit : $D = P(M')$ (multiplier à gauche par Q^{-1} et à droite par Q).
7. Cette égalité équivaut à des équations vérifiées par les coefficients de M'. On les résout, et on en déduit M', puis M.

Exemple 22. Résolvons l'équation matricielle $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Notons A la matrice du membre de droite.

1. On sait montrer que A est diagonalisable : si $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A = QDQ^{-1}$.
2. On a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent.
3. Notons f_A et f_M leurs endomorphismes canoniquement associés. Ils commutent, donc les sous-espaces propres de f_A, c'est-à-dire $\ker(f_A - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\ker(f_A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, sont stables par f_M.
4. Soit $\mathcal{B}$ la base obtenue par concaténation des familles génératrices des sous-espaces propres ci-dessus (ou encore : ce sont les colonnes de Q). Grâce à la stabilité de $\ker(f_A - \mathrm{Id})$ et $\ker(f_A)$ (qui sont des droites), on sait que dans cette base, la matrice de f_M est de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
5. D'après la formule du changement de base : $M = Q \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} Q^{-1}$.
6. On a $A = M^2$, c'est-à-dire, d'après les points 1. et 5. ci-dessus : $QDQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} Q^{-1}$. Après multiplication à gauche par Q^{-1} et à droite par Q, cela donne : $D = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$.
7. On identifie les coefficients de $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$, et cela donne : $\alpha^2 = 2$, $\beta = 0$, et donc : $\alpha = \pm\sqrt{2}$, $\beta = 0$. On en déduit les égalités :

$$M = Q \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, ces deux matrices conviennent.

Exercice 31. Imiter cette démarche pour résoudre l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Si A n'est pas diagonalisable, mais malgré tout de forme assez simple, alors vous pourrez toujours y parvenir en suivant cette méthode.

Exercice 32. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^2 = A$, où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer : $MA = AM$.
2. En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\alpha^2 = \gamma^2 = 1$. Que vérifie β ? En déduire les deux matrices M qui conviennent.

Les polynômes interpolateurs de Lagrange permettent aussi d'étudier les solutions de telles équations, et notamment de montrer (dans certains cas particuliers) que les solutions de $P(M) = A$, d'inconnue M, sont des polynômes en A ! Voir la section 8.2. → page 43

6.1.5 Dans les produits scalaires impliquant des endomorphismes autoadjoints

Voir le cours du chapitre sur les espaces préhilbertiens et euclidiens, et son livret *Méthodes*.

6.2 La trigonalisation

Toutes les applications de la diagonalisation valent également pour la trigonalisation, bien que l'affaire devienne plus délicate (elle doit être indiquée dans ce cas).

Outre cela, l'intérêt de la trigonalisation est que :

— au contraire de la diagonalisation, elle est valable pour toute matrice réelle (quitte à la voir dans $\mathbb{C}$) ;

— elle « dévoile » le spectre : ce sont les coefficients diagonaux (alors que pour une matrice quelconque, les valeurs propres ne sont en général pas visibles à l'œil nu).

Comme la diagonale d'une matrice triangulaire se comporte bien vis-à-vis de la multiplication et exponentiation, cela permet notamment d'étudier les variations du spectre de A **quand on étudie ses puissances**, qu'on la multiplie par une autre matrice, etc.

Dans le même ordre d'idée, on utilise la trigonalisation d'une matrice A en vue d'étudier le comportement asymptotique de $(A^n)_{n \geqslant 0}$ ou les propriétés de la fonction $t \mapsto \exp(tA)$, et plus précisément pour relier ce comportement et ces propriétés au spectre de A. Dans ce cas, il est préférable de privilégier la trigonalisation avec des blocs diagonaux de la forme $\lambda \mathrm{I} + N$ avec N triangulaire stricte (et donc nilpotente), et de tirer profit de la formule du binôme de Newton :

$$\forall k \gg 1, \quad (\lambda \mathrm{I} + N)^k = \lambda^k \mathrm{I} + \sum_{i=1}^{p} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i,$$

où p est l'indice de nilpotence de N (il est essentiel de remarquer que cette somme est à support fini). Si l'on contrôle les puissances de N (relativement indolores puisque N est nilpotente) et les suites géométriques $(\lambda^n)_{n \geqslant 0}$ pour toute valeur propre λ, alors on contrôle le comportement des puissances des blocs diagonaux $\lambda \mathrm{I} + N$ puis celui des puissances de A. À cet effet, il est utile de noter que $\binom{k}{i}$ est polynomial en k et que par croissances comparées, le facteur λ^{k-i} l'emporte.

Cependant l'intérêt de la trigonalisation est surtout théorique : c'est lorsqu'on veut montrer des propriétés du spectre qu'il peut être plus commode de travailler sur une triangulation (dans $\mathbb{C}$). Par exemple, si A est une matrice complexe d'ordre n dont on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes (comptées avec multiplicités) :

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^k) = \left\{\lambda^k \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\right\}$, c'est-à-dire : **les valeurs propres complexes de A^k sont celles de A élevées à la puissance k** (notez qu'on peut montrer directement une inclusion – laquelle ? – partant de la définition de valeur propre ; mais l'égalité est fausse si on ne considère que les valeurs propres réelles : considérer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de A^2 pour s'en convaincre) ;

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{tr}(A^k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$;

— pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a : $\det(P(A)) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(\lambda_i)$.

Essayez de démontrer ces propositions, très utilisées en exercice.

7 Utiliser la décomposition de Dunford

La triangulation à l'aide d'une matrice diagonale par blocs a l'air d'être suffisante pour toutes les motivations données ci-dessus ; la décomposition de Dunford qu'on a présentée en corollaire semble moins concrète et donc moins intéressante. Nous expliquons ici pourquoi il n'en est rien.

Certains ouvrages de référence motivent la décomposition de Dunford par le calcul de l'exponentielle matricielle. C'est entendable mais c'est selon moi une mauvaise direction pour comprendre son intérêt. Par ailleurs, même dans ce cadre-là, j'y vois surtout un intérêt *théorique* : j'y viens plus bas.

Pour la comprendre, regardons de plus près de ce que nous enseigne la décomposition de Dunford, et qui N'est PAS contenu dans l'énoncé de réduction avec la matrice triangulaire diagonale par blocs :

— l'UNICITÉ de la décomposition ;

— le fait que D et N soient des POLYNÔMES en A.

L'unicité de la décomposition est un moyen très commode de démontrer que des endomorphismes ou matrices sont diagonalisables, lorsqu'on veut montrer un énoncé du type :

« On suppose f diagonalisable. Montrer que g est diagonalisable ».

On a déjà parlé de ce genre d'énoncé à la section 2, en soulignant que si g s'exprime en fonction de f, ← page 8 alors une piste est d'obtenir, pour tout polynôme P, une relation entre $P(g)$ et $P(f)$. Si l'on y parvient, alors l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples pour l'un implique son existence pour l'autre. Cependant cette méthode peut parfois échouer *si la dépendance est en sens contraire* : si c'est f qui dépend de g, alors l'égalité $P(f) = 0$ n'implique pas nécessairement $P(g) = 0$.

Pour un exemple concret, il suffit de considérer : $B = A^2$, avec l'hypothèse que B est diagonalisable. On se demande si A est diagonalisable aussi. On a certes : $\forall P \in K[X]$, $P(B) = P(A^2)$, mais on aimerait plutôt exprimer $P(A)$ en fonction de $P(B)$. L'égalité précédente ne permet pas d'en déduire qu'il existe un polynôme annulateur scindé et à racines simples de A, même si B en admet un.

C'est dans ces cas-là que la décomposition de Dunford peut débloquer la situation, et parfois très simplement. Pour ce faire :

— on introduit la décomposition de Dunford de g (ce qui est toujours possible si l'on est dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ; autrement, rien n'assure que χ_g est scindé) : $g = d + n$;

— comme f dépend de g, on peut exprimer f exclusivement en fonction de d et n, et on essaie d'en déduire une décomposition de f comme somme de deux endomorphismes qui commutent, respectivement diagonalisable et nilpotent ;

— l'étape précédente nous permet d'en déduire la décomposition de Dunford de f, mais comme f est diagonalisable sa décomposition de Dunford est aussi $(f,0)$, donc par unicité on obtient deux relations vérifiées par d et n.

En regardant de plus près ces deux relations vérifiées par d et n (surtout celle obtenue en regardant la partie nilpotente), on espère en déduire : $n = 0$, et donc que $g = d$ est diagonalisable.

Nous allons l'illustrer dans deux exemples qui se traitent classiquement avec d'autres méthodes. Vous comparerez les mérites et inconvénients de chacune d'entre elles.

Exemple 23. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. On suppose que A^2 est diagonalisable et on se demande si A l'est. On est dans le cadre d'application décrit plus haut : c'est A^2 qui dépend de A et non l'inverse (*a priori*, du moins ! l'interpolation de Lagrange permettrait de me contredire : voir la section 8), → page 44 on est donc dans le « mauvais sens » pour donner une condition nécessaire de réduction de A^2 en fonction de la réduction de A. C'est cela qui nous conduit à les relier *via* la décomposition de Dunford. Soit (D, N) la décomposition de Dunford de A. On va exprimer la décomposition de Dunford de A^2 en fonction de D et N. Comme D et N commutent, on a par la formule du binôme de Newton :

$$A^2 = D^2 + 2ND + N^2 = D^2 + N(2D + N).$$

Comme D est diagonalisable, il est facile de montrer que D^2 l'est aussi. Pour la nilpotence de $N(2D+N)$, on note que la commutativité des différentes matrices en présence implique : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(N(2D+N))^k = N^k(2D+N)^k$, et donc $N(2D+N)$ est nilpotente du fait que N le soit. Enfin, on vérifie que D^2 et $N(2D+N)$ commutent, toujours du fait que D et N commutent, donc $\left(D^2, N(2D+N)\right)$ est la décomposition de Dunford de A^2. Or A^2 est diagonalisable et : $A^2 = A^2 + 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, donc sa décomposition de Dunford est aussi $\left(A^2, 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}\right)$. Par unicité de la décomposition :

$$A^2 = D^2, \quad 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} = N(2D+N).$$

Or N est nilpotente et $2D$ est inversible parce que 0 n'est pas valeur propre de A, et comme $2D$ et N commutent on en déduit que $2D + N$ est inversible. Multiplier la deuxième égalité par son inverse donne donc : $N = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. On en déduit que $A = D$ est diagonalisable : d'où le résultat.

Si on enlève la condition d'inversibilité, le résultat est faux. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (pourquoi ?) alors que $A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$ est diagonale donc diagonalisable.

Exercice 33.

1. Vérifier les détails que j'ai omis (diagonalisabilité et nilpotence des deux matrices proposées, inversibilité de $2D + N$).
2. Démontrer ce résultat par une autre méthode.
3. Démontrer cette généralisation, avec et sans la décomposition de Dunford : on ne suppose plus A inversible, mais toujours que A^2 est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si : $\ker(A^2) = \ker(A)$.

Exemple 24. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On pose : $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & A \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})$, et on suppose que M est diagonalisable. On se demande ce que cela implique sur A. On est dans le cadre d'application décrit plus haut : c'est M qui dépend de A et non l'inverse, on est donc dans le « mauvais sens » pour donner une condition nécessaire de réduction de M en fonction de la réduction de A. C'est cela qui nous conduit à les relier *via* la décomposition de Dunford. Soit (D, N) la décomposition de Dunford de A. On va exprimer la décomposition de Dunford de M en fonction de D et N. On a :

$$M = \begin{pmatrix} D+N & D+N \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & D+N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N & N+D \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & N \end{pmatrix}.$$

On aurait pu être tenté de garder D dans le bloc supérieur droit de la première matrice, en ne laissant que N dans le second. Mais on se convainc aisément que si B est une matrice commutant avec N, alors $\begin{pmatrix} N & B \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & N \end{pmatrix}$ est toujours nilpotente, donc il n'y avait aucune bonne raison de ne garder que N dans le bloc supérieur droit de la seconde matrice : c'est ce qui m'a conduit à y mettre $N + D$.

On vérifie facilement que $\begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & D \end{pmatrix}$ est diagonalisable parce que D l'est, tandis que $\begin{pmatrix} N & N+D \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & N \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice de nilpotence au plus $k+1$ si N est d'indice de nilpotence k. De plus ces deux matrices commutent du fait que N et D commutent :

$$\begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N & N+D \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & N+D \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DN & DN+D^2 \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & DN \end{pmatrix},$$

donc elles forment la décomposition de Dunford de M. Or M est diagonalisable par hypothèse, donc sa décomposition de Dunford est aussi, naturellement : $\left(M,0_{\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})}\right)$. Par *unicité* de la décomposition :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & D \end{pmatrix}, \quad 0_{\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})} = \begin{pmatrix} N & N+D \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & N \end{pmatrix}.$$

Ceci implique naturellement : $N = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, puis : $D = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} - N = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. Alors : $A = D + N = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.

On a montré que si M est diagonalisable, alors A est la matrice nulle.

Exercice 34.

1. Vérifier les détails que j'ai omis (diagonalisabilité et nilpotence des deux matrices proposées).
2. Démontrer ce résultat par une autre méthode.

Autre usage de la décomposition de Dunford. Toutes les applications de la triangulation données dans la section 3 valent pour la décomposition de Dunford (exponentiation et propriétés de l'exponentielle ← page 20 matricielle en fonction du spectre), pas toujours avec la même efficacité que la description explicite avec une diagonale par blocs de la forme $\lambda \mathrm{I} + N$. Cela peut cependant avoir l'avantage de la concision.

Si vous l'utilisez dans un contexte d'exponentiation, l'étude de $A^k = (D+N)^k$ passe bien entendu par la formule du binôme de Newton (c'est possible parce que D et N commutent) : $\forall k \gg 1,\ (D+N)^k = D^k + \sum_{i=0}^{p} \binom{k}{i} D^{k-i} N^i$, où p est l'indice de nilpotence de N (il est essentiel de remarquer que cette somme est à support fini).

En revanche, si ce n'est pas le calcul de A^k qui vous intéresse, mais ses racines k^{es}, c'est-à-dire les matrices B telles que : $B^k = A$, alors il est plus intéressant d'écrire A sous la forme : $A = D(\mathrm{I}_n + D^{-1}N)$, du moins si c'est possible (c'est-à-dire si D est inversible). Trouver des racines k^{es} de D et $\mathrm{I}_n + D^{-1}N$ permet alors d'en trouver pour A, ce qui est relativement facile pour D (on se ramène à une matrice diagonale) et nécessite plus de travail pour $\mathrm{I}_n + D^{-1}N$.

Intérêt d'avoir des polynômes en A. Savoir que D et N sont des polynômes en A n'est pas très utile, du moins pas plus utile que d'avoir la relation : $DN = ND$, tant que l'on ne travaille qu'avec A, D et N. Cette information est une vraie plus-value lorsque le problème étudié fait intervenir d'autres matrices, disons une matrice B, dont on sait :

— qu'elle commute avec A, ou :

— qu'elle est un polynôme en D ou N (conséquence par exemple de l'interpolation de Lagrange : voir la section 8.3). → page 44

Dans le premier cas, on en déduit que B commute aussi avec tout polynôme en A, donc avec D et N. Dans le second cas, le fait d'être un polynôme en D (par exemple) implique d'être un polynôme en A, et donc de commuter avec A et N (qui sont des polynômes en A). Nous donnons un exemple concret où cette considération peut être décisive :

Exemple 25. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On veut montrer qu'il existe $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $M^2 = A$. Si A est diagonalisable c'est très facile (pourquoi ?), mais à défaut d'avoir cette hypothèse c'est « mieux que rien » de se ramener à une matrice diagonalisable *via* la décomposition de Dunford, en gérant à part la contribution de la matrice nilpotente. C'est dans le même ordre d'idée que ce que l'on dit de la trigonalisation dans la section 3. Faisons donc : soit (D,N) la décomposition de Dunford de A. Comme : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D)$, et ← page 20

que A est inversible, la matrice D n'admet pas 0 pour valeur propre et D est inversible aussi. Cela permet de factoriser $A = D + N$ par D :

$$A = D\left(\mathrm{I}_n + D^{-1}N\right).$$

Pourquoi cette factorisation ? Pour se ramener à l'extraction d'une racine carrée de matrice diagonalisable, puisqu'on sait faire. On construit une matrice $D' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $D'^2 = D$, puis d'une matrice $N' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $N'^2 = \mathrm{I}_n + D^{-1}N$. Cette construction de N' n'est pas évidente : je la laisse en exercice (voir ci-dessous), pour me concentrer sur la subtilité qui nécessite que D et N soient des polynômes en A.

En effet, une fois D' et N' construites, on aimerait simplement dire que : $(D'N')^2 = D'^2N'^2 = D\left(\mathrm{I}_n + D^{-1}N\right) = A$. Problème : pour la première égalité, encore faut-il que D' et N' commutent ! C'est là qu'intervient un argument polynomial : on peut en effet construire D' et N' de sorte que ce soient respectivement des polynômes en D et $D^{-1}N$ (exercice ci-dessous). Or D et $D^{-1}N$ sont des polynômes en A (idem), donc D' et N' sont des polynômes en A également. L'algèbre $\mathbb{C}[A]$ est commutative, donc D' et N' commutent, ce qui permet enfin de conclure : $(D'N')^2 = A$. D'où le résultat.

Exercice 35.

1. Montrer *via* un contre-exemple que l'hypothèse d'inversibilité est essentielle.
2. Montrer l'existence de D' telle que : $D'^2 = D$, et que c'est un polynôme en D (penser à l'interpolation de Lagrange : voir la section 8.3). → page 44
3. Justifier que D^{-1} est AUSSI un polynôme en A (pour D on le sait déjà).
4. Montrer qu'il existe une matrice dont le carré est $\mathrm{I}_n + D^{-1}N$, et qui est un polynôme en A. Une piste possible : chercher d'abord une telle matrice sous la forme d'un polynôme en $D^{-1}N$. Le développement limité de $\sqrt{1+x}$ quand $x \to 0$ peut vous inspirer en cela.

8 Application des polynômes de Lagrange en algèbre linéaire

Il NE s'agit PAS d'expliquer, dans cette section, l'application des polynômes d'interpolation de Lagrange :

— aux problèmes sur les polynômes (pour cela, voir le document *Méthodes* sur les polynômes) ;

— à l'étude de la matrice de Vandermonde.

On illustre ici des applications à l'étude des matrices et endomorphismes.

8.1 Pour accélérer le calcul de puissances matricielles

Nous avons donné deux moyens de calculer des puissances entières de matrices dans la section 4 : en réduisant (diagonalisation ou triangulation), ou en faisant la division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur. Nous proposons une troisième approche permettant de calculer des puissances matricielles d'une matrice A à partir de ses valeurs propres, dans le cas où A est **diagonalisable**. Elle a l'avantage :

— de nous affranchir d'expliciter une base de vecteurs propres (et donc de calculer la matrice de passage P et son inverse, *a priori* indispensables pour calculer $A = PDP^{-1}$), ce qui est certes une qualité partagée par la méthode de la division euclidienne ;

— de calculer également des puissances négatives quand A est inversible (ce que ne permet pas la méthode de la division euclidienne), ce qui est certes une qualité partagée par la diagonalisation ;

— de calculer y compris des « puissances non entières », ce que ne permet aucune des deux méthodes classiques : voir la section 8.2 pour voir ce qu'on entend par là. → page 43

Pour ce faire : si P est une matrice inversible et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(K)$ est une matrice diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En fait, plus généralement, on a l'égalité suivante,

qui est la clé de cette section, et donc à comprendre :

$$\boxed{\forall Q \in K[X],\ Q(A) = PQ(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q(\lambda_p)\end{pmatrix}P^{-1}.} \qquad (\ddagger)$$

En effet, pour tout polynôme $Q \in K[X]$, que l'on écrit : $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a :

$$\begin{aligned} Q(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = \sum_{k=0}^{n} a_k PD^kP^{-1} &= P\left(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\right)P^{-1} && \text{(on obtient là } PQ(D)P^{-1}\text{)} \\ &= P\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_1^k & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_p^k\end{pmatrix}P^{-1} && \text{(somme coefficient par coefficient)} \\ &= P\begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q(\lambda_p)\end{pmatrix}P^{-1}. \end{aligned}$$

Un argument plus économe pour justifier $(\ddagger)$ est de dire : les applications $Q \mapsto Q(A)$ et $Q \mapsto PQ(D)P^{-1}$ sont linéaires sur $K[X]$ et coïncident sur la famille génératrice $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $K[X]$ (vu qu'on a $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), donc elles sont égales partout.

L'idée est alors d'utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange pour construire *explicitement* un polynôme $Q \in K_{p-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ Q(\lambda_i) = \lambda_i^n$. Ainsi, par $(\ddagger)$:

$$Q(A) = P\begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q(\lambda_p)\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_p^n\end{pmatrix}P^{-1} = PD^nP^{-1} = A^n.$$

En calculant $Q(A)$ (qui ne fait intervenir que A^k pour $k \leqslant p-1$, puisque $Q \in K_{p-1}[X]$), on obtient A^n pour TOUT entier n, et sans avoir calculé P et P^{-1} (puisque ces deux matrices n'apparaissent pas dans la construction de Q : seules les valeurs propres λ_i interviennent).

Comme on l'a annoncé plus haut, l'avantage de procéder ainsi est qu'**il n'est plus nécessaire d'expliciter la matrice de passage P ou son inverse P^{-1}** : c'est un gain précieux du point de vue calculatoire, en particulier lorsqu'on a démontré qu'une matrice est diagonalisable par des moyens détournés (par exemple : en constatant que le polynôme caractéristique est scindé et à racines simples).

Aussi, cette méthode se généralise à plein d'autres situations : tout ce dont on a besoin, c'est de deux matrices (ci-dessus : A et A^n) qui se réduisent en des matrices diagonales (dans leur cas : D et D^n) avec la même matrice de passage. En fait, plus généralement, si des matrices A et B s'écrivent : $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$, avec D et D' diagonale, alors on construit un polynôme interpolateur Q envoyant les coefficients diagonaux de D sur ceux de D' (avec une subtilité si des coefficients diagonaux de D se répètent : s'ils ne sont pas envoyés sur des coefficients diagonaux égaux de D', le polynôme Q ne peut pas exister), de sorte que : $Q(D) = D'$, puis, en imitant le raisonnement plus haut : $Q(A) = B$.

C'est parce que cette méthode est peu exigeante qu'elle s'applique aussi, pour ce qu'on illustre ici, aux puissances négatives (exemple 27) voire non entières (section 8.2). On pourrait aussi calculer ainsi des exponentielles de matrices, etc. → page 43

Exemple 26. On cherche à calculer les puissances entières de : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Après calcul : $\chi_A = (X-4)(X-2)$. Le polynôme caractéristique est scindé et à racines simples, donc A est diagonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que : $A = P\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}P^{-1}$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, que l'on écrit : $Q = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a :

$$Q(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = \sum_{k=0}^{d} a_k P\begin{pmatrix}2^k & 0\\ 0 & 4^k\end{pmatrix}P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{d} a_k \begin{pmatrix}2^k & 0\\ 0 & 4^k\end{pmatrix}\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{d} a_k 2^k & 0\\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{d} a_k 4^k\end{pmatrix}P^{-1}.$$

On a montré : $\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ Q(A) = P\begin{pmatrix}Q(2) & 0\\ 0 & Q(4)\end{pmatrix}P^{-1}$ (nous n'avons fait que redémontrer dans ce cas particulier l'identité (‡)).

Voyons comment nous allons en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ grâce à l'interpolation de Lagrange, *sans calculer P ni P^{-1}* : soit (L_0, L_1) la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée aux réels 2 et 4, et trouvons le polynôme $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ vérifiant : $Q(2) = 2^n$, $Q(4) = 4^n$. On sait qu'il est défini par :

$$Q = Q(2)L_0 + Q(4)L_1 = 2^n\frac{X-4}{2-4} + 4^n\frac{X-2}{4-2} = \frac{1}{2}\left((4^n - 2^n)X + \left(2^{n+2} - 2\cdot 4^n\right)\right).$$

On a alors, étant donné que $Q(2) = 2^n$ et $Q(4) = 4^n$:

$$Q(A) = P\begin{pmatrix}Q(2) & 0\\ 0 & Q(4)\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}P^{-1} = A^n,$$

c'est-à-dire :

$$A^n = Q(A) = \frac{1}{2}\left((4^n - 2^n)A + \left(2^{n+2} - 2\cdot 4^n\right)\mathrm{I}_2\right).$$

Toutes les quantités du membre de droite étant connues, on en déduit A^n :

$$A^n = \frac{1}{2}\left((4^n - 2^n)\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} + \left(2^{n+2} - 2\cdot 4^n\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4^n + 2^n & 4^n - 2^n\\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n\end{pmatrix} = 2^{n-1}\begin{pmatrix}2^n + 1 & 2^n - 1\\ 2^n - 1 & 2^n + 1\end{pmatrix}.$$

Nous n'avons pas eu besoin d'expliciter P ni P^{-1}.

Exercice 36. Soit $A \in \mathrm{M}_p(K)$ une matrice diagonalisable, ayant seulement deux valeurs propres distinctes a et b. En s'inspirant de cet exemple, montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{a-b}\left((a^n - b^n)A + (a\cdot b^n - b\cdot a^n)\mathrm{I}_p\right)$, et que cette égalité vaut aussi pour $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible.

Exemple 27. Soit $A = \begin{pmatrix}-19 & -16 & 48\\ 8 & 5 & -24\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$. On a : $\det(A) = -45 \neq 0$, donc A est inversible. Utilisons les polynômes interpolateurs de Lagrange pour calculer A^{-100}. Nous vous laissons vérifier qu'on a : $\chi_A = (X+5)(X+3)^2$, et de plus : $A + 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}-16 & -16 & 48\\ 8 & 8 & -24\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-16 & 0 & 0\\ 8 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ est de rang 1, donc par le théorème du rang : $\dim(\ker(A + 3\mathrm{I}_3)) = 2$. Les ordres de multiplicité des valeurs propres coïncident avec les dimensions des sous-espaces propres, donc A est diagonalisable d'après le critère de diagonalisation : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}P^{-1}$. Par le même raisonnement que dans l'exemple précédent, on a :

$$A^{-100} = \begin{pmatrix}(-3)^{-100} & 0 & 0\\ 0 & (-3)^{-100} & 0\\ 0 & 0 & (-5)^{-100}\end{pmatrix}, \ \text{ et : } \forall Q \in \mathbb{R}[X],\ Q(A) = P\begin{pmatrix}Q(-3) & 0 & 0\\ 0 & Q(-3) & 0\\ 0 & 0 & Q(-5)\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Soit (L_0, L_1) la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée aux réels -3 et -5, et soit $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ le polynôme interpolateur tel que : $Q(-3) = (-3)^{-100} = 3^{-100}$, et : $Q(-5) = (-5)^{-100} = 5^{-100}$. On a :

$$Q = Q(-3)L_0 + Q(-5)L_1 = 3^{-100}\frac{X+5}{-3+5} + 5^{-100}\frac{X+3}{-5+3} = \frac{1}{2}\left(\left(3^{-100} - 5^{-100}\right)X + \left(5 \cdot 3^{-100} - 3 \cdot 5^{-100}\right)\right).$$

On a alors, étant donné que $Q(-3) = (-3)^{-100}$ et $Q(-5) = (-5)^{-100}$:

$$Q(A) = P\begin{pmatrix} Q(-3) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q(-5) \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} (-3)^{-100} & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^{-100} & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^{-100} \end{pmatrix} = A^{-100},$$

c'est-à-dire :

$$A^{-100} = Q(A) = \frac{1}{2}\left(\left(3^{-100} - 5^{-100}\right)A + \left(5 \cdot 3^{-100} - 3 \cdot 5^{-100}\right)\mathrm{I}_3\right).$$

Après simplifications :

$$A^{-100} = \begin{pmatrix} -7 \cdot 3^{-100} + 8 \cdot 5^{-100} & -8 \cdot 3^{-100} + 8 \cdot 5^{-100} & 24 \cdot 3^{-100} - 24 \cdot 5^{-100} \\ 4 \cdot 3^{-100} - 4 \cdot 5^{-100} & 5 \cdot 3^{-100} - 4 \cdot 5^{-100} & -12 \cdot 3^{-100} + 12 \cdot 5^{-100} \\ -3^{-100} + 5^{-100} & -3^{-100} + 5^{-100} & 4 \cdot 3^{-100} - 3 \cdot 5^{-100} \end{pmatrix}.$$

Nous n'avons pas eu besoin d'expliciter P ni P^{-1}. Notez qu'avec les matrices, même une puissance négative peut s'écrire comme un polynôme.

On voit cependant que même s'il est avantageux de ne pas avoir à calculer P et P^{-1}, on ne peut pas être gagnant sur tous les fronts : si le polynôme interpolateur est de degré n, alors il faut calculer A^k pour tout $k \leqslant n$, ce qui est coûteux si n est grand. On ne peut pas tout avoir. On rencontre essentiellement les mêmes avantages et défauts que la méthode de la division euclidienne exposée dans la section 4.1 ← page 27 (avec cependant un avantage en plus pour les polynômes interpolateurs : l'autre méthode se cantonne aux puissances positives).

8.2 Dans la résolution d'équations matricielles (autre approche)

Cette section propose une autre approche (qui a le désavantage de s'appliquer à moins de situations : le cas non diagonalisable devient hors de portée) pour résoudre partiellement les équations matricielles abordées dans la section 6.1.4, de la forme $P(M) = A$ avec $P \in K[X]$, mais qui sont plus souvent de ← page 34 la forme $M^k = A$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_n(K)$, avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Les polynômes interpolateurs permettent, dans ce cadre, d'expliciter des matrices M qui vérifient $M^k = A$, dans le cas où A est diagonalisable (sans assurer cependant qu'on obtient ainsi *toutes* les solutions).

Rien ne change par rapport à la section précédente : si A est diagonalisable, réduite sous la forme : $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$ (où la matrice de passage P n'a pas besoin d'être explicitée), alors une racine k^{e} évidente est : $M = P\begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt[k]{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}$, comme vous pouvez le vérifier (si les racines k^{es} n'ont pas de sens, on remplace les $\sqrt[k]{\lambda_i}$ par des nombres complexes ω_i vérifiant $\omega_i^k = \lambda_i$). Pour calculer M sans expliciter P et P^{-1}, on construit un polynôme interpolateur Q tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \sqrt[k]{\lambda_i}$. En imitant le raisonnement qui démontre (‡) (mais que l'on devrait reproduire en détails à chaque fois), on a donc :

$$Q(A) = P\begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt[k]{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1} = M.$$

Ainsi $M = Q(A)$ est une solution de l'équation $M^k = A$. Varier les choix de racines k^{es} permet d'obtenir d'autres solutions (sans toutefois nous assurer qu'il n'y en a pas d'autres, à moins d'hypothèses supplémentaires). Nous illustrons cette résolution incomplète sur un exemple concret plus bas.

En fait, on pourrait même résoudre entièrement l'équation $M^k = A$ par ce moyen-là, mais la stratégie devient bien plus subtile, et pas plus rentable que la méthode de la section 6.1.4. Nous n'en parlerons pas.

Exemple 28. Trouvons *une* matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^3 = A$, avec : $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Après calcul : $\chi_A = (X-1)(X-8)$. Le polynôme caractéristique est scindé et à racines simples, donc A est diagonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$. Une matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant clairement $M^3 = A$ est alors : $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On l'explicite sans déterminer P ni P^{-1} grâce aux polynômes interpolateurs : soit (L_0, L_1) la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée aux réels 1 et 8, et trouvons le polynôme $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ vérifiant : $Q(1) = 1$, $Q(8) = 2$. On sait qu'il est défini par :

$$Q = Q(1)L_0 + Q(8)L_1 = \frac{X-8}{1-8} + 2\frac{X-1}{8-1} = \frac{1}{7}(X+6).$$

On a alors, étant donné que $Q(1) = 1$ et $Q(8) = 2$ (on imite le raisonnement utilisé plusieurs fois dans cette section) :

$$Q(A) = P \begin{pmatrix} Q(1) & 0 \\ 0 & Q(8) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = M,$$

c'est-à-dire : $M = \frac{1}{7}(A + 6\mathrm{I}_2) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$. On a explicité une solution de $M^3 = A$, *sans expliciter P ni P^{-1}*. Notez qu'avec les matrices, même une racine cubique peut s'écrire comme un polynôme.

8.3 Pour montrer que des matrices commutent par un argument polynomial

C'est, dans cette section, **l'apport le plus utile des polynômes interpolateurs**, et le seul qui leur soit exclusif (en effet, les problèmes des deux sections précédentes peuvent très bien s'étudier par d'autres méthodes). Ils apparaissent pour démontrer des relations de commutation dans des cas non triviaux (en particulier abstraits ; parce que, si les matrices sont explicites, il suffit de calculer leur produit explicitement dans les deux sens possibles, pour vérifier la commutation). C'est utile en particulier pour utiliser la formule du binôme de Newton, ou produire des sous-espaces stables.

En effet, dans un contexte théorique, ou quand des matrices ne sont pas explicites, notre principal moyen de démontrer que des matrices commutent est de démontrer que l'une est un polynôme de l'autre, parce que deux polynômes d'une même matrice commutent toujours : c'est par exemple ce que l'on fait lorsqu'on résout des équations matricielles de la forme $P(M) = A$ (voir la section 6.1.4). En fait, on a même un peu mieux, mais il faut savoir le démontrer (exercice suivant) : si deux matrices A et B commutent, alors tout polynôme en A commute avec tout polynôme en B. ← page 34

Exercice 37. Soient A et B deux matrices d'ordre n telles que : $AB = BA$.
1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k B = BA^k$, et en déduire : $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $A^k B^\ell = B^\ell A^k$.
2. En déduire : $\forall (P, Q) \in (K[X])^2$, $P(A)Q(B) = Q(B)P(A)$.

En particulier, si A et B commutent, alors tout polynôme en A commute avec B. Mais ce n'est pas évident de *toute* matrice que l'on définirait à l'aide de A. Par exemple : si M est une matrice telle que $M^2 = A$, est-il vrai que M et B commutent ? Certes, on sait montrer que M et A commutent (parce que : $AM = M^2M = M^3 = MM^2 = MA$; on utilise le fait que A soit un polynôme en M), et par hypothèse A et B commutent, mais cela ne prouve pas qu'il en est de même de M et B (la commutativité n'est pas transitive, comme le montre l'exercice suivant avec un contre-exemple très simple).

Exercice 38. Soient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = BA$ et $BC = CB$, mais que $AC \neq CA$.

Et pourtant, il reste vrai que si $M^2 = A$, alors M et B commutent. Mais comment faire ? Comme d'habitude : on montre que M est un polynôme en A ! (Chose assez amusante, dans la mesure où réciproquement, A est déjà un polynôme en M.) Si l'on y parvient, on invoque le résultat ci-dessus pour en déduire que M commute avec B.

La difficulté est donc de montrer que M est un polynôme en A. Vous n'y parviendrez pas toujours. Le cas le plus favorable est celui où $A \in \mathrm{M}_n(K)$ est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes, et si vous avez réussi à montrer que M est diagonalisable avec la même matrice de passage (voir la section 6.1.4). C'est-à-dire : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ et D, D' diagonales telles que : $A = PDP^{-1}$, $M = PD'P^{-1}$. Notons λ_i les coefficients diagonaux de D, et ω_i ceux de D'. On introduit alors un polynôme interpolateur $Q \in K[X]$ vérifiant : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \omega_i$, et en imitant le raisonnement au début des sections 8.1 et 8.2 on montre (faites-le vraiment) qu'on a : $D' = Q(D)$, puis : $M = PD'P^{-1} = PQ(D)P^{-1} = Q(PDP^{-1}) = Q(A)$. C'est ce qu'on voulait démontrer, et on peut enfin conclure que M commute avec B en tant que polynôme en A (qui commute avec B par hypothèse).

Cela marche très souvent : « presque » toute matrice définie à l'aide de A, est en fait un polynôme en A. Mon affirmation est trop floue pour avoir un sens et pouvoir être démontrée, mais les cas rencontrés se traitent comme celui ci-dessus.

Exercice 39. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ deux matrices avec n valeurs propres distinctes (pas nécessairement les mêmes pour A et B), $k, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $M, N \in \mathrm{M}_n(K)$ des matrices telles que : $M^k = A$, $N^\ell = B$. En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, montrer que M et N sont des polynômes en A et B respectivement, et en déduire que si A et B commutent alors M et N également.

Ceci montre : si A et B commutent, alors toute racine k^{e} de A commute avec toute racine ℓ^{e} de B. C'était loin d'être évident.

8.4 Pour réduire des endomorphismes sans raisonner matriciellement

La raison profonde pour laquelle les polynômes interpolateurs de Lagrange interviennent si souvent, dans les calculs impliquant des matrices diagonalisables (voir sections précédentes), est qu'ils permettent de décrire les projections sur les sous-espaces propres des endomorphismes diagonalisables.

En effet, le point de départ est la relation : $\forall P \in K_n[X]$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\lambda_k) L_k$, où les L_k sont les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $n+1$ scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ (en général ce sont les valeurs propres de l'endomorphisme étudié). En prenant $P = 1$ et $P = X$, on obtient alors : $1 = \sum\limits_{k=0}^{n} L_k$, et : $X = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$. Le lien avec l'algèbre linéaire se fait lorsqu'on évalue ces deux identités en un **endomorphisme** f. On obtient :

$$\boxed{\mathrm{Id}_E = \sum_{k=0}^{n} L_k(f), \quad f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(f).}$$

La première identité, évaluée en un vecteur $\vec{x} \in E$, permet d'écrire tout vecteur de l'espace à l'aide des polynômes interpolateurs : $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x} = \sum\limits_{k=0}^{n} L_k(f)(\vec{x})$, et : $f(\vec{x}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(f)(\vec{x})$.

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} = \sum_{k=0}^{n} L_k(f)(\vec{x}), \quad f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(f)(\vec{x}).}$$

Pour aller au-delà, il faut en savoir plus sur f (diagonalisabilité) pour en déduire que les $L_k(f)$ sont des projecteurs, dont les caractéristiques géométriques se décrivent à l'aide des sous-espaces propres.

Écrire un endomorphisme comme une combinaison linéaire de projecteurs, c'est une façon géométrique de le diagonaliser, une base de diagonalisation s'obtenant à l'aide de bases des images desdits projecteurs. Ayez-le en tête afin de savoir reconnaître cette situation en exercice.

Table des matières